

高等学校教材

普通物理学

1



国防科工委802 2 0164726 9

(第五版)

程守洙 江之永 主编 胡盘新 汤毓骏 宋开欣 修订



高等教育出版社

高等学校教材

普通物理学

第一册

(第五版)

程守洙 江之永 主编
胡盘新 汤毓骏 宋开欣 修订



高等教育出版社

(京) 112 号

图书在版编目(CIP)数据

普通物理学 第一册 (第五版) /程守洙, 江之永主编;
胡盘新等修订. —5 版 (修订本). —北京: 高等教育出版
社, 1998

高等学校教材

ISBN 7-04-006423-5

I. 普… II. ①程… ②江… ③胡… III. 普通物理学-
高等学校-教材 IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 03008 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京外文印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.75 字数 350 000

1961 年 8 月第 1 版

1998 年 6 月第 5 版 1998 年 6 月第 1 次印刷

印数 0 001—30 107

定价 14.60 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等

质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

内 容 提 要

本书是在程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第三版)的基础上,根据1995年国家教委颁布的工科本科大学物理课程教学基本要求,结合读者多年使用此书的建议和意见,以及当前国内外物理教材改革的动态修订而成的。此次修订保留了第三版的体系、风格及特色,改写了部分内容,调整了个别章节,增加了阅读材料,充实了应用类题目,在内容现代化、加强应用性、扩大知识面以及提高科学素养等方面均有进一步增强。

本书可作高等工业院校各专业物理课的教材,也可供各类成人大学的物理课教学参考之用。

第五版前言

程守洙、江之永主编的《普通物理学》第三版，自 1978 年问世以来，深受广大读者的欢迎。这次修订主要参考了当前国际国内物理教材改革的动态，考虑了广大使用者所提出的建议和意见，以 1995 年国家教委颁布的高等工科院校《大学物理课程教学基本要求》为基础，在保留第三版体系、风格、特色的条件下，对内容现代化、加强应用性、扩大知识面、提高科学素养等方面作了努力，我们改写了部分内容，调整了个别章节，增加了阅读材料，充实了应用题目。历时多年，先后数易其稿。又承清华大学夏学江教授、西安交通大学吴百诗教授、北京航空航天大学刘佑昌教授、北京印刷学院贺准城教授等多次审阅，提出许多宝贵意见，使本书内容益臻完善，我们在此表示衷心的感谢。

本书采用了《量和单位》的国家标准，以及最新公布的“物理学名词”。

编者

1997 年 6 月

第三版前言

本书以程守洙、江之永等改编《普通物理学》1964年第二版为基础,以1978年教育部制订的《中学物理教学大纲(试行草案)》为起点,并适当考虑了当前学生的实际而编写的.在编写过程中,学习了兄弟院校的先进经验,借鉴了部分国外教材.同时力求以辩证唯物主义思想为指导,切实贯彻少而精、理论联系实际等原则,努力做到:加强基础理论的内容和叙述;加强近代物理的观点和知识的介绍;加强对学生分析问题和解决问题能力的培养.

本书采用国际单位制.物理量名称和符号基本上采用国家标准(1977年讨论稿).

本书的讲授时数估计在160学时左右.全书分三册,第一册包括力学、气体分子运动论和热力学基础;第二册为电磁学;第三册包括光学、波动、量子物理等.为了贯彻因材施教原则,除基本内容外,还编入一些要求较高的基础理论,目录中标以*号,作为选讲或自学用.本教材对高等数学有一定要求,因此建议物理课安排在一年级第二学期开设.

为了教学方便,我们收集了较多的思考题、习题,其中难度较大的标以 $\triangle$ 号,可根据不同情况选用.书后有若干附录,供教学参考.

由于我们水平有限,时间仓促,书中缺点和错误在所难免.衷心希望使用本书的同志多提宝贵建议和意见,使它能逐步提高和完善起来.

本书由程守洙(上海交通大学)和江之永(同济大学)主编.参加编写工作的有:上海交通大学(胡盘新、朱咏春、吴锡珑、秦树艺),同济大学(周涵可、宋开欣),上海纺织工学院(陈光清、汤毓骏),上海化工学院(华寿荪、高守双),上海机械学院(骆加锋),上

海铁道学院(钟季康),上海科技大学(马连生[前]、张关荣[后]),并由陈光清、胡盘新、朱咏春、宋开欣、汤毓骏负责定稿.在编写过程中,西南交通大学盛克敏同志等给予大力支持和协助,特在此表示感谢.

本书由北方交通大学余守宪,上海化工学院周昌寿,上海师范大学许国保,天津大学李金镔等十五所院校的代表通过会议的形式讨论审阅,提出了许多宝贵的意见,对此我们表示衷心的感谢.

上海市高等工业院校物理学编写组

1978年9月

本书中物理量和单位

量的名称		符号	单位名称	单位符号	量 纲	备 注
长	度	L, s	米	m	L	
面	积	S	平方米	m^2	L^2	
体	积	V	立方米	m^3	L^3	1L(升) $=10^{-3}m^3$
时	间	t, τ	秒	s	T	
位	移	$s, \Delta r$	米	m	L	
速	度	v, u	米每秒	m/s	LT^{-1}	
加	速	a	米每二次方秒	m/s^2	LT^{-2}	
角	位	θ	弧度	rad	1	
角	速	ω	弧度每秒	rad/s	T^{-1}	
角	加	α	弧度 每二次方秒	rad/s^2	T^{-2}	
质	量	m	千克	kg	M	
	力	F	牛顿	N	LMT^{-2}	$1N=1kg \cdot m/s^2$
重	力	G	牛顿	N	LMT^{-2}	
	功	A	焦耳	J	L^2MT^{-2}	$1J=1N \cdot m$
能	量	$E, (W)$	焦耳	J	L^2MT^{-2}	
动	能	E_k	焦耳	J	L^2MT^{-2}	
势	能	E_p	焦耳	J	L^2MT^{-2}	
功	率	P	瓦特	W	L^2MT^{-2}	$1W=1J/s$
摩	擦	μ	—	—	—	
动	量	p	千克米每秒	$kg \cdot m/s$	LMT^{-1}	
冲	量	I	牛顿秒	$N \cdot s$	LMT^{-1}	
力	矩	M	牛顿米	$N \cdot m$	L^2MT^{-2}	
转	动	J	千克二次方米	$kg \cdot m^2$	L^2M	

续表

量的名称	符号	单位名称	单位符号	量 纲	备 注
角动量(动量矩)	L	千克二次 方米每秒	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$	LMT^{-1}	
压 力 (压 强)	p	帕斯卡	Pa	$\text{L}^{-1}\text{MT}^{-2}$	$1\text{Pa}=1\text{N}/\text{m}^2$
热 力 学 温 度	T	开尔文	K	Θ	
攝 氏 温 度	t	摄氏度	$^{\circ}\text{C}$	Θ	$t^{\circ}\text{C}=(T-273.15)\text{K}$
摩 尔 质 量	M_{mol}	千克每摩尔	kg/mol	MN^{-1}	
分 子 质 量	m	千克	kg	M	
分 子 有 效 直 径	d	米	m	L	
分 子 平 均 自 由 程	$\bar{\lambda}$	米	m	L	
分子平均碰撞次数	$\bar{Z}$	次每秒	1/s	T^{-1}	
碰 撞 截 面	σ	平方米	m^2	L^2	1b(靶恩) $=10^{-28}\text{m}^2$
体 积 分 子 数	n	每立方米	$1/\text{m}^3$	L^3	
热 量	Q	焦 耳	J	L^2MT^{-2}	
比 热 容	c	焦耳每千克 开尔文	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	$\text{L}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}$	
热 容	C	焦耳每开尔文	J/K	$\text{L}^2\text{MT}^{-2}\Theta^{-1}$	
摩尔定体热容	C_V	焦耳每摩尔 开尔文	$\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$	$\text{L}^2\text{MT}^{-2} \cdot \Theta^{-1}\text{N}^{-1}$	
摩尔定压热容	C_p	焦耳每摩尔 开尔文	$\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$	$\text{L}^2\text{MT}^{-2} \cdot \Theta^{-1}\text{N}^{-1}$	
比 热 容 比	γ	—	—	—	
粘 度	η	帕秒	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\text{L}^{-1}\text{MT}^{-1}$	
热 导 率	$\kappa, (\lambda)$	瓦每米开尔文	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$	$\text{LMT}^{-3}\Theta^{-1}$	
扩 散 系 数	D	二次方米每秒	m^2/s	L^2T^{-1}	
熵	S	焦耳每开尔文	J/K	$\text{L}^2\text{MT}^{-2}\Theta^{-1}$	

责任编辑	陈小平
封面设计	季思九
责任绘图	李维平
版式设计	周顺银
责任校对	朱惠芳
责任印制	宋克学

目 录

绪论	1

第一篇 力 学

第一章 质点的运动	5
§ 1-1 质点 参考系 运动方程	5
§ 1-2 位移 速度 加速度	11
§ 1-3 圆周运动及其描述	18
§ 1-4 曲线运动方程的矢量形式	27
§ 1-5 运动描述的相对性 伽利略坐标变换	32
思考题	39
习题	41
第二章 牛顿运动定律	47
§ 2-1 牛顿第一定律和第三定律	48
§ 2-2 常见力和基本力	51
§ 2-3 牛顿第二定律及其微分形式	57
§ 2-4 牛顿运动定律应用举例	60
§ 2-5 牛顿第二定律积分形式之一:动量定理	69
§ 2-6 牛顿第二定律积分形式之二:动能定理	79
§ 2-7 非惯性系 惯性力	87
思考题	90
习题	91
阅读材料 A 混沌和自组织现象	99
第三章 运动的守恒定律	103
§ 3-1 保守力 成对力做功 势能	104
§ 3-2 功能原理	113
§ 3-3 机械能守恒定律 能量守恒定律	122
§ 3-4 质心 质心运动定理 动量守恒定律 火箭飞行	129
§ 3-5 碰撞	140

§ 3-6 质点的角动量和角动量守恒定律	147
* § 3-7 质点在有心力场中的运动	153
* § 3-8 对称性和守恒定律	160
思考题	161
习题	162
阅读材料 B 宇宙的膨胀	168
第四章 刚体的转动	174
§ 4-1 刚体的平动、转动和定轴转动	174
§ 4-2 刚体的角动量 转动动能 转动惯量	179
§ 4-3 力矩 刚体定轴转动定律	186
§ 4-4 定轴转动的动能定理	192
§ 4-5 刚体的自由度 刚体的平面平行运动	198
§ 4-6 定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律	207
§ 4-7 进动	215
思考题	218
习题	219
第五章 相对论基础	226
§ 5-1 伽利略相对性原理 经典力学的时空观	227
§ 5-2 狭义相对论基本原理 洛伦兹坐标变换式	229
§ 5-3 相对论速度变换公式	237
§ 5-4 狭义相对论时空观	240
§ 5-5 狭义相对论动力学基础	248
* § 5-6 广义相对论简介	256
思考题	259
习题	260
阅读材料 C 宋超新星爆发和光速不变性	262

第二篇 热 学

第六章 气体动理论	265
§ 6-1 状态 过程 理想气体	265
§ 6-2 分子热运动和统计规律	270

§ 6-3	气体动理论的压强公式	275
§ 6-4	理想气体的温度公式	282
§ 6-5	能量均分定理 理想气体的内能	285
§ 6-6	麦克斯韦速率分布律	289
§ 6-7	玻尔兹曼分布律 重力场中粒子按高度的分布	295
§ 6-8	分子的平均碰撞次数及平均自由程	299
§ 6-9	气体内的迁移现象	303
§ 6-10	真实气体 范德瓦耳斯方程	312
§ 6-11	物态和相变	320
思考题		323
习题		324
阅读材料 D	非常温和非常压	326
第七章 热力学基础		337
§ 7-1	热力学第一定律	337
§ 7-2	热力学第一定律对于理想气体等值过程的应用	343
§ 7-3	绝热过程 多方过程	350
§ 7-4	焦耳-汤姆孙实验 真实气体的内能	357
§ 7-5	循环过程 卡诺循环	360
§ 7-6	热力学第二定律	368
§ 7-7	可逆过程与不可逆过程 卡诺定理	371
§ 7-8	熵	375
§ 7-9	熵增加原理 热力学第二定律的统计意义	383
思考题		387
习题		389
阅读材料 E	熵与能源	393
附录 I 矢量(第一部分)		398
附录 II 国际单位制(SI)		410
附录 III 力学的单位制和量纲		413
习题答案		416

绪 论

自然界,无限广阔,丰富多采.形形色色的物质在其中不断地运动变化着.什么是物质?大至日、月、星辰,小到分子、原子、电子,都是物质.固体、液体、气体和等离子体,这些实物是物质;电场、磁场、重力场和引力场,这些场也是物质.总之,自然界的无数事物,形色不一,都是运动着的物质的不同形态.

一切物质都在不断地运动着、变化着,绝对不动的物质是不存在的.日月的运行、江河的奔流、生物的代谢,这些都是物质运动变化的例子.正如恩格斯所指明:“运动,就最一般的意义来说,就它被理解为存在的方式、被理解为物质的固有属性来说,它包括宇宙中发生的一切变化和过程,从单纯的位置移动起直到思维.”^①物质运动形式是多种多样的,它们既服从共同的普遍规律,又各自有其独特的规律,对各种不同的物质运动形式的研究,形成了自然科学的各个分科.

物理学研究的是物质运动最基本最普遍的形式,包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核内的运动等等,显然这些运动并非都是简单的.

物理学所研究的运动,普遍地存在于其他高级的、复杂的物质运动形式之中,因此,物理学所研究的规律具有极大的普遍性.可以认为,物理学是除数学以外,一切自然科学的基础,也是当代工程技术的重大支柱.对物理学的这个评价,决非过甚其词.回顾物理学发展的全过程,可以加深我们对物理学重要性的认识.

物理学的发展已经经历了三次大突破.在17、18世纪,由于牛

^① 恩格斯.自然辩证法、北京:人民出版社,1971. 53

顿力学的建立和热力学的发展,不仅有力地推动了其他学科的进展,而且适应了研制蒸气机和发展机械工业的社会需要,引起了第一次工业革命,极大地改变了工业生产的面貌.到了19世纪,在法拉第-麦克斯韦(Faraday-Maxwell)电磁理论的推动下,人们成功地制造了电机、电器和电讯设备,引起了工业电气化,使人类进入了应用电能的时代,这就是第二次工业革命.20世纪以来,由于相对论和量子力学的建立,人们对原子、原子核结构的认识日益深入.在此基础上,人们实现了原子核能和人工放射性同位素的利用;促成了半导体、核磁共振、激光、超导、红外遥感、信息技术等新兴技术的发明;许多边缘学科发展起来了.新兴工业犹如雨后春笋,现代科学技术正在经历一场伟大的革命,人类进入了原子能、电子计算机、自动化、半导体、激光、空间科学等高新技术的时代.

总之,现代物理学已成为基础学科中发展最快、影响最深的一门学科.本世纪以来,它一方面向认识的深度进军,另一方面又向应用的广度发展.它在发掘新能源、新材料以及革新工艺过程、检测方法等方面,都提供了丰富的实验资料 and 理论根据;而许多新技术新工艺的实现,又大大地发展了生产力.生产技术的发展,反过来也为物理学的进一步研究准备了雄厚的物质条件,形成相辅相成、齐头并进的局面.当代自然科学发展特点之一,正是科学研究和工业技术的关系日益密切,从研究到应用,从研究成果发展成新兴工业部门的速度愈来愈快,周期愈来愈短.工业技术不断地向自然科学提出新的课题要求解决,许多发现和发明,已很少带有偶然性,而是人们有意识地、有目的地进行系统研究的结果.科学应当先行于技术,应当充分发挥理论对实践的指导作用.物理学与技术科学、生产实践的关系生动地体现了理论与实践之间的辩证关系.现在,在人类认识自然、改造自然的一系列重大课题上,现代物理学的各个分科都孕育着新的突破.可以预期,如果在粒子物理领域实现物理学的大突破,而能全面地揭露“基本”粒子内部的结构和它们相互转化和相互作用的规律性的话,将给人类的生活以及各

个自然科学领域带来巨大的影响。总之，未来的生产技术，将继续从物理学这片肥沃广阔的科学土壤中吸取营养，结出硕果。

物理学的发展过程，是人类对客观世界认识过程中的一个重要组成部分。物理学中不少规律和理论是直接由生产实践中总结出来的，但更多的物理发现却来自长期的科学实验，因此，科学实验和生产实践，都是推动科学技术发展的强大动力和源泉。物理学的研究方法一般是在观察和实验的基础上，对物理现象进行分析、抽象和概括，从而建立物理定律，进而形成物理理论，再回到实践中去经受检验。

高等工业学校肩负着培养我国各类高级工程技术专门人才的重任，要使我们培养的工程技术人员，能在飞速发展的科学技术面前有所独创、有所前进，对人类作出较大的贡献，就必须加强基础理论特别是物理学的学习。物理学是辩证唯物主义的坚实的自然科学基础，学习物理必须以辩证唯物主义为指导。通过学习能对物质最普遍、最基本的运动形式和规律有比较全面而系统的认识，树立辩证唯物主义的世界观，掌握物理学中的基本概念和基本原理以及研究问题的方法，同时在科学实验能力、计算能力和抽象思维能力等方面受到严格的训练，培养分析问题和解决问题的能力，提高科学素质。应该指出，普通物理学中所讲述的只是基本的内容，而且物理学和其他学科一样发展很快，新发现和新成果不断涌现。我们一方面要牢固地掌握物理学的基础理论，同样也要经常注意物理学的新成就，扩大知识面，增强本领，为祖国的建设作出应有的贡献。

第一篇 力 学

力学研究的是物质的机械运动. 本篇主要介绍质点动力学, 兼及刚体的转动. 经典力学的理论基础是牛顿的三个运动定律, 由此而引入了力、力矩、动量、冲量、角动量、功和能等概念, 得到了动量、角动量和机械能等的守恒定律.

经典力学只适用于物体作低速(与光速相比)运动的情形. 当物体的速度接近于光速时, 经典力学就失效了, 此时需要用相对论力学来作研究. 经典力学只是相对论力学在低速时的近似. 我们将在本篇第五章对相对论力学作简单介绍.

经典力学也无法适用于研究微观粒子的运动, 这时要用到量子力学. 不过实验与理论都证明, 源自经典力学的动量、角动量和能量等的守恒定律却仍然是适用的. 关于量子力学, 我们将在第三册中介绍.

由于经典力学所取得的辉煌成就, 曾使人感到只要通过精确的物理定律, 就能对物质运动的未来进行预测, 这是一种机械决定论的观点. 大量事实证明并非如此. 本篇阅读材料 A 中说明对许多事例在决定性的经典力学以外, 还得引入概率性的描述.

第一章 质点的运动

自然界的一切物质都处于永恒运动之中. 物质的运动形式是多种多样的, 其中, 机械运动是最简单又最基本的运动. 力学就是研究物体机械运动的规律及其应用的学科, 而牛顿运动定律则是经典力学的基础. 为了更好地掌握牛顿运动定律, 在本章中, 我们着重阐明三个问题. 第一, 如何描述物体的运动状态. 在运动学中, 物体的运动状态是用位矢和速度描述的, 而物体运动速度的变化则用加速度描述. 通过速度、加速度等概念的建立, 加深对运动的相对性、瞬时性和矢量性等基本性质的认识. 第二, 运动学的核心是运动方程. 通过运动方程的介绍, 既要掌握如何从运动方程出发, 求出质点在任意时刻的位矢、速度和加速度的方法, 又要能够在已知加速度(或速度)与时间的关系以及初始条件的情况下, 求出任意时刻质点的速度和位置. 总之, 要学会在运动学中使用微积分解题. 第三, 运动的研究, 离不开时间和空间. 经典力学的时空观是和牛顿运动定律、伽利略坐标变换交织在一起的. 通过伽利略坐标变换、速度变换和加速度变换的介绍, 了解经典力学时空观的局限性.

§ 1-1 质点 参考系 运动方程

机械运动是人们最熟悉的一种运动. 一个物体相对于另一个物体的位置, 或者, 一个物体的某些部分相对于其他部分的位置, 随着时间而变化的过程, 叫做机械运动. 为了研究物体的机械运动, 我们不仅需要确定描述物体运动的方法, 还需要对复杂的物体运动进行科学合理的抽象, 提出物理模型, 以便突出主要矛盾, 化

繁为简,以利于解决问题.

1. 质点

任何物体都有一定的大小、形状、质量和内部结构,即使是很小的分子、原子以及其他微观粒子也不例外.一般地说,物体运动时,其内部各点的位置变化常是各不相同的,而且物体的大小和形状也可能发生变化.但是,如果在我们所研究的问题中,物体的大小和形状不起作用,或者所起的作用并不显著而可以忽略不计,我们就可以近似地把该物体看作是一个具有质量而没有大小和形状的理想物体,称为质点.例如,研究地球绕太阳的公转时,由于地球的平均半径(约为 $6.4 \times 10^3 \text{ km}$)比地球与太阳间的距离(约为 $1.50 \times 10^8 \text{ km}$)小得多,地球上各点相对于太阳的运动就可看作相同.这时,就可以忽略地球的大小和形状,把地球当作一个质点(图 1-1).但是在研究地球的自转时,如果仍然把地球看作一个质点,就将无法解决实际问题.由此可知,一个物体是否可以抽象为一个质点,应根据问题的不同情况而定.

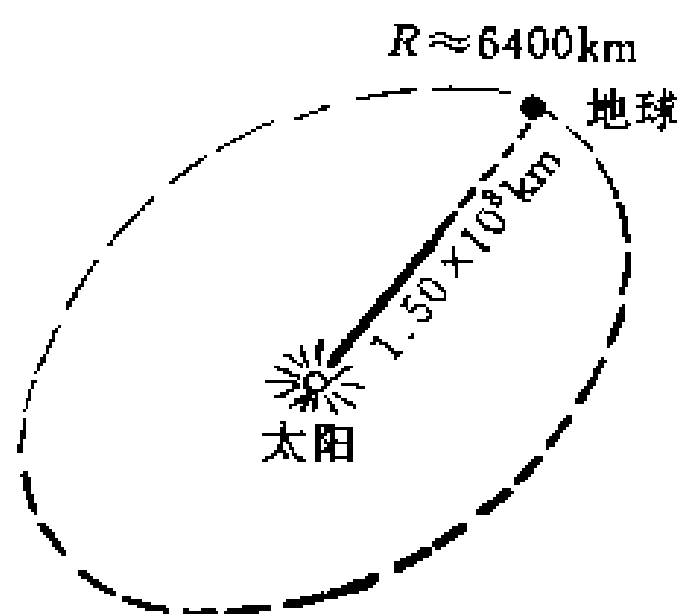


图 1-1 地球可当作质点

几百年来,人们对天体运动的研究证明,把天体看成质点能够正确地解决许多问题.所以,质点是一个恰当的物理模型.根据具体问题,提出相应的物理模型,这种方法是很有实际意义的.从理论上说,研究质点的运动规律,也是研究物体运动的基础.因为我们可以把整个物体看作由无数个质点所组成,从这些质点运动的分析入手,就有可能了解整个物体的运动规律.

2. 参考系和坐标系

在自然界里,绝对静止的物体是找不到的.大到星系,小到原

子、电子,无一不在运动.以地球来说,地球不仅在自转,而且以 30 km/s 的速率绕太阳公转.太阳则以 250 km/s 的速率绕银河系的中心旋转.银河系在总星系中旋转,而总星系又在无限的宇宙中运动.无论从机械运动来说,还是从其他运动形式来说,自然界中的一切物质都处于永恒运动之中.运动和物质是不可分割的,运动是物质存在的形式、是物质的固有属性,物质的运动存在于人们意识之外,这便是运动本身的绝对性.

在这些错综复杂的运动中,要描述一个物体的机械运动,总得选择另一物体或几个彼此之间相对静止的物体作为参考,然后研究这个物体相对于这些物体是如何运动的.被选作参考的物体叫做参考系.例如,要研究物体在地面上的运动,可选择路面或地面上静止的物体作为参考系(图 1-2).要研究宇宙飞船的运动,当运载火箭刚发射时,一般选地面作为参考系;当宇宙飞船绕太阳运行时,则常选太阳作为参考系.从运动的描述来说,参考系的选择可以是任意的,主要看问题的性质和研究的方便而定.

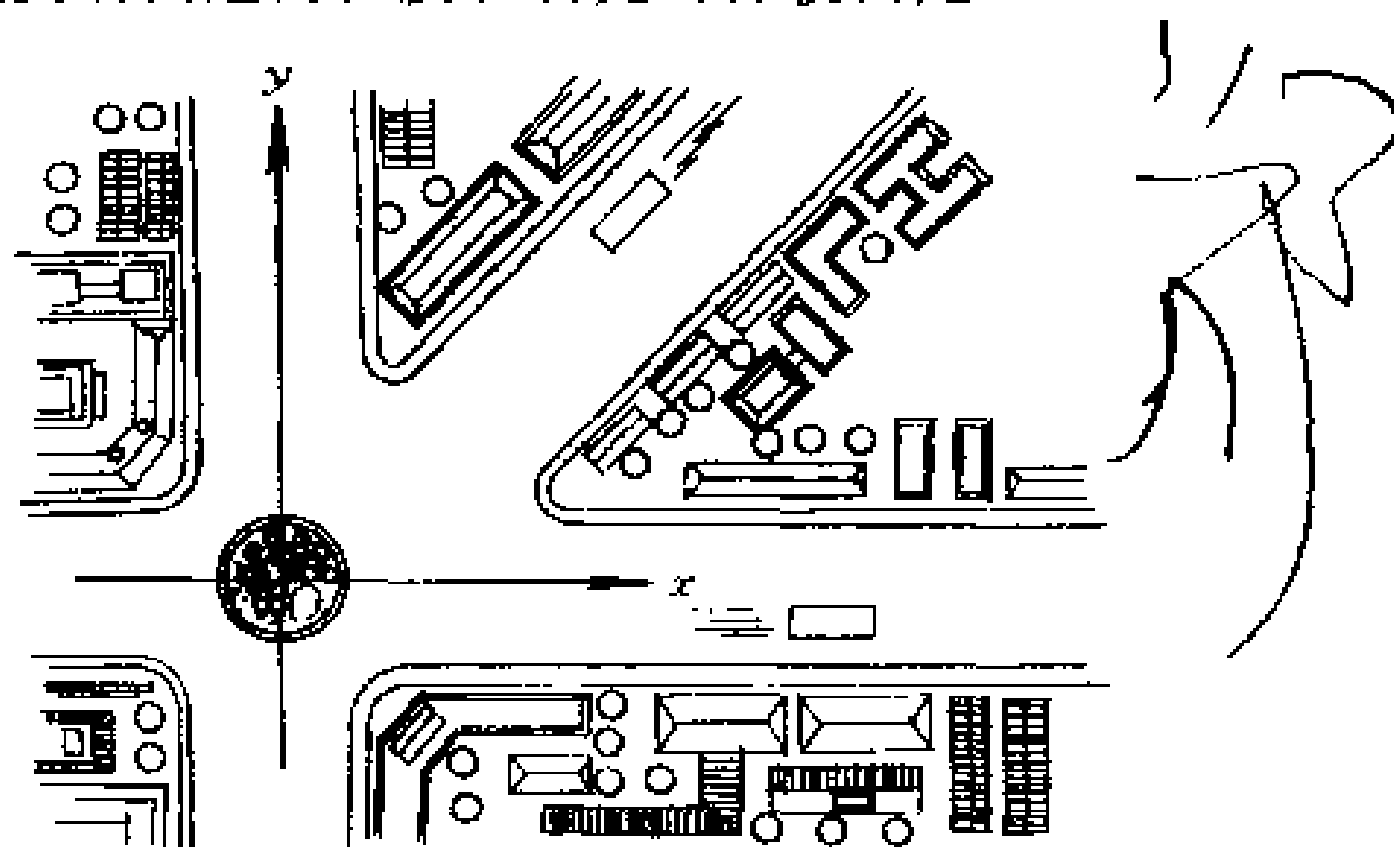


图 1-2 选路面为参考系

同一物体的运动,由于我们所选取的参考系不同,对它的运动的描述就会不同.例如,在作匀速直线运动的车厢中,有一个自由下落的物体,以车厢为参考系,物体作直线运动;以地面为参考系,

物体作抛物线运动；如以太阳或其他天体为参考系，运动的描述将更为复杂。在不同参考系中，对同一物体的运动具有不同描述的事实，叫做运动描述的相对性。早在我国战国后期的名家公孙龙就已经注意到这点，他提出了“飞鸟之影，未尝动也”的论辩。飞鸟的影子对地面其他物体来说是运动着的，但对飞鸟本身来说，如影随形，这个影子就是不动的了。

通过上面的讨论，我们知道，要明确地描述一个物体的运动，只有在选取某一确定的参考系后才有可能，而且由此作出的描述总是具有相对性的。

为了从数量上确定物体相对于参考系的位置，需要在参考系上选用一个固定的坐标系。一般在参考系上选定一点作为坐标系的原点，取通过原点并标有长度的线作为坐标轴。常用的坐标系是直角坐标系，它的三条坐标轴(x 轴、 y 轴和 z 轴)互相垂直。根据需要，我们也可以选用其他的坐标系，例如极坐标系、球坐标系或柱坐标系等。

3. 空间和时间

人们关于空间和时间概念的形成，首先起源于对自己周围物质世界和物质运动的直觉。空间反映了物质的广延性，它的概念是与物体的体积和物体位置的变化联系在一起。时间所反映的则是物理事件的顺序性和持续性。早在我国春秋战国时代，由墨翟创立的墨家学派就对空间和时间的概念给予了深刻而明确的阐释。《墨经》中说：“宇，弥异所也”。“久，弥异时也”。此处，“宇”即空间，“久”即时间。意思是说，空间是一切不同位置的概括和抽象；时间是一切不同时刻的概括和抽象。在现代自然科学形成之前两千多年，有这样深刻的见解，是很了不起的。在自然科学的创始和形成时代，关于空间和时间，有两种代表性的看法。莱布尼兹(G. W. Leibniz)认为，空间和时间是物质上下左右的排列形式和先后久暂的持续形式，没有具体的物质和物质的运动就没有空间和时间。

和莱布尼兹不同,牛顿认为,空间和时间是不依赖于物质的独立的客观存在.莱布尼兹强调空间和时间与物质运动的联系而忽视其客观性;牛顿强调空间和时间的客观存在而忽视其与物质运动的联系;他们都有其合理的一面,而又都包含着错误.随着科学的进步,人们经历了从牛顿的绝对时空观到爱因斯坦的相对论时空观的转变,从时空的有限与无限的哲学思辩到可以用科学手段来探索的阶段.目前量度的时空范围,从宇宙范围的尺度 10^{26}m [约 $2\times 10^{10}\text{l. y.}$ (光年)]到微观粒子尺度 10^{-15}m ,从宇宙的年龄 10^{18}s [约 $2\times 10^{10}\text{a}$ (年)]到微观粒子的最短寿命 10^{-24}s .物理理论指出,空间长度和时间间隔都有下限,它们分别是普朗克长度 10^{-35}m 和普朗克时间 10^{-43}s ,当小于普朗克时空间隔时,现有的时空概念就可能不再适用了.表1和表2列出了各种典型物理现象的空间和时间尺度,由此可见物理学研究所涉及的空间和时间范围是何等的广阔!

表 1 一些典型物理现象的空间尺度 单位:m

已观测到的宇宙范围	10^{26}
星系团半径	10^{23}
星系间距离	2×10^{22}
银河系半径	7.6×10^{22}
太阳到最近恒星的距离	4×10^{16}
太阳到冥王星的距离	10^{12}
日地距离	1.5×10^{11}
地球半径	10^6
无线电中波波长	10^3
核动力航空母舰长	3×10^2
小孩高度	1
尘埃	10^{-3}
人类红血球细胞直径	10^{-6}
细菌线度	10^{-9}
原子线度	10^{-10}
核的线度	10^{-15}
普朗克长度	10^{-35}

表 2 一些典型物理现象的时间尺度

单位: s

宇宙年龄	10^{18}
太阳系年龄	1.4×10^{17}
原始人	10^{13}
最早文字记录	1.6×10^{11}
人的平均寿命	10^9
地球公转(一年)	3.2×10^7
地球自转(一天)	8.6×10^4
太阳光到地球的传播时间	5×10^2
人的心脏跳动周期	1
中频声波周期	10^{-3}
中频无线电波周期	10^{-6}
π^+ 介子的平均寿命	10^{-8}
分子转动周期	10^{-12}
原子振动周期(光波周期)	10^{-15}
光穿越原子的时间	10^{-18}
核振动周期	10^{-23}
光穿越核的时间	10^{-24}
普朗克时间	10^{-43}

4. 运动方程

在一个选定的参考系中,当质点运动时,它的位置 $P(x, y, z)$ 是按一定规律随时刻 t 而改变的,所以位置是 t 的函数. 这个函数可表示为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

它们叫做质点的运动方程. 知道了运动方程,我们就能确定任一时刻质点的位置,从而确定质点的运动. 从质点的运动方程中消去时间 t ,即可求得质点的轨迹方程. 如果轨迹是直线,就叫做直线运动;如果轨迹为曲线,就叫做曲线运动. 例如,自由落体作的是直线运动,它的运动方程可写作 $x = 4.90 t^2$, 式中 x 以 m 计, t 以 s 计. 由关系式 $x = 4.90 t^2$, 我们可以确定任一时刻落体所在的位置. 大家所知道的直线运动的几个公式:

$$x = x_0 + vt \quad (\text{匀速})$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (\text{匀加速})$$

其实也都是运动方程.

§ 1-2 位移 速度 加速度

为了描述机械运动,我们不仅要有能反映物体位置变化的物理量,还要有结合时间的概念反映物体位置变化的快慢程度的物理量.现在,分别介绍如下.

1. 位矢

在坐标系中,质点的位置,常用位置矢量(简称位矢)表示.位矢是从原点指向质点所在位置的有向线段,用矢量 r 表示.设质点所在位置的坐标为 x, y, z ,那么,坐标 x, y, z 就是 r 沿坐标轴的三个分量.位矢的大小,如图 1-3 所示,可由关系式

$$r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

决定.引入沿着 x, y, z 三轴正方向的单位矢量 i, j, k 后,我们可把 r 写成

$$\boxed{r = xi + yj + zk} \quad (1-1)$$

位矢的方向余弦是

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

2. 位移

设曲线 $\widehat{AB}$ 是质点运动轨迹的一部分(图 1-4).在时刻 t ,质点在 A 点处,在时刻 $t + \Delta t$,质点到达 B 点处. A, B 两点的位置分别用位矢 r_A 和 r_B 来表示.在时间 Δt 内,质点的位置变化可用从 A

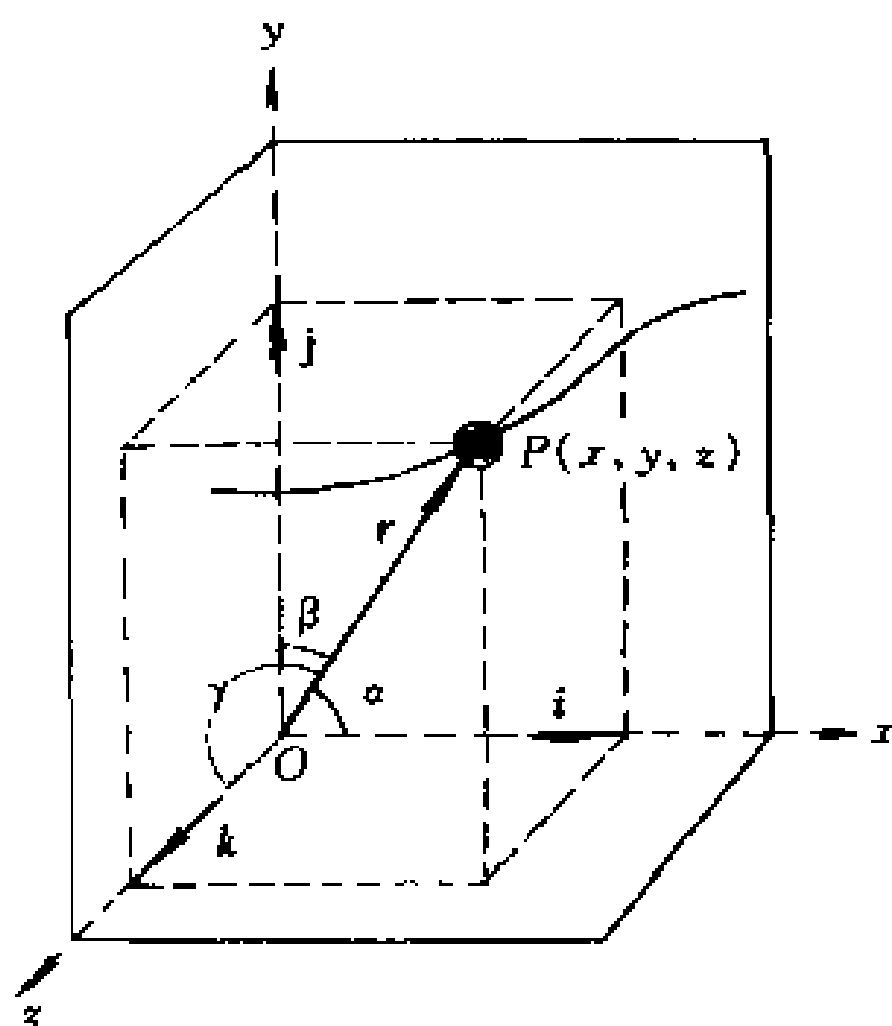


图 1-3 位矢

到 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示, $\overrightarrow{AB}$ 称为质点的位移矢量, 简称位移. 位移 $\overrightarrow{AB}$ 除了表明 B 点与 A 点之间的距离外, 还表明了 B 点相对于 A 点的方位.

位移是矢量, 是按三角形法则或平行四边形法则来合成的. 譬如说, 质点从 A 点移到 B 点, 又从 B 点移到 C 点(图 1-5), 那么质点在 C 点处对 A 点的位移显然是 $\overrightarrow{AC}$. AC 是三角形 ABC 的一边, 也是平行四边形 $ABCD$ 的对角线. 位移相加可用矢量式表示如下: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. 读作: 合位移 $\overrightarrow{AC}$ 等于分位移 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的矢量和.

从图 1-4 中可以看出, 位移 $\overrightarrow{AB}$ 和位矢 r_A 、 r_B 之间的关系为

$$r_B = r_A + \overrightarrow{AB}$$

或

$$\overrightarrow{AB} = r_B - r_A = \Delta r \quad (1-2)$$

上式说明, 位移 $\overrightarrow{AB}$ 等于位矢 r_B 和 r_A 的矢量差. 而矢量差 $r_B - r_A$ 也就是位矢 r 在 Δt 时间内的增量, 所以用 Δr 来表示.

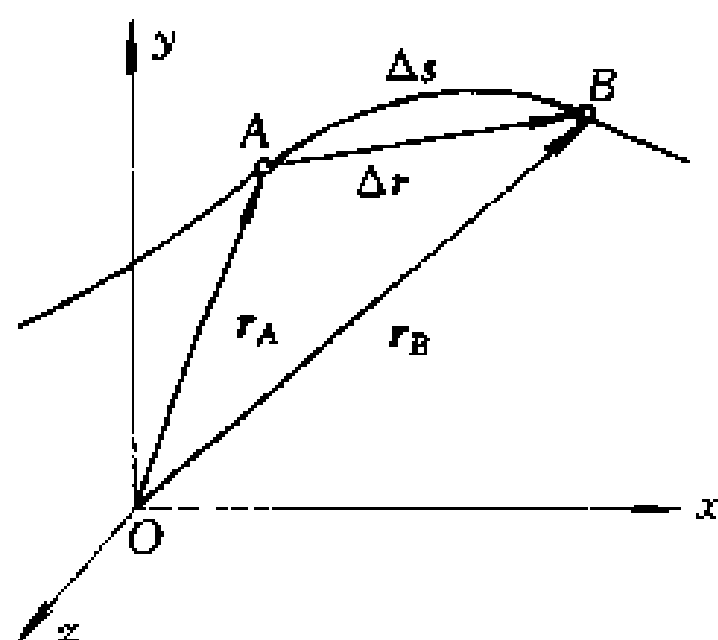


图 1-4 曲线运动中的位移

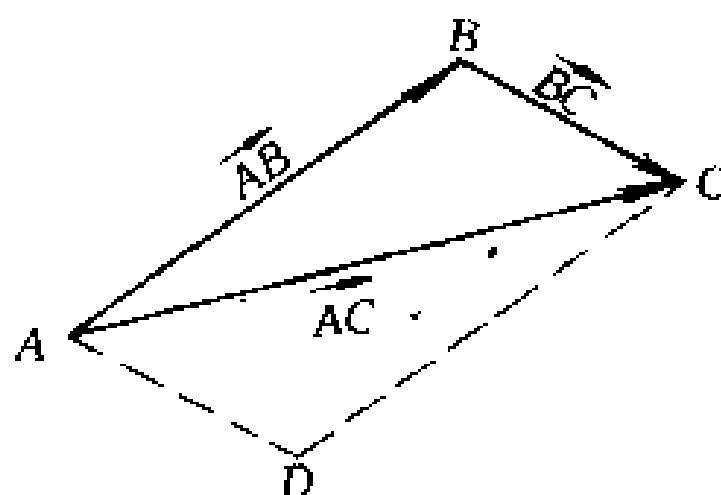


图 1-5 位移矢量的合成

必须注意,位移表示质点位置的改变,它并不是质点所经历的路程.例如,在图 1-4 中,位移是有向线段 $\overrightarrow{AB}$,是一矢量,它的量值 $|\Delta r|$ 就是割线 AB 的长度,而路程是一标量,就是曲线 AB 的长度 Δs . Δs 和 $|\Delta r|$ 并不相等.只有在时间 Δt 趋近于零时, Δs 与 $|\Delta r|$ 才可看作相等.即使在直线运动中,位移和路程也是截然不同的两个概念.例如,一质点沿直线从 A 点到 B 点又折回 A 点,显然路程等于 A 、 B 之间距离的两倍,而位移则为零.

3. 速度

当质点在时间 Δt 内,完成了位移 Δr 时,为了表示运动在这段时间内的快慢程度,我们把质点的位移 Δr 与相应的时间 Δt 的比值,叫做质点在这段时间 Δt 内的平均速度:

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1-3)$$

这就是说,平均速度是在相应的时间 Δt 内位移对时间的比值,平均速度的方向与位移 Δr 的方向相同.在描述质点运动时,我们也常采用“速率”这个物理量.我们把路程 Δs 与时间 Δt 的比值 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 叫做质点在时间 Δt 内的平均速率.这就是说,平均速率是一标量,等于质点在单位时间内所通过的路程,而不考虑运动的方向.因此,

不能把平均速率与平均速度等同起来. 例如, 在某一段时间内, 质点环行了一个闭合路径, 显然质点的位移等于零, 所以平均速度也为零, 而平均速率却不等于零.

要确定质点在某一时刻 t (或某一位置) 的瞬时速度 (以下简称速度, 应使时间 Δt 无限地减小而趋近于零, 以平均速度的极限来表述, 用数学式表示便是

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

(1-4)

就是说, 速度等于位矢 $\mathbf{r}$ 对时间 t 的一阶导数. 瞬时速度表明质点在 t 时刻附近无限短的一段时间内位移对时间的比值, 亦即描述了质点位矢的瞬时变化率. 当 Δt 趋近于零时, $\Delta \mathbf{r}$ 的量值 $|\Delta \mathbf{r}|$ 就趋近于 Δs , 因此瞬时速度的大小 $v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 也就等于质点 P 在时刻 t 的瞬时速率 $\frac{ds}{dt}$.

速度是矢量. 速度的方向就是当 Δt 趋近于零时, 位移 $\Delta \mathbf{r}$ 的极限方向. 从图 1-6 可以看出, 位移 $\Delta \mathbf{r} = \overrightarrow{AB}$ 是沿着割线 AB 的方向. 当 Δt 逐渐减小而趋近于零时, B 点逐渐趋近于 A 点, 相应地, 割线 AB 逐渐趋近于 A 点的切线. 所以质点的速度方向, 是沿着轨迹上质点所在点的切线方向并指向质点前进的一侧.

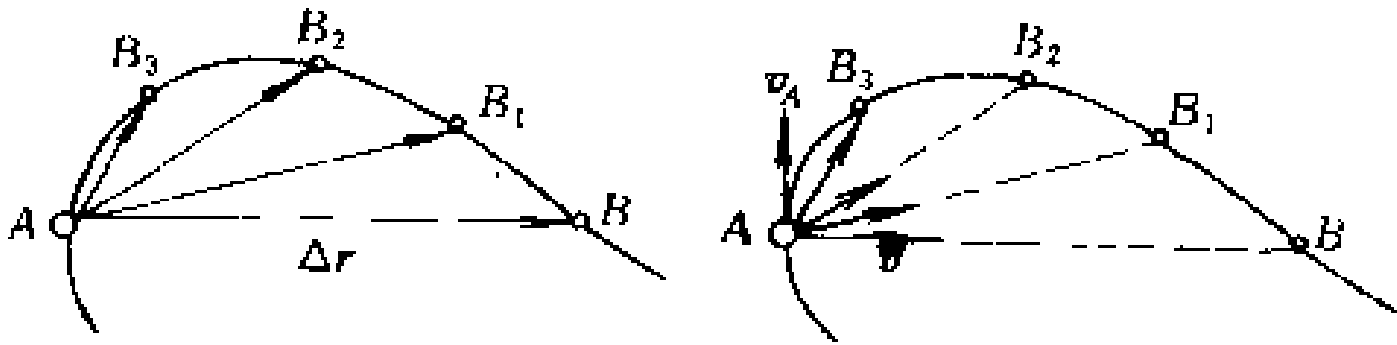


图 1-6 质点在轨道上 A 点处的速度的方向

速度 $\mathbf{v}$ 既是位矢 $\mathbf{r}$ 对时间的导数, 而位矢 $\mathbf{r}$ 在直角坐标轴上的分量为 x, y, z , 所以速度的三个分量 v_x, v_y, v_z 分别是

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1-5}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 可写作

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \quad (1-6)$$

而速度的量值为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1-7)$$

4. 加速度

质点在轨迹上不同的位置,通常有着不同的速度.如图 1-7 所示,一质点在时刻 t 、位于 A 点时的速度为 $\boldsymbol{v}_A$,在时刻 $t + \Delta t$,位于 B 点时的速度为 $\boldsymbol{v}_B$.在时间 Δt 内,质点速度的增量为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$

这里要注意,在直线运动中, $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向和 $\boldsymbol{v}_A$ 的方向或者相同,或者相反,所以 $\Delta \boldsymbol{v}$ 实际上只反映质点速度在量值上有所变化;而在曲线运动中, $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向和 $\boldsymbol{v}_A$ 的方向并不一致, $\Delta \boldsymbol{v}$ 所描述的速度变化,包括速度方向的变化和速度量值的变化.

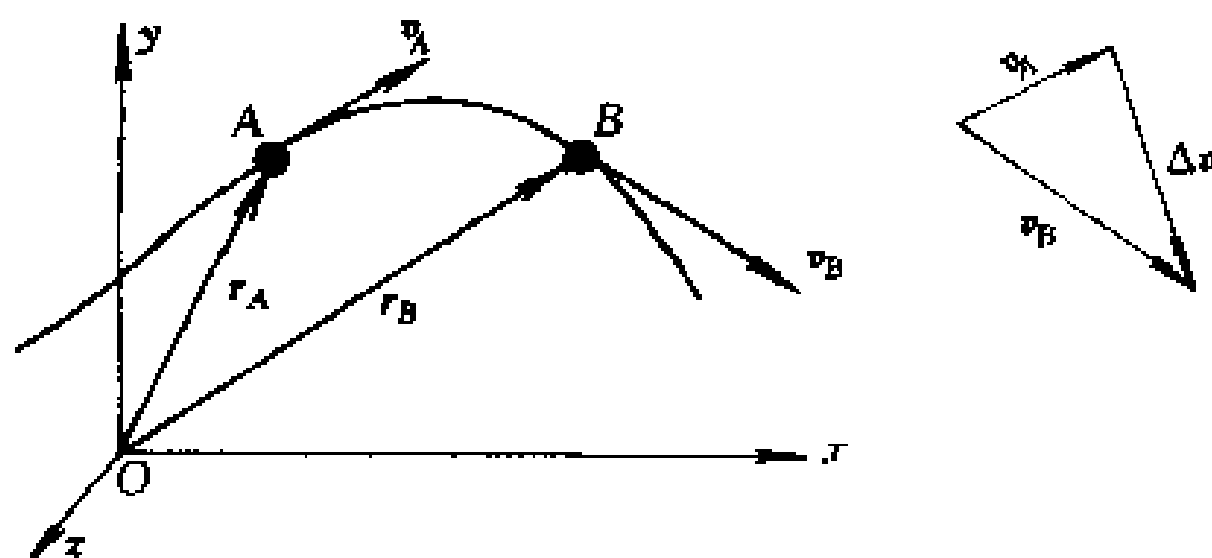


图 1-7 速度的增量

与平均速度的定义相类似,质点的平均加速度定义为

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

平均加速度只是描述在时间 Δt 内速度的平均变化率.为了精确地描述质点在任一时刻 t (或任一位置处)的速度的变化率,必须在平均加速度概念的基础上引入瞬时加速度的概念.瞬时加速度定义为

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}} \quad (1-8)$$

这就是说,质点在某时刻 t 或某位置的瞬时加速度(以下简称加速度)等于当时间 Δt 趋近于零时平均加速度的极限.瞬时加速度表明质点在 t 时刻附近无限短的一段时间内的速度变化率.从数学式上来说,加速度等于速度对时间的一阶导数,或等于位矢对时间的二阶导数.在直角坐标系中,加速度的三个分量 a_x 、 a_y 、 a_z 分别是

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1-9)$$

加速度 $\mathbf{a}$ 可写作

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-10)$$

而加速度的量值为

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1-11)$$

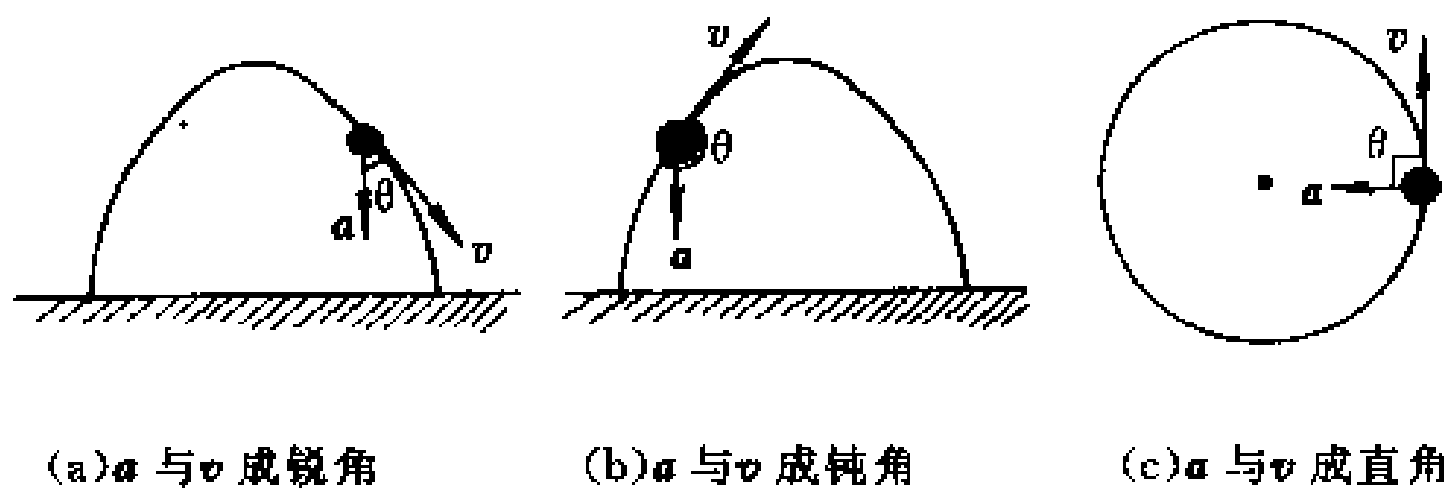
加速度是矢量.加速度的方向就是当 Δt 趋近于零时,速度增量 $\Delta \mathbf{v}$ 的极限方向.应该注意: $\Delta \mathbf{v}$ 的方向和它的极限方向一般不同于速度 $\mathbf{v}$ 的方向,因而加速度的方向一般与该时刻的速度方向不一致.例如,质点作直线运动时,如果速率是增加的[图 1-8(a)],那么 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 同向(夹角为 0°);反之,如果速率是减小的[图 1-8(b)],那么 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 反向(夹角为 180°).因此,在直线运动中,加速度和速度虽同在一直线上,也可以有同向或反向两种情况.质点作曲线运动时,加速度总是指向轨迹曲线凹的一边(参看图 1-9 和图 1-10).如果速率是增加的[图 1-9(a)],则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 成锐角;如果速率是减小的[图 1-9(b)],则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 成钝角;如果速率不变[图 1-9(c)],则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 成直角.行星绕太阳运动时的轨迹是一椭圆,如图 1-10 所示,太阳位于这椭圆的一个焦点上,行星的加速度 $\mathbf{a}$ 总是指向太阳的.在椭圆轨迹上,当行星从远日点向近日点运动时,行星的加速度 $\mathbf{a}$ 与它的速度 $\mathbf{v}$ 成锐角,行星的速率是增加的;当行星从近日点向远日点运动时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 成钝角,行星的速率是减小的.



(a) a 与 v 同向

(b) a 与 v 反向

图 1-8 直线运动中的加速度与速度的方向



(a) a 与 v 成锐角

(b) a 与 v 成钝角

(c) a 与 v 成直角

图 1-9 曲线运动中的加速度与速度的方向

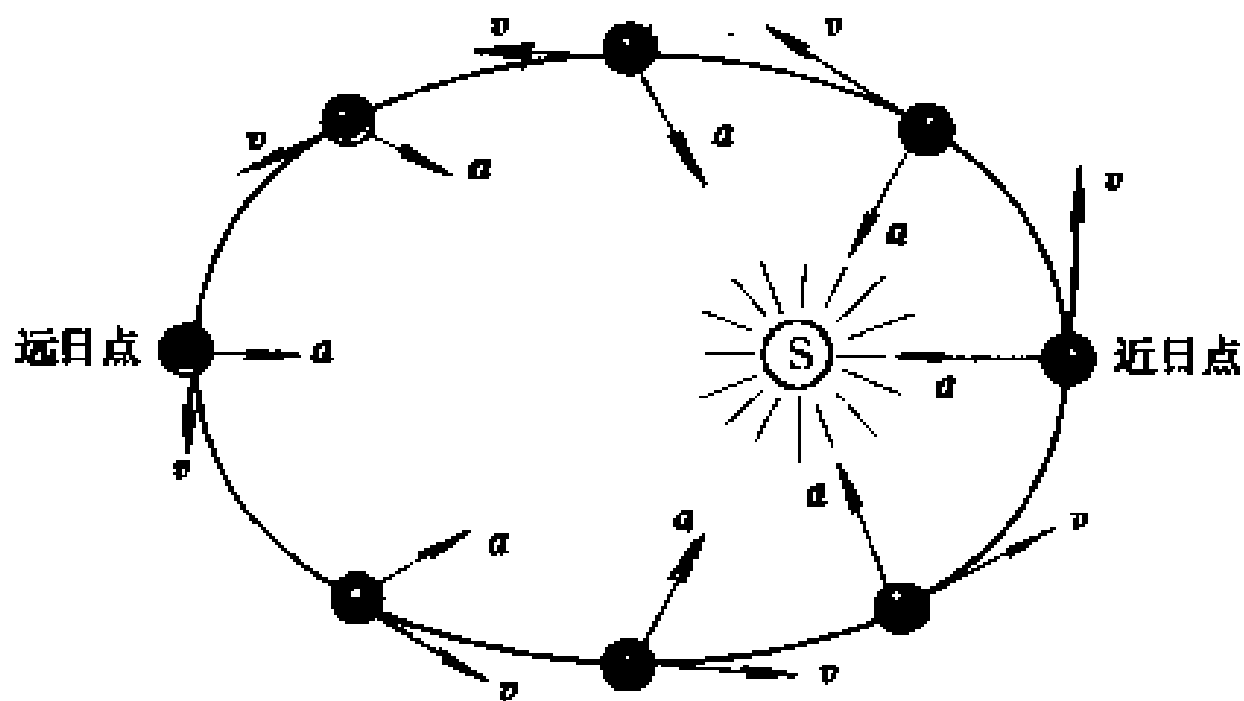


图 1-10 行星绕太阳运动时的加速度与速度的方向

例题 1-1 已知质点作匀加速直线运动, 加速度为 a , 求这质点的运动方程.

解 由定义 $a = \frac{dv}{dt}$ 得

$$dv = a dt$$

因质点作匀加速直线运动, 上式可写成

$$dv = a dt$$

设 $t=0$ 时, $v=v_0$, 将上式两边积分:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt = a \int_0^t dt$$

由此得

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

又由定义

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at$$

设 $t=0$ 时, $x=x_0$, 由上式积分得运动方程:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)消去 t , 即得

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (3)$$

式(1)、(2)和(3)就是匀加速直线运动的公式.

§ 1-3 圆周运动及其描述

圆周运动是曲线运动的一个重要特例. 研究圆周运动以后, 再研究一般曲线运动, 也比较方便. 物体绕定轴转动时, 物体中每个质点作的都是圆周运动, 所以, 圆周运动又是研究物体转动的基础.

在一般圆周运动中, 质点速度的大小和方向都在改变着, 亦即存在着加速度. 为了使加速度的物理意义更为清晰, 通常在圆周运动的研究中, 都采用自然坐标.

1. 切向加速度和法向加速度

如图 1-11(a)所示, 设质点绕圆心 O 在作变速圆周运动. 在轨迹上任一点可建立如下坐标系, 其中一根坐标轴沿轨迹在该点 P

的切线方向,该方向单位矢量用 e_t 表示;另一坐标轴沿该点轨迹的法线并指向曲线凹侧,相应单位矢量用 e_n 表示,这种坐标系就叫做自然坐标系.显然,沿轨迹上各点,自然坐标轴的方位是不断地变化着的.

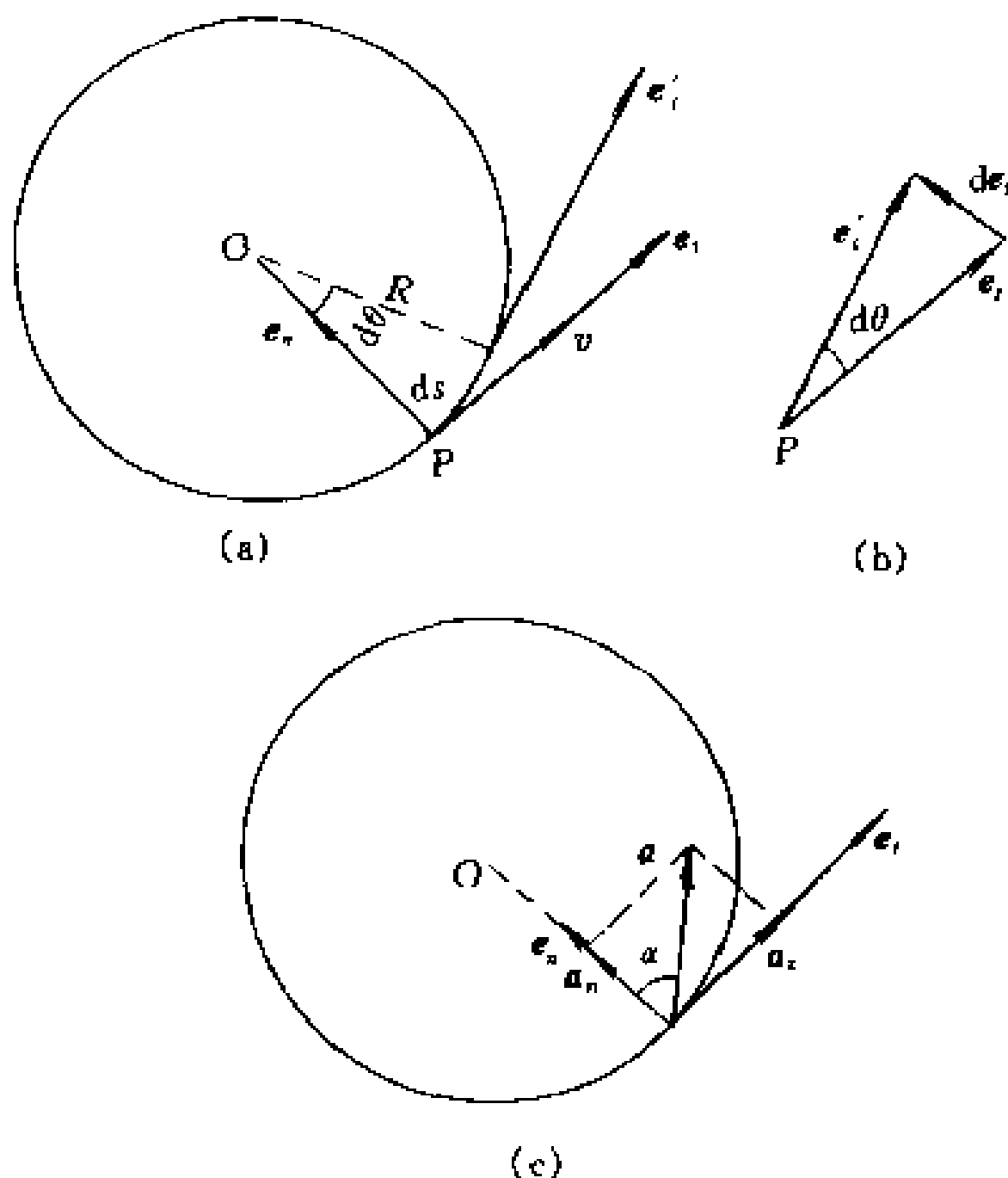


图 1-11 自然坐标系

质点的速度是沿着轨迹的切线方向的,因此,在自然坐标系中,可将它写成

$$v = ve_t$$

加速度 a 可由上式对时间求导数得出.应该注意,上式右方不仅速率 v 是变量,由于轨迹上各点的切线方向不同,其单位矢量 e_t 也是个变量.设在 dt 时间内 e_t 的增量为 de_t ,则由加速度的定义得

$$a = \frac{d}{dt}(ve_t) = \frac{dv}{dt}e_t + v \frac{de_t}{dt}$$

由图 1-11(b)可见, de_t 这个矢量的方向垂直于 e_t 并指向圆心,所

以,它和 e_n 的方向相一致. 因单位矢量 e_t 的长度为 1, 所以 de_t 的大小应为 $|e_t|d\theta=d\theta$, 于是 $de_t=d\theta e_n$, 因而

$$\frac{de_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt} e_n = \frac{d(R\dot{\theta})}{Rdt} e_n = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} e_n = \frac{v}{R} e_n$$

式中 ds 为质点在时间 dt 内经过的弧长. 将上式代入 a 的表达式, 即得

$$a = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{R} e_n \quad (1-12)$$

由此可见, 圆周运动的加速度可分解为相互正交的切向分量 a_t 和法向分量 a_n [图 1-11(c)]:

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1-13)$$

切向加速度的大小 dv/dt 表示质点速率变化的快慢, 法向加速度的大小 v^2/R 表示质点速度方向变化的快慢.

总加速度 a 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad (1-14a)$$

方向可用它和 e_n 间的夹角 α 表示:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_t}{a_n} \quad (1-14b)$$

如果质点作匀速圆周运动, 那么 $dv/dt=0$, 于是 $a_t=0$, 这时质点只有法向加速度 $a_n=v^2/R$, 即速度只改变方向而不改变大小.

应该指出, 以上有关变速圆周运动中加速度的讨论及其结果, 对任何平面上的曲线运动, 也都是适用的. 但要注意, 与圆周运动中的恒定半径 R 不同, 计算式中要用 ρ 代替 R , ρ 是曲线在该点处的曲率半径⁽¹⁾. 一般说来, 曲线上各点处的曲率中心和曲率半径是

(1) 以平面曲线为例, 作一圆通过平面曲线上的某一点 A 和邻近的另外两点 B_1 和 B_2 , 当 B_1 和 B_2 无限趋近 A 点时, 这圆的极限位置叫做曲线 A 点处的曲率圆. 曲率圆的中心和半径分别称为曲线在 A 点的曲率中心和曲率半径. 曲率半径愈小, 表示曲线弯曲愈甚.

逐点变化的,但法向加速度 a_n 处处指向曲率中心.

质点运动时,如果同时有法向加速度和切向加速度,那么速度的方向和大小将同时改变,这是一般曲线运动的特征.质点运动时,如果只有切向加速度,没有法向加速度,那么速度不改变方向只改变大小,这就是变速直线运动.如果只有法向加速度,没有切向加速度,那么速度只改变方向不改变大小,这就是匀速曲线运动.

2. 圆周运动的角量描述

质点作圆周运动时,也常用角位移、角速度和角加速度等角量来描述.

设一质点在平面 Oxy 内,绕原点 O 作圆周运动(图 1-12).如果在时刻 t ,质点在 A 点,半径 OA 与 x 轴成 θ 角, θ 角叫做角位置.在时刻 $t + \Delta t$,质点到达 B 点,半径 OB 与 x 轴成 $\theta + \Delta\theta$ 角.就是说,在 Δt 时间内,质点转过角度 $\Delta\theta$,这 $\Delta\theta$ 角叫做质点对 O 点的角位移.角位移不但有大小而且有转向.一般规定沿反时针转向的角位移取正值,沿顺时针转向的角位移取负值.

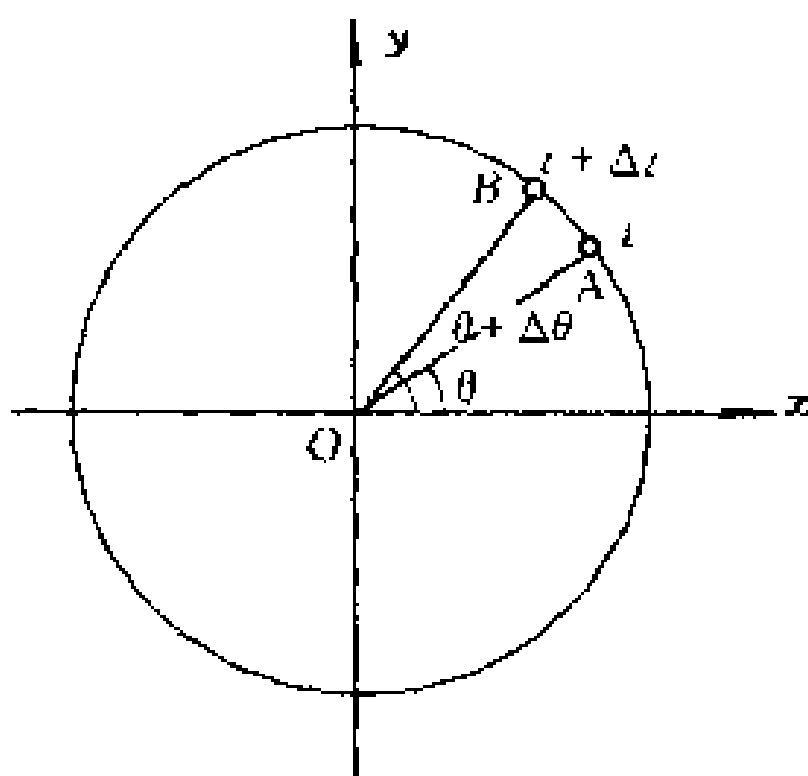


图 1-12 角位移

角位移 $\Delta\theta$ 与时间 Δt 之比,叫做在 Δt 这段时间内质点对 O 点的平均角速度,以 $\bar{\omega}$ 表示,即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

如果 Δt 趋近于零,相应的 $\Delta\theta$ 也趋近于零,而比值趋近于某一极限值

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-15)$$

ω 叫做某一时刻 t 质点对 O 点的瞬时角速度 (简称角速度), 也就是平均角速度的极限值.

设质点在某一时刻的角速度为 ω_0 , 经过时间 Δt 后, 角速度为 ω , 因此 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ 叫做在这段时间内角速度的增量. 角速度的增量 $\Delta\omega$ 与时间 Δt 之比, 叫做在 Δt 这段时间内质点对 O 点的平均角加速度, 用 $\bar{\alpha}$ 表示, 即

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

如果 Δt 趋近于零, 那么比值就趋近于某一极限值

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (1-16)$$

α 叫做在某一时刻, 质点对 O 点的瞬时角加速度 (简称角加速度), 也就是平均角加速度的极限值.

角位移的单位是 rad, 角速度和角加速度的单位分别为 1/s 和 1/s² 或 rad/s 和 rad/s².

质点作匀速圆周运动时, 角速度 ω 是常量, 角加速度 α 为零. 质点作变速圆周运动时, 角速度 ω 不是常量, 角加速度 α 也可能不是常量. 如果角加速度 α 为常量, 这就是匀变速圆周运动.

质点作匀速和匀变速圆周运动时, 用角量表示的运动方程与匀速和匀变速直线运动的运动方程完全相似. 匀速圆周运动的运动方程为

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad (1-17)$$

匀变速圆周运动的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

式中 θ 、 θ_0 、 ω 、 ω_0 和 α 分别表示角位置、初角位置、角速度、初角速

度和角加速度.

3. 线量和角量之间的关系

质点作圆周运动时,有关线量(速度、加速度)和角量(角速度、角加速度)之间,存在着一定的关系,其推导如下:

参看图 1-13,设圆的半径为 R ,在时间 Δt 内,质点的角位移为 $\Delta\theta$. 那么质点在这段时间内的线位移就是有向线段 $\overrightarrow{AB}$. 当 Δt 极小时,弦 $\overrightarrow{AB}$ 和弧 $\widehat{AB}$ 可视为等长,即

$$|\overrightarrow{AB}| = R\Delta\theta$$

以 Δt 除等式的两边,当 Δt 趋近于零时,按照速度和角速度的定义,得线速度和角速度之间的关系式

$$v = R\omega$$

(1-19)

设质点在时间 Δt 内,速率的增量是 $\Delta v = v - v_0$,相应的角速度的增量是 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$,因此按照上式得 $\Delta v = R\Delta\omega$. 以 Δt 除等式的两边,当 Δt 趋近于零时,按照切向加速度和角加速度的定义,得到质点切向加速度与角加速度之间的关系式

$$a_t = R\alpha$$

(1-20)

如果把 $v = R\omega$ 代入向心加速度的公式 $a_n = \frac{v^2}{R}$,可得质点向心加速度 a_n 与角速度 ω 之间的关系式

$$a_n = \frac{v^2}{R} = v\omega = R\omega^2$$

(1-21)

例题 1-2 试计算地球自转时地面上各点的速度和加速度.

解 地球自转的周期 $T = 1 \text{ d} = 24 \times 60 \times 60 \text{ s}$,所以地球自转的角速度为

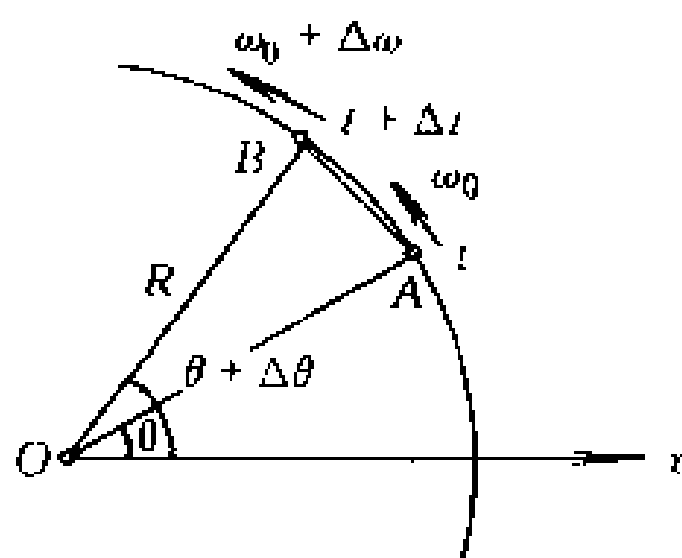


图 1-13 推导线量和角量之间的关系

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \text{s}^{-1} = 7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$$

设地面上 P 点处的纬度为 φ , 如图 1-14 所示, P 点是在与赤道平行的平面内作圆周运动, 该圆的半径 $R' = R \cos \varphi$, 这里 R 是地球半径 ($\approx 6370 \text{ km}$). P 点的速度和向心加速度分别为

$$\begin{aligned} v &= \omega R' = \omega R \cos \varphi \\ &= 7.27 \times 10^{-5} \times 6.37 \\ &\quad \times 10^6 \times \cos \varphi \text{ m/s} \\ &= 4.65 \times 10^2 \cos \varphi \text{ m/s} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} a_n &= \omega^2 R' = \omega^2 R \cos \varphi \\ &= (7.27 \times 10^{-5})^2 \\ &\quad \times 6.37 \times 10^6 \cos \varphi \text{ m/s}^2 \\ &= 3.37 \times 10^{-2} \cos \varphi \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

已知北京、上海和广州三地的纬度是北纬 $39^\circ 57'$ 、 $31^\circ 12'$ 和 $23^\circ 00'$, 可算出三地的 v 和 a_n 分别为

$$\text{北京: } v = 356 \text{ m/s}, \quad a_n = 2.58 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$\text{上海: } v = 398 \text{ m/s}, \quad a_n = 2.89 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$\text{广州: } v = 428 \text{ m/s}, \quad a_n = 3.10 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

例题 1-3 一飞轮边缘上一点所经过的路程与时间的关系为 $s = v_0 t + bt^2/2$, v_0 、 b 都是正的常量. (1) 求该点在时刻 t 的加速度. (2) t 为何值时, 该点的切向加速度与法向加速度的大小相等? 已知飞轮的半径为 R .

解 (1) 由题意, 可得该点的速率为

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v_0 t + \frac{1}{2} b t^2 \right) \\ &= v_0 + b t \end{aligned}$$

上式表明, 速率随时间 t 而变化, 该点作匀变速圆周运动.

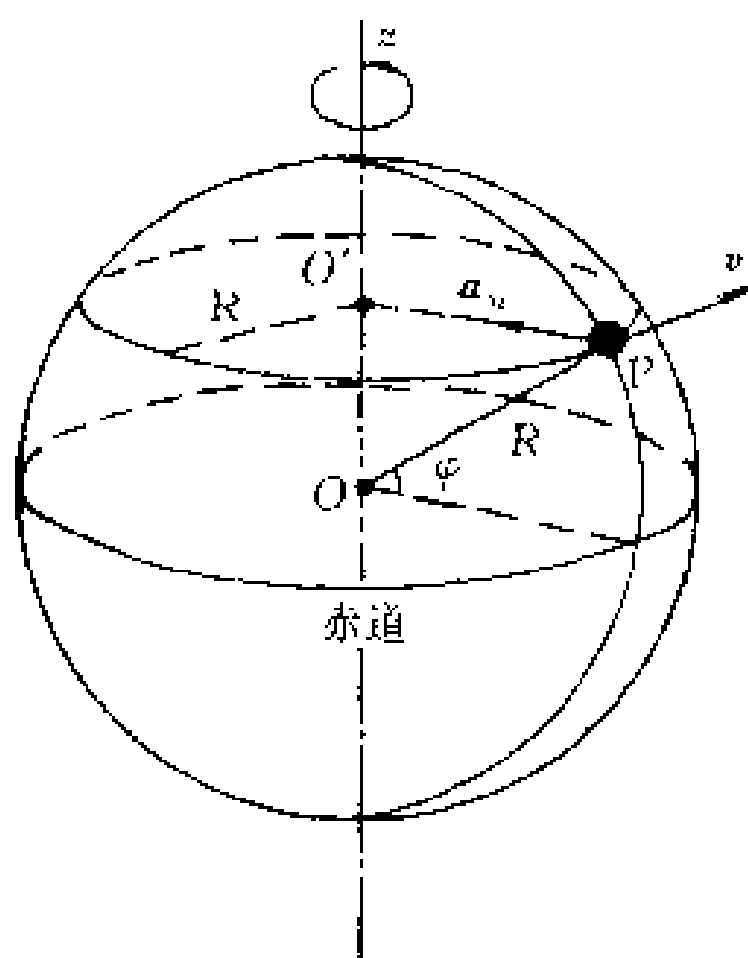


图 1-14 地球表面上某点(纬度 φ 处)的速度和加速度

为了求该点的加速度,应从求切向加速度和法向加速度入手.切向加速度为

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(v_0 - bt) \\ &= -b \end{aligned}$$

法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

上式表明,加速度的法向分量 a_n 是随时间 t 改变的.由上两式可得该点在 t 时刻的加速度,其大小为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\ &= \sqrt{(-b)^2 + \left[\frac{(v_0 - bt)^2}{R} \right]^2} \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4} \end{aligned}$$

加速度的方向,由它和速度间的夹角确定(图 1-15)为

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{(v_0 - bt)^2}{-Rb} \right]$$

加速度矢量已标在图上.

(2) 因切向加速度不随时间而变,随时间而改变的只是法向加速度,令两者相等,即可求得所需时间.即

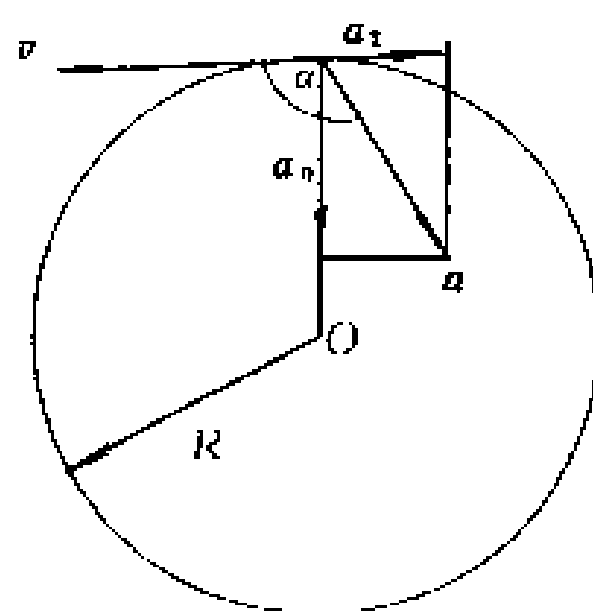


图 1-15 例题 1-3 图

$$b = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

$$\sqrt{bR} = (v_0 - bt)$$

于是得

$$t = (v_0 - \sqrt{bR})/b$$

例题 1-4 如图 1-16(a)所示为一曲柄连杆机构,曲柄 OA 长为 r ,连杆 AB 长为 l . AB 的一端用销子在 A 处与曲柄 OA 相连,另一端以销子在 B 处与活塞相连.当曲柄以匀角速 ω 绕轴 O 旋转时,通过连杆将带动 B 处活塞在汽缸内往复运动,试求活塞的运动方程.

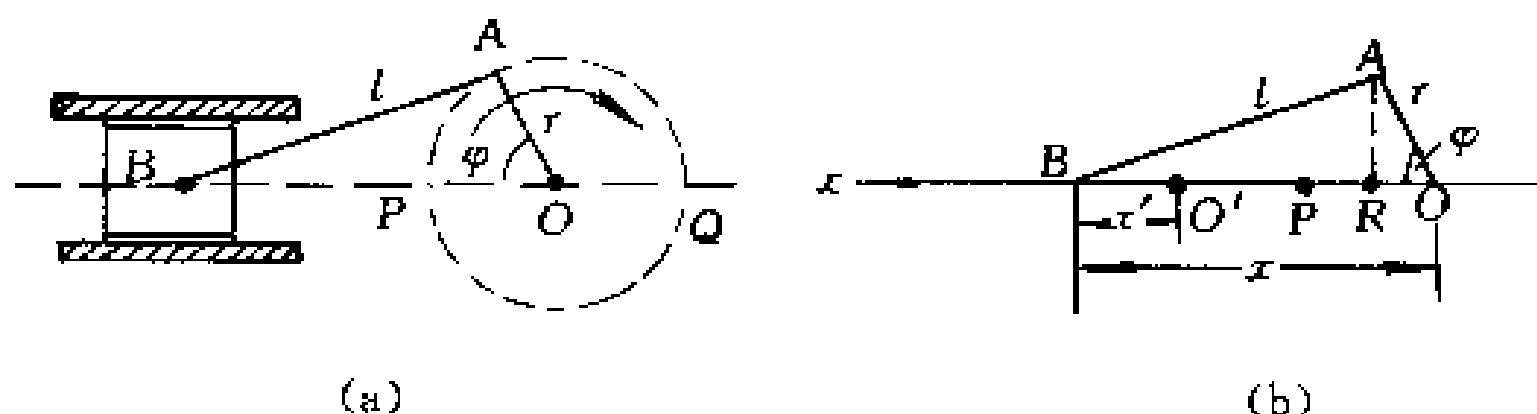


图 1-16 曲柄连杆机构

解 取 O 为原点, x 轴水平向左, 见图 1-16(b); 并设开始时, 曲柄 A 端在 x 轴上的 P 点. 当曲柄以匀角速 ω 转动时, 在 t 时刻曲柄转角为 $\varphi = \omega t$, 这时 B 处活塞的位置为 $x = OR + RB$, 即

$$x = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}$$

这就是活塞的运动方程.

我们把上式右端第 2 项按二项式定理展开为级数:

$$\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t} = l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t + \dots \right]$$

一般 $r/l < 1/3.5$, 因此高阶小量可以略去, 又因 $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$, 于是, 经整理得

$$x = l \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] + r \cos \omega t + \frac{1}{4} l \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos 2\omega t$$

令 $x' = x - l \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]$, 即将坐标原点从 O 点移到坐标为 $l[1 - (r/l)^2/4]$ 的 O' 点, 最后得活塞以 O' 为原点、以 x' 为位移的运动方程为

$$x' = r \cos \omega t + \frac{l}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos 2\omega t$$

§ 1-4 曲线运动方程的矢量形式

在上节中, 我们介绍了描述圆周运动的两种方法, 即自然坐标法和角量描述法. 由于机械运动的矢量性, 圆周运动以至一般曲线运动还可利用矢量法描述. 通过曲线运动方程的矢量形式, 将使我们深化对机械运动矢量性的认识, 并从中了解运动方程矢量形式的多样性.

质点在空间所作的曲线运动与质点的直线运动相比, 一般要复杂些. 但是, 根据运动的矢量性, 我们可以把曲线运动看作是三个相互垂直的分运动的叠加, 联系到质点运动的矢量描述, 在数学处理上, 也以用矢量方法最为方便. 下面将分别介绍圆周运动和抛体运动的矢量描述法.

1. 圆周运动方程的矢量形式

我们知道, 在直角坐标系中, 质点的位置由位矢 r 表示, 位矢沿坐标轴的三个分量就是该位置的坐标 x, y, z . 在质点运动时, 它的位矢 r 和坐标 x, y, z 都随时间而变化, 这就是说, 这些量都应该是 t 的函数. 因此, 质点的运动方程是

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

或者

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

这后一形式是运动方程的矢量形式, 它与前一形式(分量式)是等

效的,它们的等效性表明,后者所描述的运动可看作由前者所描述
的三个相互垂直的分运动叠加而成.

当质点在 xy 平面内作圆周运动时,它的运动方程为

$$x = R\sin\omega t, \quad y = R\cos\omega t, \quad z = 0$$

或写成

$$\mathbf{r} = R(\sin\omega t \mathbf{i} + \cos\omega t \mathbf{j})$$

式中 t 以 s 计, x, y, z 以 m 计. 怎么知道该质点作的是圆周运动
呢? 当我们从 x, y 两式中消去 t 后, 得

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0$$

显然, 这个轨迹方程表明质点是在 $z=0$ 的平面(即 xy 平面)内, 作
以原点为中心、半径为 R 的圆周运动.

知道了质点的运动方程, 我们不仅可求出质点的运动轨迹, 还
可求出质点的速度和加速度. 对上述圆周运动, 利用式(1-5)可得
速度的分量为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R\sin\omega t) = R\omega\cos\omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\omega t) = -R\omega\sin\omega t$$

应该指出, 我们在 § 1-2 中通过对时间求导数找到了瞬时速度和
瞬时加速度的恰当的数学表式 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 和 $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, 但描述机械运动的瞬时
性, 单靠这些表式是不够的, 我们还必须了解速度和加速度是怎样
随时间而变化的, 亦即我们还必须了解速度和加速度是 t 的什么
函数. 上面两式告诉我们, 质点在圆周运动中, 它的分速度 v_x 和 v_y
分别是时间的余弦或正弦函数. 从这些分速度, 求得质点在任一时
刻的速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

上式表明, 速度的大小是个常量, 所以, 质点是作匀速圆周运动的.
上述关系已在式(1-19)中见到过.

加速度是位矢对 t 的二阶导数,也是速度对 t 的一阶导数. 质点作圆周运动,其加速度的分量为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \sin\omega t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \cos\omega t$$

任一时刻加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

它也是个常量,并与式(1-21)相一致.

如果我们把加速度 $\mathbf{a}$ 写成式(1-10)的矢量形式,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (-R\omega^2 \sin\omega t)\mathbf{i} + (-R\omega^2 \cos\omega t)\mathbf{j} \\ &= -\omega^2 [(R\sin\omega t)\mathbf{i} + (R\cos\omega t)\mathbf{j}] \\ &= -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned}$$

式中负号表明:在上述匀速圆周运动中,质点加速度的方向总是与位矢的方向相反的,也即加速度的方向始终指向圆心,因此,在匀速圆周运动中的加速度是个向心加速度.

2. 抛体运动方程的矢量形式

从地面上某点向空中抛出一物体,它在空中的运动就叫抛体运动. 抛体运动是一种平面曲线运动.

在研究抛体运动时,通常都取抛射点为坐标原点,而沿水平方向和竖直方向分别引 x 轴和 y 轴(图 1-17). 从抛出时刻开始计时,则 $t=0$ 时,物体位于原点. 以 $\mathbf{v}_0$ 表示物体的初速度,以 θ 表示抛射角,则 $\mathbf{v}_0$ 在 x 轴和 y 轴上的分量为

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

物体在整个运动过程中的加速度为

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j} \quad (1-22)$$

利用这些条件,可求出物体在空中任意时刻的速度为

$$\mathbf{v} = (v_0 \cos\theta)\mathbf{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\mathbf{j} \quad (1-23)$$

因 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, 由此可得物体的运动方程为

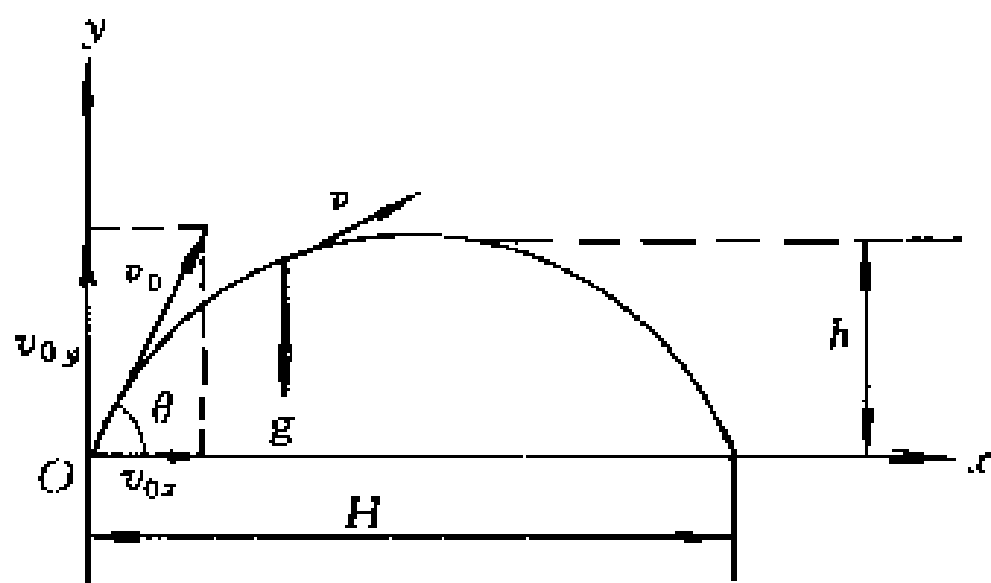


图 1-17

$$\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v} dt = (v_0 t \cos \theta) \mathbf{i} + \left(v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \mathbf{j} \quad (1-24)$$

上式就是抛体运动方程的矢量形式,它清楚地表明:抛体运动是由沿 x 轴的匀速直线运动和沿 y 轴的匀变速直线运动叠加而成的.通常对“抛体运动”就是这样理解的.在图 1-18 中,以位矢 $\mathbf{r}$ 为对角线的一个矩形把这种矢量叠加显示了出来.

对任何一个矢量,有着许多种分解方法,同样也存在着多种多样的叠加方法.在图 1-18 中,画出了以位矢 $\mathbf{r}$ 为一边的三角形叠

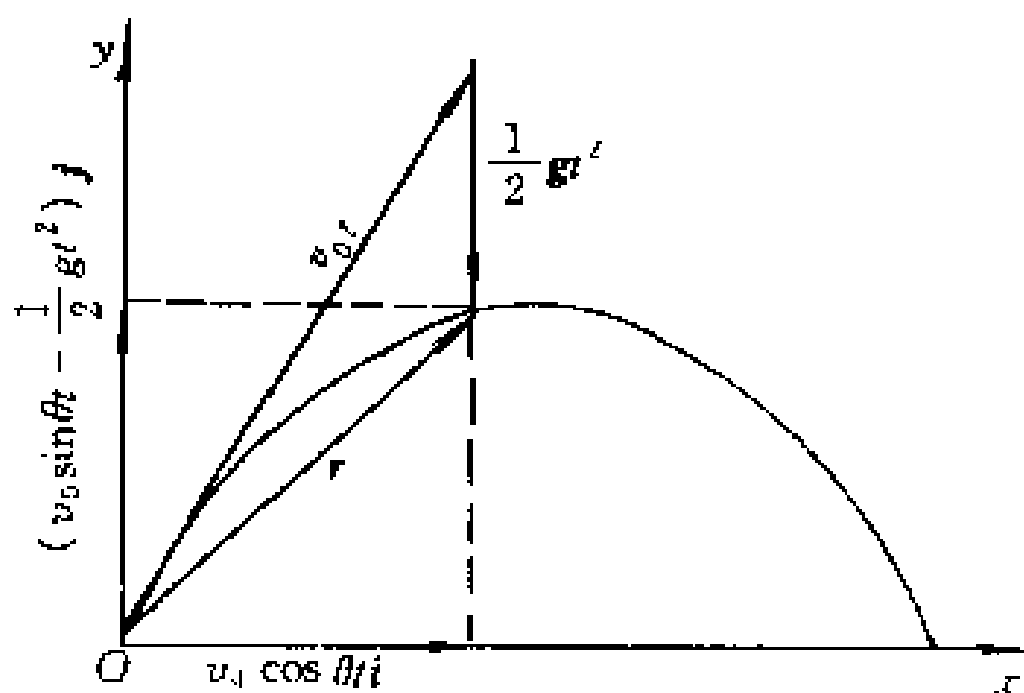


图 1-18

加法.为了看出这点,我们把式(1-24)重新改写如下:

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos \theta \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}) t - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{j}$$

上式中括号内的矢量和就是初速度 $\boldsymbol{v}_0$,而重力加速度 g 的方向恰好和 j 相反;如果不用 i 和 j ,而改用矢量 $\boldsymbol{v}_0$ 和 g ,则上式可写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1-25)$$

这正是图 1-18 所表示的内容. 这就是说, 抛体运动还可看作由沿初速度方向的匀速直线运动和沿竖直方向的自由落体运动叠加而成. 抛体运动的这种叠加性, 可用枪打落猴的古老演示来验证. 当猎人举枪瞄准树上的猴子射击时, 猴子一见火光就自由下落, 猴子以为离开瞄准方向就能逃脱厄运, 却不知枪弹作的是抛体运动, 枪弹和猴子在竖直方向因重力加速度而引起的位移同样都是 $\frac{1}{2} g t^2$. 只要枪到猴子的水平距离不太远, 枪弹的初速不太小, 这只猴子将在劫难逃. 这种矢量叠加的多样性使人们的视野更为扩大.

总之, 上述讨论告诉我们, 对一般曲线运动的研究都可归结为对直线运动的研究. 由此可见, 直线运动研究的重要性和基本性.

由式(1-24)的两个分量式中消去 t , 即得抛体的轨迹方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (1-26)$$

这是一条抛物线, 所以抛体运动又叫抛物线运动. 令上式中 $y=0$, 求得抛物线与 x 轴的一个交点的坐标为

$$H = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (1-27)$$

这就是抛体的射程. 显然, 具有一定初速 v_0 的物体, 要想射得最远, 可令 $\sin 2\theta=1$, 亦即在 $\theta=45^\circ$ 时, 射程为最大.

根据高等数学中求函数极值的方法, 将式(1-26)对 x 求导, 并令 $dy/dx=0$, 由此得 $x=v_0^2 \sin 2\theta / 2g$; 将它代入式(1-26), 即得物体在飞行中所能达到的最大高度为

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (1-28)$$

应该指出,上述一些式子只在初速比较小的情况下才比较符合实际.初速大了,空气阻力不能忽略,实际飞行的曲线与抛物线将有很大差别.例如,以 $550\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的初速沿 45° 抛射角射出的子弹,按上式计算,射程应达 30000m 以上,但实际射程还不到前者的 $1/3$,只有 8500m .在弹道学中,除以上述式子为基础外,还要考虑空气阻力、风向、风速等的影响加以修正,才能得到抛体运动的正确结果.

§ 1-5 运动描述的相对性 伽利略坐标变换

运动描述的相对性表明,只有相对于确定的参考系,才能对运动进行量度.换句话说,要了解质点是运动还是静止,只有对确定的参考系才有意义.描述质点运动的许多物理量如位矢、速度和加速度,都具有这种相对性.例如,在无风的下雨天,一位坐在车内的旅客,他所看到的雨滴速度是随车辆运行情况的不同而变的.当车辆静止时,他看到雨滴在竖直地下落.当车辆运动时,他看到雨滴沿斜线迎面而来,车速愈快,他看到雨滴速度倾斜愈甚.我们不禁要问,车辆静止时车内旅客所看到的雨滴速度 $\boldsymbol{v}_K$ 与车辆运动时他所看到的雨滴速度 $\boldsymbol{v}_{K'}$ 之间究竟有没有关系呢?因为运动学的物理量都是从空间和时间导出的,所以,要解决上述速度的相对性问题,首先应弄清楚在两个不同的参考系之间空间和时间的关系.在本节中,我们将从伽利略(Galileo Galilei)坐标变换入手,分别介绍速度变换和加速度变换.

1. 伽利略坐标变换式

设有两个参考系相应的坐标系 K 和 K' ($Oxyz$ 和 $O'x'y'z'$),各对应轴互相平行,其中 x 轴与 x' 轴重合,它们相对作匀速直线

运动. 如取坐标系 K 为基本坐标系, 坐标系 K' 相对于 K 的速度是 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$ 的方向沿 x 轴, 坐标系 K' 就是个运动坐标系. 以 O 和 O' 重合的时刻作为计算时间的起点, 如图 1-19 所示. 我们要找出同一质点 P 在 K 系和 K' 系内的坐标变换公式. 设质点 P 在 K 和 K' 系中的位矢分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$, 并以 $\boldsymbol{R}$ 代表 K' 系原点 O' 对 K 系原点 O 的位矢. 从图中可见,

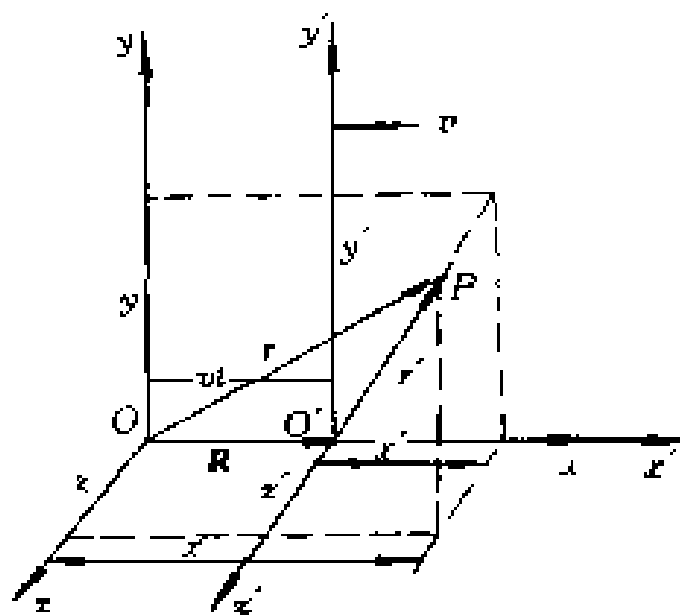


图 1-19 伽利略坐标变换

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$$

上式似乎一看就明白, 非常简单, 其实式子的成立是有条件的.

先从 K 系讨论, 它认为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是自己观测的值, 而 $\boldsymbol{r}'$ 是 K' 系的观测值. 在矢量相加时, 各个矢量必须由同一坐标系来测定. 所以, 只有 K 系观测得 $\overrightarrow{O'P}$ 的矢量值确实与 $\boldsymbol{r}'$ 相同, 对 K 系才有 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$. 由此可见, 上式成立的条件是: 空间两点的距离不管从哪个坐标系测量, 结果都应相同. 这一结论叫做空间绝对性.

其次, 运动的研究, 不仅涉及空间, 还要涉及时间. 同一运动所经历的时间, 由 K 系观测为 t , 由 K' 系观测为 t' , 日常经验告诉我们, 二者是相同的, 即

$$t = t'$$

这表明时间与坐标系无关, 这个结论叫做时间绝对性. 因此, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}t = \boldsymbol{v}t'$.

上述关于时间和空间的两个结论构成了经典力学的绝对时空观, 这种观点是和大量日常经验相符合的.

综上所述, 质点 P 在 K' 系中的空间坐标 (x', y', z') 、时间坐标 t' 与 K 系中的空间坐标 (x, y, z) 、时间坐标 t 之间的关系式为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

或者写成

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

两个坐标系间的这些关系式叫做伽利略坐标变换式。

2. 速度变换

让我们回到雨滴的运动上来。设在某时刻 t ，雨滴 A 相对于 K 系（静止的车辆）的速度为 v_K ，相对于 K' 系（运动的车辆）的速度为 $v_{K'}$ （图 1-20）。我们可从伽利略变换求得 v_K 和 $v_{K'}$ 的关系。

因 $t=t'$ ，所以下面不再区分它们，都用 t 表示。将式 (1-30) 中

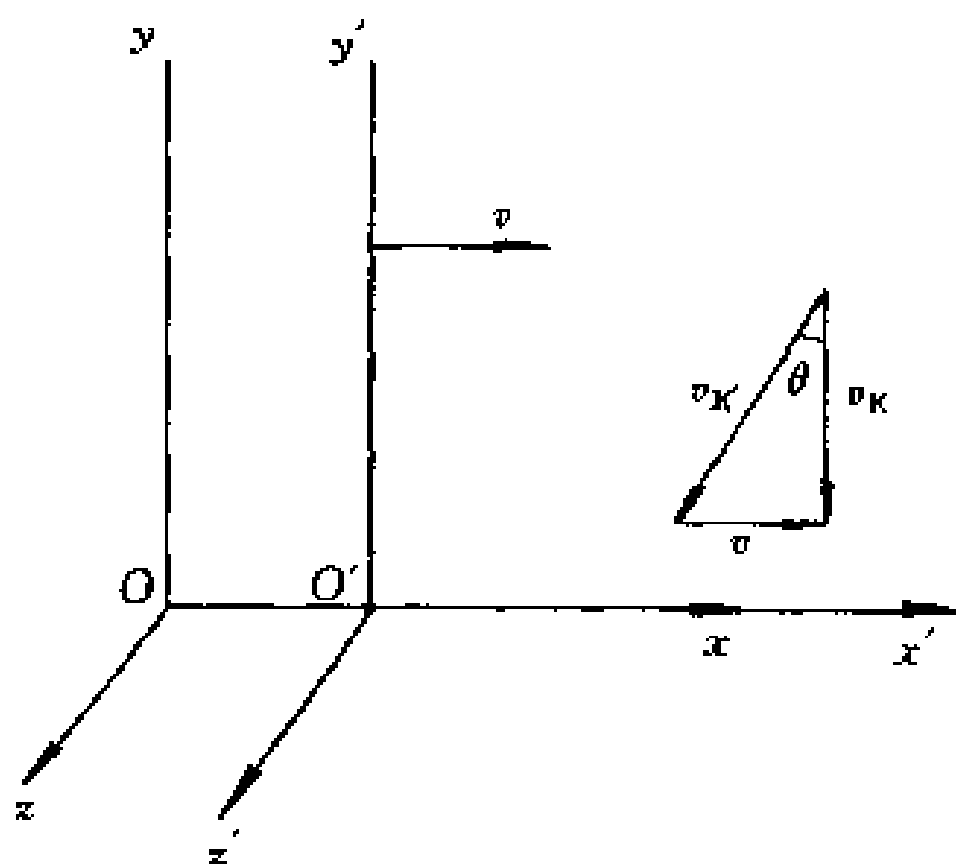


图 1-20 伽利略速度变换

的前三式对 t 求导数，得

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

亦即

$$v_{K'x} = v_{Kx} - v$$

$$v_{K'y} = v_{Ky}$$

$$v_{K'z} = v_{Kz}$$

以上这些式子可写成下列矢量式:

$$\boldsymbol{v}_K = \boldsymbol{v}_{K'} + \boldsymbol{v} \quad (1-31)$$

式(1-31)也可直接从式(1-29)中第一式对 t 求导数而得出. 它表明: 当 K' 系相对于 K 系作匀速直线运动时, 质点 A 相对于 K 系的速度 $\boldsymbol{v}_K$ 等于它相对于 K' 系的速度 $\boldsymbol{v}_{K'}$ 与 K' 系相对于 K 系的速度 $\boldsymbol{v}$ 的矢量和. 这就是经典力学的速度变换定理. 习惯上, 常把 A 对 K 的速度 $\boldsymbol{v}_K$ 写成 $\boldsymbol{v}_{AK}$, A 对 K' 的速度 $\boldsymbol{v}_{K'}$ 写成 $\boldsymbol{v}_{AK'}$, 而把 K' 对 K 的速度 $\boldsymbol{v}$ 写成 $\boldsymbol{v}_{K'K}$, 注意脚标的顺序, 于是, 式(1-31)就可改写为一种便于记忆的形式:

$$\boldsymbol{v}_{AK} = \boldsymbol{v}_{AK'} + \boldsymbol{v}_{K'K}$$

(1-32)

把式(1-31)用之于雨滴, 已知 $\boldsymbol{v}_K$ 是垂直于地面的, 而 $\boldsymbol{v}$ 则在水平方向上, 由图 1-20 可见, 雨滴与竖直方向的夹角 θ 可由下式求出:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{v_K} \quad (1-33)$$

如果在运动车辆中的旅客测得雨滴的偏角满足上式, 这无疑是给经典力学的时空观提供了实验基础. 实践表明, 对雨滴这类低速运动, 式(1-31)和式(1-33)是成立的, 但对于高速现象, 它们就失效了. 对于高速现象, 只有确立了相对论时空观才能解决.

3. 加速度变换

根据速度变换定理, 我们还可求得加速度的变换公式. 设 K' 系相对于 K 系作匀加速直线运动, 加速度为 $\boldsymbol{a}_0$, 沿 x 轴方向, 并在

$t=0$ 时, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$, 则 K' 系相对于 K 系的速度是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}_0t$. 因此, 由式(1-31)对 t 求导数, 即得

$$\frac{d\boldsymbol{v}_K}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_{K'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

亦即

$$\boldsymbol{a}_K = \boldsymbol{a}_{K'} + \boldsymbol{a}_0 \quad (1-34)$$

这就是说, 对于相对以匀加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 运动的两个参考系, 质点对它们的加速度 $\boldsymbol{a}_K$ 与 $\boldsymbol{a}_{K'}$ 之间满足矢量叠加的关系. 如果 K' 系相对于 K 系作匀速直线运动, 则 $\boldsymbol{a}_0=0$, 上式成为 $\boldsymbol{a}_K=\boldsymbol{a}_{K'}$, 它表明质点的加速度对于相对作匀速运动的各个参考系是个绝对量.

例题 1-5 某人以 4 km/h 的速度向东行进时, 感觉风从正北吹来. 如果将速度增加一倍, 则感觉风从东北方向吹来. 求相对于地面的风速和风向.

解 由题意, 以地面为基本参考系 K , 人为运动参考系 K' , $\boldsymbol{v}_{AK}$ 为所要求的风相对于地面的速度. 在两种情况下, K' 系(人)相对于 K 系(地面)的速度分别为 $\boldsymbol{v}_{K'K}$ 和 $\boldsymbol{v}'_{K'K}$, 方向都为正东(见图 1-21); 而风相对于 K' 系(人)的速度分别为 $\boldsymbol{v}_{AK'}$ (方向为正北)和 $\boldsymbol{v}'_{AK'}$ (方向为东北). 由式(1-32)得

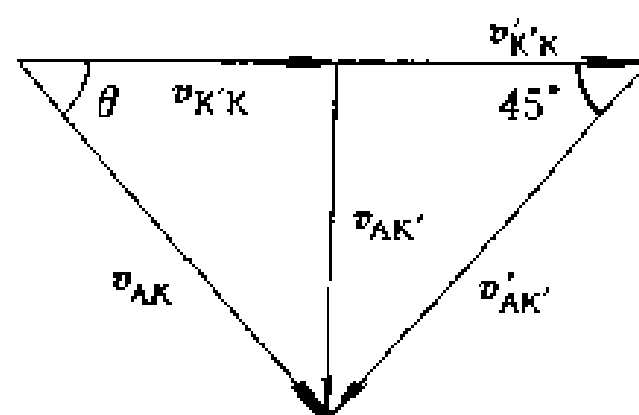


图 1-21 例题 1-5 图

$$\boldsymbol{v}_{AK} = \boldsymbol{v}_{AK'} + \boldsymbol{v}_{K'K}$$

$$\boldsymbol{v}_{AK} = \boldsymbol{v}'_{AK'} + \boldsymbol{v}'_{K'K}$$

如图 1-21 所示, 可写出如下关系:

$$\begin{aligned} v_{K'K} &= v'_{K'K} - v'_{AK'} \cos 45^\circ \\ &= 2v_{K'K} - \frac{1}{\sqrt{2}} v'_{AK'} \\ &= v_{AK} \cos \theta \end{aligned}$$

$$v_{AK'} = v_{AK'} \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{AK'}$$

$$= v_{AK} \sin \theta$$

由此解得

$$v_{AK'} = (2v_{K'K} - v_{K'K}) \sqrt{2} = \sqrt{2} v_{K'K}$$

$$= 5.66 \text{ km/h}$$

$$v_{AK} = \sqrt{2} v_{AK'} = 4 \text{ km/h}$$

以及

$$v_{AK} = \sqrt{v_{K'K}^2 + v_{AK'}^2} = 5.66 \text{ km/h}$$

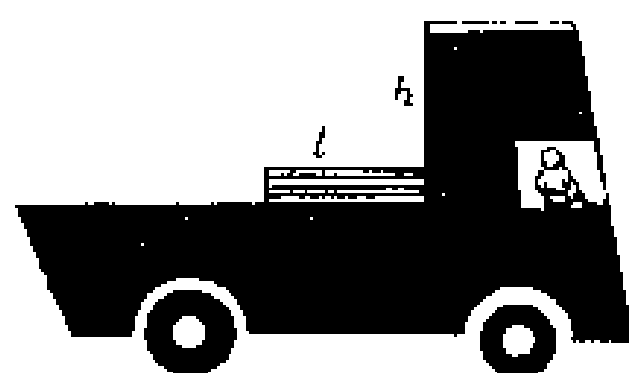
因为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{AK'}}{v_{K'K}} = 1$$

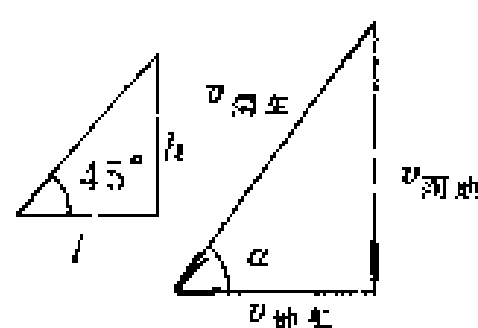
$$\text{所以} \quad \theta = 45^\circ$$

即风速的方向为向东偏南 45° , 亦即在东南方向上.

例题 1-6 一货车在行驶过程中, 遇到 5 m/s 竖直下落的大雨, 车上紧靠挡板平放有长为 $l = 1 \text{ m}$ 的木板 [如图 1-22(a)]. 如果木板上表面距挡板最高端的距离 $h = 1 \text{ m}$, 问货车应以多大的速度行驶, 才能使木板不致淋雨?



(a)



(b)

图 1-22 例题 1-6 图

解 由题意, 为使木板不致淋湿, 则雨滴对货车的速度 $v_{雨车}$ 的方向与地面的夹角 α 必须满足下式:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{l} = 45^\circ$$

而在货车行驶时,它对地面的速度 $v_{车地}$ 和雨滴对地面的速度 $v_{雨地}$ 以及 $v_{雨车}$ 三者的关系如图 1-22(b)所示.因 $v_{雨地}=5\text{ m/s}$,所以

$$v_{地车} = v_{雨地} \operatorname{ctg} \alpha = 5\text{ m/s}$$

$v_{地车}$ 和 $v_{车地}$ 大小相等而方向相反,所以货车如以 5 m/s 的速度行驶,木板就不致淋雨了.

例题 1-7 升降机以加速度 1.22 m/s^2 上升,当上升速度为 2.44 m/s 时,有一螺帽自升降机的天花板上松落,天花板与升降机的底面相距 2.74 m . 计算螺帽从天花板落到底面所需的时间和螺帽相对于升降机外固定柱的下降距离.

解 求解这类问题时,通常把螺帽相对机外固定柱子的运动分成上升和下落两个阶段分别处理.事实上,考虑到运动的矢量性,选定坐标系后,就可列出运动沿坐标轴方向的方程,则螺帽的运动方程和速度公式对于它的全过程都是适用的,没有必要把运动分两个阶段处理.如果我们把松开点作为坐标系的原点,把 y 轴的正方向选定为竖直向上的方向,那么,在螺帽松脱时,也即 $t=0$ 时,螺帽以初速 $v_0=2.44\text{ m/s}$ 作竖直上抛运动,到 $t=t$ 时,它离开出发点的距离为

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

而在这段时间内,升降机却以初速 v_0 作加速度 $a=1.22\text{ m/s}^2$ 的匀加速运动,它上升的距离为

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2)$$

因在螺帽与机底相遇时, s_2 与 s_1 之差(注意两者的正负号)实际上是升降机的高度 $h=2.74\text{ m}$,由此即可求出螺帽与机底相遇的时刻,亦即

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2} (a + g) t^2 = h \quad (3)$$

于是得
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a+g}} = 0.71 \text{ s}$$

即螺帽与机底相遇所花时间为 0.71 s. 把这个 t 值代入(1), 求得

$$s_1 = 2.44 \times 0.71 \text{ m} - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.71)^2 \text{ m} = -0.74 \text{ m}$$

这说明螺帽相对于机外固定柱子的下降距离为 0.74 m.

上面的解法说明考虑运动的矢量性, 可使求解简化. 如果进一步考虑运动的相对性, 则解法还要简明. 我们取升降机为参考系, 并把竖直向下的方向取作 y 轴的正方向, 则螺帽相对于升降机的初速为零, 而加速度按式(1-34)为 $g - (-a) = g + a$. 所以对升降机来说, 螺帽作加速度为 $(g + a)$ 的自由落体运动, 由此即可直接写出式(3),

$$h = \frac{1}{2}(g + a)t^2$$

思 考 题

1-1 回答下列问题:

- (1) 一物体具有加速度而其速度为零, 是否可能?
- (2) 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度, 是否可能?
- (3) 一物体具有恒定的速度但仍有变化的速率, 是否可能?
- (4) 一物体具有沿 x 轴正方向的加速度而有沿 x 轴负方向的速度, 是否可能?
- (5) 一物体的加速度大小恒定而其速度的方向改变, 是否可能?

1-2 回答下列问题:

(1) 位移和路程有何区别? 在什么情况下两者的量值相等? 在什么情况下并不相等?

(2) 平均速度和平均速率有何区别? 在什么情况下两者的量值相等? 瞬时速度和平均速度的关系和区别是怎样的? 瞬时速率和平均速率的关系和区别又是怎样的?

1-3 回答下列问题:

(1) 有人说:“运动物体的加速度越大,物体的速度也越大”,你认为对不对?

(2) 有人说:“物体在直线上运动前进时,如果物体向前的加速度减小了,物体前进的速度也就减小了”,你认为对不对?

(3) 有人说:“物体加速度的值很大,而物体速度的值可以不变,是不可能的”,你认为如何?

1-4 设质点的运动方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 在计算质点的速度和加速度时,有人先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 然后根据

$$v = \frac{dr}{dt} \quad \text{及} \quad a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

而求得结果;又有人先计算速度和加速度的分量,再合成求得结果,即

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{及} \quad a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

你认为两种方法哪一种正确? 两者差别何在?

1-5 试回答下列问题:

(1) 匀加速运动是否一定是直线运动? 为什么?

(2) 在圆周运动中,加速度的方向是否一定指向圆心? 为什么?

1-6 对于物体的曲线运动有下面两种说法:

(1) 物体作曲线运动时,必有加速度,加速度的法向分量一定不等于零;

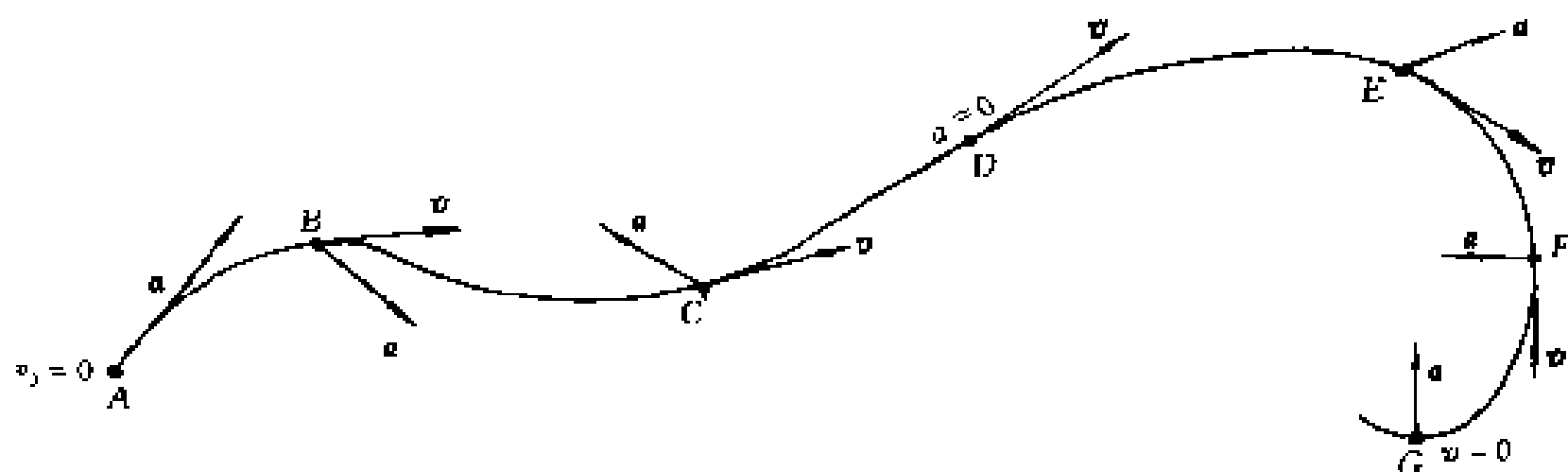
(2) 物体作曲线运动时速度方向一定在运动轨道的切线方向,法向分速度恒等于零,因此其法向加速度也一定等于零.

试判断上述两种说法是否正确,并讨论物体作曲线运动时速度、加速度的大小、方向及其关系.

1-7 一个作平面运动的质点,它的运动方程是 $r = r(t)$, $v = v(t)$, 如果 (1) $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dt} \neq 0$, 质点作什么运动? (2) $\frac{dr}{dt} \neq 0$, $\frac{dv}{dt} = 0$, 质点作什么运动?

1-8 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度方向垂直? 任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直?

1-9 一质点沿轨道 $ABCDEFG$ 运动,试分析图中各点处的运动,把答案填入下表.



思考题 1-9 图

各点情况	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
运动是否可能							
速度将增大还是减小							
速度方向将变化否							

1-10 一人在以恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一石子,此石子能否落回人的手中? 如果石子抛出后,火车以恒定加速度前进,结果又将怎样?

1-11 装有竖直遮风玻璃的汽车,在大雨中以速率 v 前进,雨滴则以速率 v' 竖直下降,问雨滴将以什么角度打击遮风玻璃.

1-12 一斜抛物体的水平初速度是 v_0 ,它的轨迹的最高点处的曲率半径是多大?

习 题

1-1 质点按一定规律沿 x 轴作直线运动,在不同时刻的位置如下:

t/s	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
x/m	3.00	3.14	3.29	3.42	3.57

- (1) 画出位置对时间的曲线;
- (2) 求质点在整个 3 s 中的平均速度;
- (3) 求质点在 $t=0$ 时的位置.

1-2 一质点沿 x 轴运动,坐标与时间的变化关系为 $x=4t-2t^3$,式中 x 、

t 分别以 m 、 s 为单位, 试计算

(1) 在最初 2 s 内的平均速度, 2 s 末的瞬时速度;

(2) 1 s 末到 3 s 末的位移、平均速度;

(3) 1 s 末到 3 s 末的平均加速度; 此平均加速度是否可用 $\bar{a} = \frac{a_1 + a_3}{2}$ 计算?

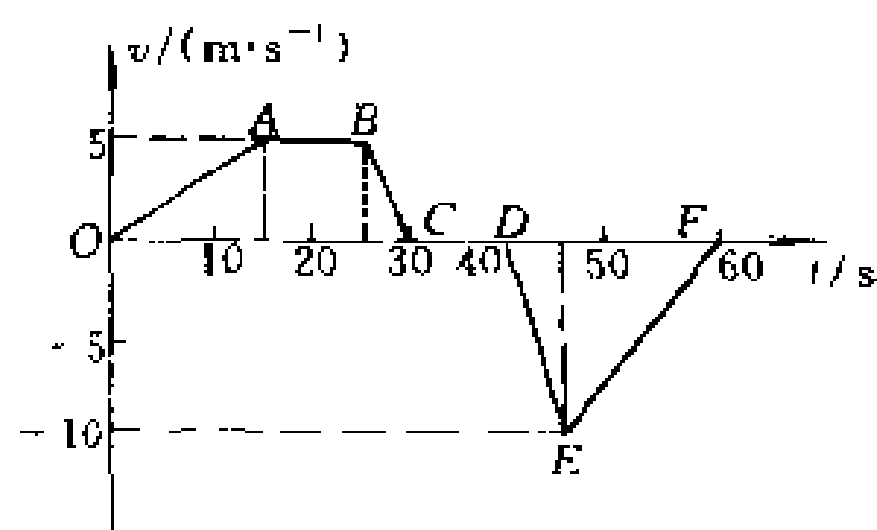
(4) 3 s 末的瞬时加速度.

1-3 一辆汽车沿着笔直的公路行驶, 速度和时间的关系如图中折线 $OABCDEF$ 所示.

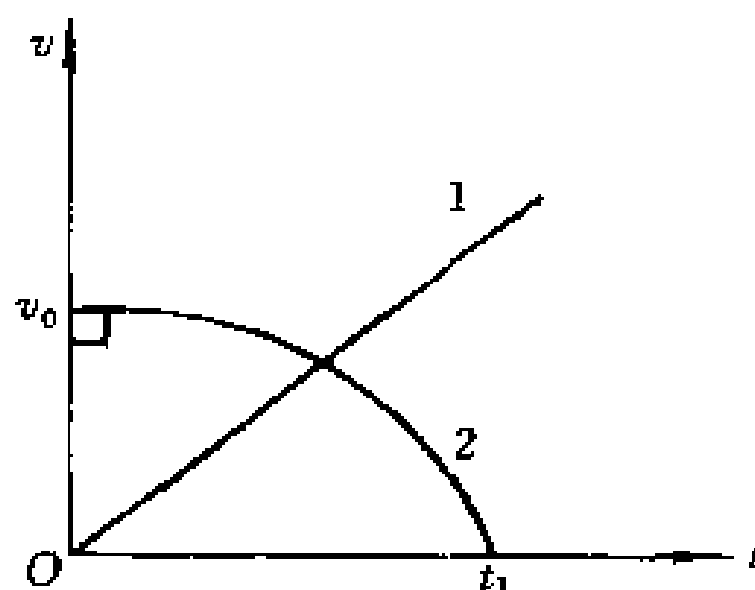
(1) 试说明图中 OA, AB, BC, CD, DE, EF 等线段各表示什么运动?

(2) 根据图中的曲线与数据, 求汽车在整个行驶过程中所走过的路程、位移和平均速度.

1-4 在图中, 直线 1 与圆弧 2 分别表示两质点 A、B 从同一地点出发, 沿同一方向作直线运动的 $v-t$ 图. 已知 B 的初速度 $v_0 = b\text{ m/s}$, 它的速率由 v_0 变为 0 所花时间为 $t_1 = 2b\text{ s}$, (1) 试求 B 在任意时刻 t 的加速度, (2) 设在 B 停止时, A 恰好追上 B, 求 A 的加速度, (3) 在什么时候, A、B 的速度相同?



习题 1-3 图



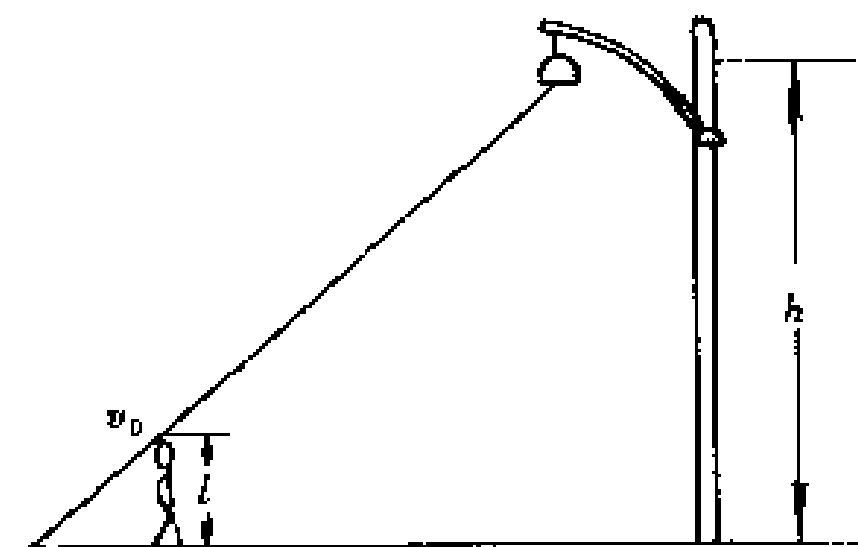
习题 1-4 图

1-5 路灯距地面的高度为 h , 一个身高为 l 的人在路上匀速运动, 速度为 v_0 , 如图所示, 求: (1) 人影中头顶的移动速度; (2) 影子长度增长的速率.

1-6 一长为 5 m 的梯子, 顶端斜靠在竖直的墙上. 设 $t=0$ 时, 顶端离地面 4 m , 当顶端以 2 m/s 的速度沿墙面匀速下滑时, 求

(1) 梯子下端的运动方程和速度; 并画出 $x-t$ 和 $v-t$ 图 (设梯子下端与上端离墙角的距离分别为 x 和 y).

(2) 在 $t=3\text{ s}$ 时, 下端的速度.



习题 1-5 图

1-7 在离水面高度为 h 的岸边,有人用绳子拉船靠岸,船在离岸边 s 距离处.当人以 v_0 的速率收绳时,试求船的速率与加速度各有多大.

1-8 在质点运动中,已知 $x = ae^{kt}$, $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$, $y|_{t=0} = b$. 求质点的加速度和它的轨道方程.

1-9 一质点的运动方程为 $r(t) = i + 4t^2j + tk$, 式中 r, t 分别以 m、s 为单位. 试求: (1) 它的速度与加速度; (2) 它的轨迹方程.

1-10 一质点的运动方程为 $x = 3t + 5$, $y = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 4$. (1) 以 t 为变量, 写出位矢的表达式; (2) 描绘它的轨迹; (3) 式中 t 以 s 为单位, x, y 以 m 为单位, 求质点在 $t = 4$ 时的速度的大小和方向.

△1-11 一质点沿光滑的抛物线轨道, 从起始位置 $(2, 2)$ 无初速地滑下, 如图. 问质点将在何处离开抛物线? 抛物线方程为 $y^2 = 2x$, 式中 x, y 以 m 为单位.

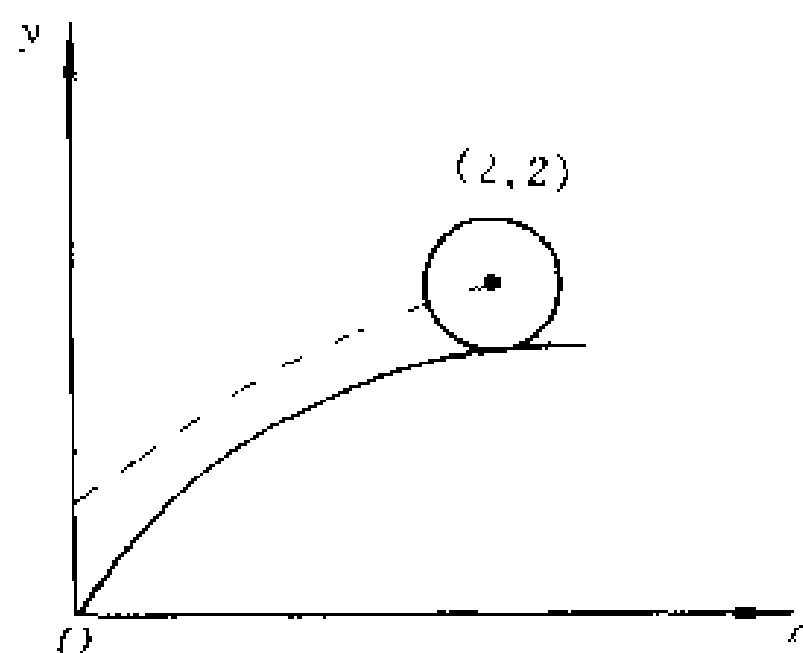
1-12 在竖直平面内, 一光滑钢丝被弯成图示曲线. 质点穿在钢丝上, 可沿它滑动. 已知其切向加速度为 $-g \sin \theta$, θ 是曲线切向与水平方向夹角. 试证质点在各处的速率 v 与其位置坐标 y 有如下关系: $v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y)$, 式中 v_0 与 y_0 分别为其初速度与初位置.

△1-13 如图所示, 杆 AB 以匀角速度 ω 绕 A 点转动, 并带动水平杆 OC 上的质点 M 运动. 设起始时刻杆在竖直位置, $OA = h$.

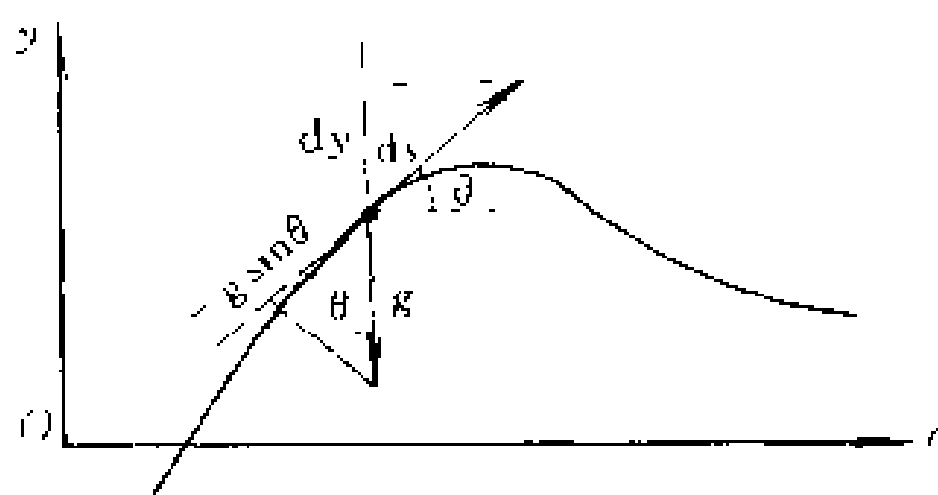
(1) 列出质点 M 沿水平杆 OC 的运动方程;

(2) 求质点 M 沿杆 OC 滑动的速度和加速度的大小.

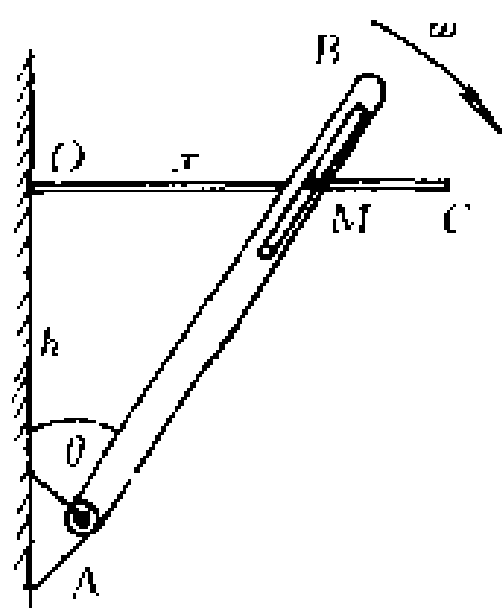
1-14 滑雪运动员离开水平滑雪道飞入空中时的速率 $v = 110 \text{ km/h}$, 着陆的斜坡与水平面成 $\theta = 45^\circ$ 角, 如图所示.



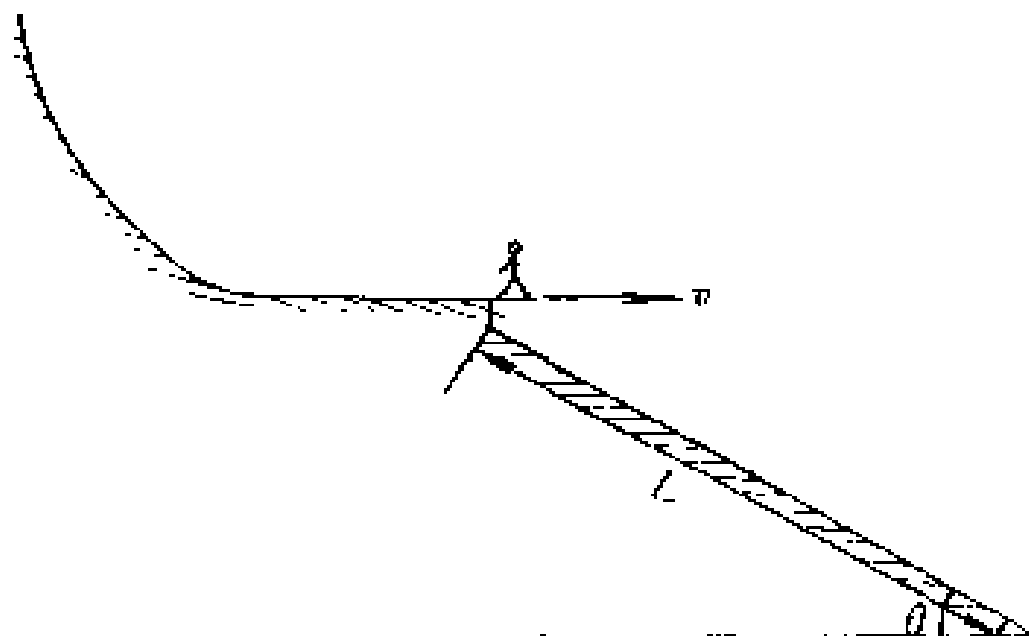
习题 1-11 图



习题 1-12 图



习题 1-13 图



习题 1-14 图

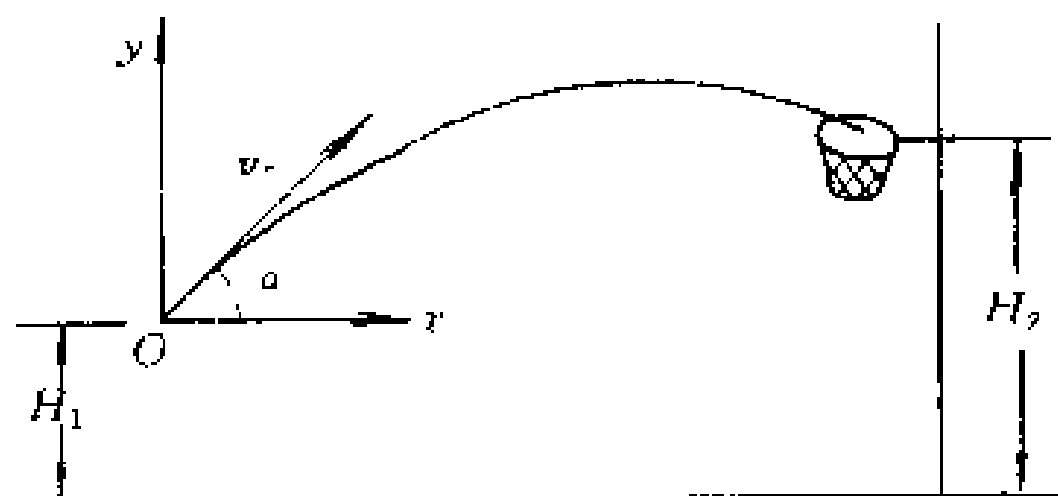
(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移 L (忽略起飞点到斜面的距离)。

(2) 在实际的跳跃中,运动员所达到的距离 $L = 165 \text{ m}$,此结果为何与计算结果不符?

1-15 一个人扔石头的最大出手速率为 $v = 25 \text{ m/s}$,他能击中一个与他的手水平距离为 $L = 50 \text{ m}$ 而高 $h = 13 \text{ m}$ 的一个目标吗? 在这个距离上他能击中的目标的最大高度是多少?

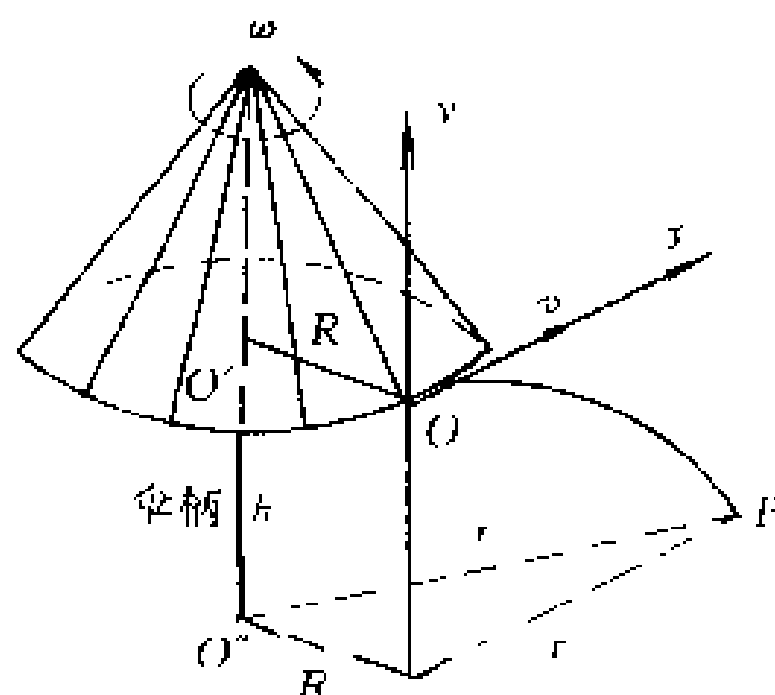
1-16 在篮球运动员作立定投篮时,如以出手时球的中心为坐标原点,作坐标系 Oxy 如图示,设篮圈中心坐标为 (x, y) ,出手高度为 H_0 ,球的出手速度为 v ,试证球的出手角度 α 应满足下式才能投入:

$$\sin \alpha = \frac{v_0'}{g x} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2g}{v_0'^2} \left(y + \frac{g x^2}{2v_0'^2} \right)} \right]$$



习题 1-16 图

1-17 如图, 一立立的雨伞, 其边缘的直径为 R , 离地面的高度为 h . 当伞绕伞柄以匀角速 ω 旋转时, 试证沿边缘飞出的水滴将落在地面上半径为 $r = R\sqrt{1 + 2h\omega^2/g}$ 的圆周上. 请构思一种旋转式洒水器的方案.



习题 1-17 图

1-18 一列车以 5 m/s 的速度沿 x 轴正方向行驶, 某旅客在车厢中观察一个站在站台上的小孩竖直向上抛出的球. 相对于站台上的坐标系来说, 球的运动方程为 $x = 0, y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (v_0, g 是常量).

(1) 如果旅客用随车一起运动的坐标系 $O'x'y'$ 来描写小球的运动, 已知 x' 轴与 x 轴同方向, y' 轴与 y 轴相平行, 方向向上, 且在 $t = 0$ 时, O' 与 O 相重合, 则 x' 和 y' 的表达式将是怎样的呢?

(2) 在 $O'x'y'$ 坐标系中, 小球的运动轨迹又是怎样的?

(3) 从车上的旅客与站在车站上的观察者看来, 小球的加速度各为多少? 方向是怎样的?

1-19 甲乙两船同时航行, 甲以 10 km/h 的速度向东, 乙以 5 km/h 的速度向南. 问从乙船的人看来, 甲的速度是多大? 方向如何? 反之, 从甲船的人看来, 乙的速度又是多大? 方向如何?

1-20 设河面宽 $l = 1 \text{ km}$, 河水由北向南流动, 流速 $v = 2 \text{ m/s}$, 有一船相对于河水以 $v' = 1.5 \text{ m/s}$ 的速率从西岸驶向东岸.

(1) 如果船头与正北方向成 $\alpha = 15^\circ$ 角, 船到达对岸要花多少时间? 到达

对岸时,船在下游何处?

(2) 如果船到达对岸的时间为最短,船头与河岸应成多大角度? 最短时间等于多少? 到达对岸时,船在下游何处?

(3) 如果船相对于岸走过的路程为最短,船头与岸应成多大角度? 到对岸时,船又在下游何处? 要花多少时间.

1 21 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处,然后又向西飞回 A 处,飞机相对于空气的速率为 v' ,而空气相对于地面的速率为 v_r , A 、 B 之间的距离为 l ,飞机相对空气的速率 v' 保持不变.

(1) 假定空气是静止的(即 $v_r=0$),试证来回飞行时间为 $t_0=2l/v'$.

(2) 假定空气的速度向东,试证来回飞行时间为

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - \left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}$$

(3) 假定空气的速度向北,试证来回飞行时间为

$$t_2 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}}$$

第二章 牛顿运动定律

在上一章中,我们介绍了质点运动学的内容,解决了如何描述质点机械运动的问题.从本章开始,我们将进而研究动力学问题.动力学的基本问题是研究物体间的相互作用,以及由此引起的物体运动状态变化的规律.牛顿关于运动的三个定律,是整个动力学的基础.

为了提高和深化对牛顿运动定律的认识,本章除对有关概念和定律的物理本质作较深入的分析讨论外,还将牛顿第二运动定律的几种不同的表述形式安排在同一章中,说明在从动力学问题的瞬时关系的研究过渡到过程关系的研究时,牛顿定律的积分形式往往比其微分形式更为有效.而描述物质基本属性的状态量,包括动量和能量的引入,将使读者较早地认识到动量定理和动能定理在解决实际问题中的重要地位和作用.物体间由于相互作用而引起机械运动的转移,例如在物体碰撞中,就出现机械运动的转移现象,这时用速度描述物体的运动状态就显得很不够了,为此而引入了动量的概念.动量是物体机械运动的一种量度.物体间的相互作用,不仅会使物体的运动状态发生改变,而且还可能导致运动形式的转化,例如机械运动转化为热运动,电磁运动转化为机械运动等等.为了定量研究各种运动形式的转化过程,需要引入一个作为运动一般量度的物理量,这就是能量.现代物理学的发展说明,尽管在经典力学中需要力的概念,但在微观领域的研究中力的概念被扩展为相互作用,其内涵已超出原来力的含义,然而动量和能量仍然支配着所有自然过程.

§ 2-1 牛顿第一定律和第三定律

牛顿运动定律是经典力学的基础,虽然牛顿运动定律一般是对质点而言的,但这并不限制定律的广泛适用性,因为复杂的物体在原则上可看作是质点的组合.从牛顿运动定律出发可以导出刚体、流体、弹性体等的运动规律,从而建立起整个经典力学的体系.

牛顿(I. Newton)集前人有关力学研究之大成,特别是吸取了伽利略的研究成果,在 1687 年发表了他的名著《自然哲学的数学原理》.它的出版标志着经典力学体系的确立.牛顿在书中概括的基本定律有三条,就是通常所说的牛顿三定律.由于科学在发展,人们的认识在深化,现在有关三定律的叙述和原著是有些差别的.在本节先介绍牛顿第一定律和第三定律.

1. 牛顿第一定律

日常经验和科学实验都表明,任何物体都受其周围物体的作用,正是这种作用支配着物体运动状态的变化.行星受到太阳的作用才能绕日运行,苹果受到地球作用才能下落,电子受到原子核的作用才能和核结合成原子.物体间各种不同的相互作用,构成了千变万化的物质世界.这些作用常被叫做力.经验告诉我们,力有两种对外表现:一是改变物体的运动状态;二是改变物体的形状.这两种表现使我们有可能对力的性质和量值作进一步的研究.

虽然力在人们生活中无处不在,但在伽利略以前,由于人们相信古希腊思想家亚里士多德的“运动必须推动”的教条,把力看作运动的起因而不是运动状态改变的原因,极大地影响了力学的发展.直到 16 世纪,伽利略在做了大量的自由落体、斜面、单摆等实验后得出结论,力是改变物体运动状态的原因,从而结束了两千多年来关于力的错误认识.牛顿继承和发展了伽利略的思想,用牛顿第一运动定律揭示了力的第一种对外表现,建立了惯性和力的确

切概念.由此可见,一个重要而有普遍意义的科学概念,可能要在上千年历史的长河中翻腾洗炼,才慢慢地露出水面,让人认识其庐山真面目.第一定律的内容如下:

任何物体都保持静止的或沿一直线作匀速运动的状态,直到作用在它上面的力迫使它改变这种状态为止.

第一定律指明了任何物体都具有惯性,因此第一定律又被叫做惯性定律.所谓惯性,就是物体所具有的保持其原有运动状态不变的特性.在我国春秋末期的古籍《考工记》中写着:“马力既竭,辀犹能一取焉.”在拉车子的马停止后,车子要继续走一小段路程.这是有关惯性现象的早期记载.

第一定律还说明,仅当物体受到其他物体作用时才会改变其运动状态,亦即,其它物体的作用是物体改变运动状态的原因.以棒击球,棒的作用使球的运动状态改变;地球对月亮的作用使月亮的运动状态不断改变;地面对小车的作用使滑行的小车逐渐停止.这些使物体运动状态改变的相互作用,就是力.因此我们说,力是引起运动状态改变的原因.早在我国春秋末期,《墨经》中说:“力,形之所以奋也”.“形”,指有形的物体,这句话指出力是使物体由静而动(奋)的原因,对力的作用作了很恰当的概括,其思想和牛顿不谋而合.因此,第一定律还定性地阐明了力的涵义.

事实上,任何物体都不可能完全不受其他物体所作用的力.但是,如果这些作用力恰好相互抵消,则物体的速度就保持不变,静止的仍然静止,运动的作匀速直线运动.力处于平衡之中.从这个角度看问题,可以说:第一定律所描述的是力处于平衡时物体的运动规律.

此外,由于运动只有相对于一定的参考系才有意义,所以牛顿第一定律还定义了一种参考系.在这种参考系中观察,一个不受力作用的物体或处于受力平衡状态下的物体,将保持其静止或匀速直线运动的状态不变.这样的参考系叫惯性参考系.并非任何参考系都是惯性系.实验指出,对一般力学现象来说,地面参考系是一

个足够精确的惯性系. 天体运动的研究表明, 如果我们选定太阳为参考系, 则所观察到的大量天文现象都能和牛顿运动定律推算的结果相符. 太阳系也是个惯性系. 牛顿定律只有在惯性参考系中才成立. 在以后各章节的例题中, 如无特殊说明, 都是指在惯性参考系中应用牛顿定律.

2. 牛顿第三运动定律

作用在物体上的力都是来自其他物体的. 但是, 任何一个力还只是两个物体之间相互作用的一个方面. 我们发现, 不论何时, 一个物体如对第二个物体施力, 则第二个物体就同时对第一个物体也施力. 一个单独的孤立的力实际上是不可能存在的. 力的这种相互作用性质已为牛顿第三定律所揭示. 第三定律的内容如下:

两个物体之间的作用力和反作用力, 在同一直线上, 大小相等而方向相反. 或者说, 当物体 A 以力 F_{AB} 作用在物体 B 上时, 物体 B 必定同时以力 F_{BA} 作用在物体 A 上; F_{AB} 和 F_{BA} 在一条直线上, 大小相等而方向相反. 亦即

$$\boxed{F_{AB} = -F_{BA}} \quad (2-1)$$

我们把 F_{AB} 和 F_{BA} 中的一个叫做作用力, 则另一个就叫反作用力. 第三定律表明, 作用力和反作用力总是同时以大小相等、方向相反的方式成对地出现的, 它们同时出现, 同时消失, 没有主次之分.

图 2-1 是关于第三定律的几个例子, 从中可以看出, 作用力和反作用力属于同一种性质. 例如, (a) 中是一对磁力; (b) 中都是万有引力; (c) 中都是摩擦力; (d) 中是一对电力; (e) 中都是张力.

从图中还可看出, 作用力和反作用力是分别作用在两个物体上的. 这对掌握与应用第三定律是特别重要的. 在图(e)中, 如把车和绳看作一个整体, 则马作用在绳上的力 F_{MA} 和绳作用在马上力 F_{AM} 是分别作用在绳和马上. 当我们把马和车看作一个系统, 则马和车之间的相互作用是系统的内力. 与外力不同, 内力在系统

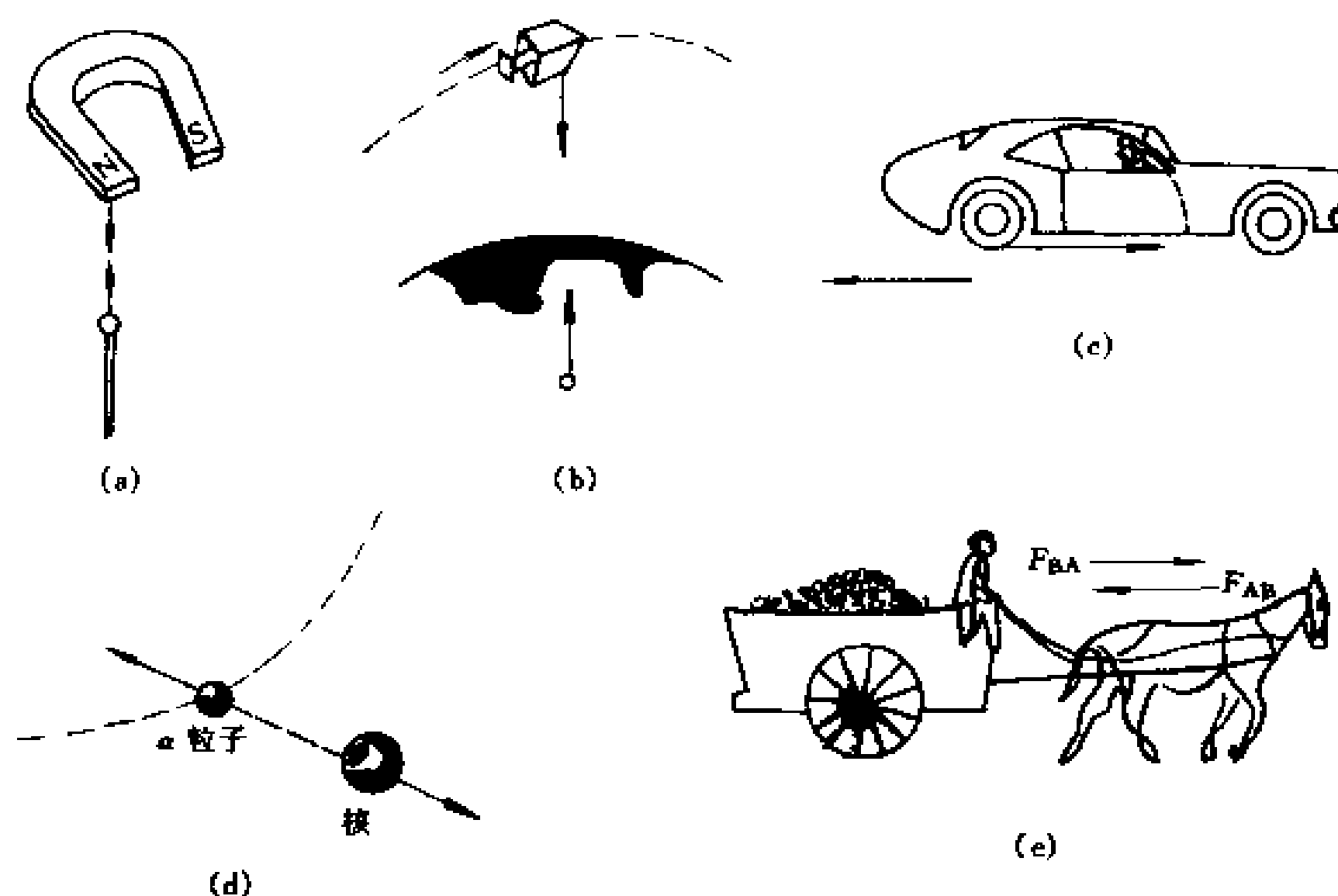


图 2-1 作用力和反作用力

内是成对出现的,第三定律表明,系统的内力之和总是零,所以它们对系统的整体运动不发生影响.早在我国东汉时期,王充就在《论衡》中指出:“古之多力者,身能负荷千钧,手能决角伸钩,使之自举,不能离地”.这自举之力就是人体的内力,它无法把人体举起来.王充用这个生动的例子区别了内力与外力,这种真知灼见实为难得.对上述马车来说,它的运动变化其实只依靠来自地面的推力和摩擦阻力,前者起推动作用,后者起阻碍作用,两者都是作用在马车这个系统上的外力,而不是内力.

§ 2-2 常见力和基本力

在日常生活和工程技术中经常遇到的力,有重力、弹力和摩擦力等,关于它们的知识,在高中物理中已经介绍过.在此,我们只作一些简单的回顾.

1. 重力

地球表面附近的物体都受到地球的吸引作用,这种因地球吸引而使物体受到的力叫做重力.在重力作用下,任何物体产生的加速度都是重力加速度 g .重力的方向和重力加速度的方向相同,都是竖直向下的.

重力的存在主要是由于地球对物体的引力,在地面附近和一些要求精度不高的计算中,可以认为重力近似等于地球的引力.对于地面附近的物体,所在位置的高度变化与地球半径(约为 6 370 km)相比极为微小,可以认为它到地心的距离就等于地球半径,物体在地面附近不同高度时的重力加速度也就可以看作是常量.当地球内某处存在大型矿藏,从而破坏了地球质量的对称分布时,会使该处的重力加速度值表现出异常,因此可通过重力加速度的测定来探矿.这种方法叫做重力探矿法.

2. 弹力

发生形变的物体,由于要恢复原状,对与它接触的物体会产生力的作用.这种力叫弹力.所以,弹力是产生在直接接触的物体之间并以物体的形变为先决条件的.弹力的表现形式是多种多样的,下面只讨论三种表现形式.

一种是两个物体通过一定面积相互挤压的情形.这时相互挤压的两个物体都会发生形变,即使小到难于观察,但形变总是存在的,因而产生对对方的弹力作用.例如,屋架压在柱子上,柱因压缩形变而产生向上的弹力托住屋架;又如重物放在桌面上,桌而受重物挤压而发生形变,也产生一个向上的弹力.这种弹力通常叫做正压力或支承力.它们的大小取决于相互挤压的程度,它们的方向总是垂直于接触面而指向对方.

另一种弹力是绳线对物体的拉力.这种拉力是因绳线发生了伸长形变而产生的,其大小取决于收紧的程度,它们的方向总是沿

着绳线而指向绳线收紧的方向。

绳产生拉力时,其内部各段之间也有相互的弹力作用.这种内部的弹力叫做张力.在很多实际问题中,绳线的质量往往可以忽略,这时,可以认为绳上各点的张力都是相等的,而且就等于外力.

还有一种在力学中常讨论的力是弹簧的弹力.当弹簧被拉伸或压缩时,它就会对与之相连的物体有弹力作用(图 2-2).这种弹力总是力图使弹簧恢复原状,所以叫做恢复力.这种恢复力在弹性限度内,其大小和形变成正比.以 F 表示弹力,以 x 表示形变亦即弹簧的长度变化,则

$$F = - kx \quad (2-2)$$

式中 k 叫弹簧的劲度系数,负号表示弹力的方向总是和弹簧位移的方向相反,这就是说,弹力总是指向要恢复它原长的方向.

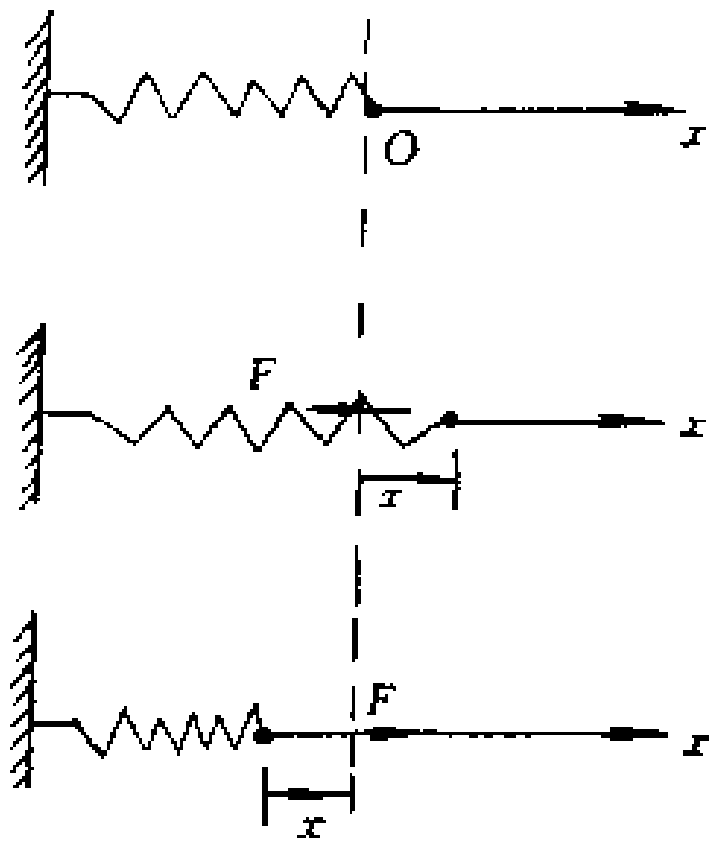


图 2-2 弹力

式(2-2)常被叫做胡克(R. Hooke)定律.其实,早在我国东汉时期,郑玄在对《考工记》作注解时就说过:“假令弓力胜三石,引之申三尺,弛其弦,以绳缓擗之,每加物一石,则张一尺”.意思是说弓有弹力,随着弦上重物每增加一石,弓就申张一尺,它非常明显地揭示了“力和形变成正比”的线性关系.郑玄的发现比胡克早了 1500 年.所以,式(2-2)理应叫做郑玄-胡克定律才对.

3. 摩擦力

两个相互接触的物体在沿接触面相对运动时,或者有相对运动的趋势时,在接触面之间产生一对阻止相对运动的力,叫做摩擦力.相互接触的两个物体在外力作用下,虽有相对运动的趋势,但并不产生相对运动,这时的摩擦力叫静摩擦力.所谓相对运动的趋

势指的是,假如没有静摩擦,物体将发生相对滑动.正是静摩擦的存在,阻止了物体相对滑动的出现.值得注意的是,每个物体所受静摩擦力的方向与该物体相对于另一物体的运动趋势的方向相反.静摩擦力的大小视外力的大小而定,介乎 0 和某个最大静摩擦力 f_s 之间.实验证明,最大静摩擦力正比于正压力 N ,

$$f_s = \mu_s N \quad (2-3)$$

μ_s 叫做静摩擦系数,它与接触面的材料和表面情况有关.它的大小通常在工程手册中给出.

当外力超过最大静摩擦力时,物体间产生了相对运动,这时也有摩擦力,叫做滑动摩擦力.实验表明,滑动摩擦力 f_k 也与正压力 N 成正比;

$$f_k = \mu_k N \quad (2-3a)$$

μ_k 叫做滑动摩擦系数.它也和相互接触的两物体的材料和表面情况有关,而且还和物体的相对速度有关.在大多数情况下,它随速度的增大而减小.

对于给定的一对接触面来说, $\mu_s > \mu_k$, 一般两者都小于 1. 在通常的速率范围内,可认为 μ_k 和速率无关,而且在一般问题的简要分析中还可认为 μ_k 和 μ_s 相等.

近代物理学证明,以上形形色色的力就其本质而言,都来自四种基本力,它们是万有引力、电磁力、强力和弱力.下面对此作简单介绍.

4. 万有引力

这是存在于任何两个物体之间的吸引力.它的规律是胡克、牛顿等发现的.按牛顿万有引力定律,质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点,相距为 r 时,它们之间的引力为

$$F = G_0 \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2-4)$$

式中 G_0 叫做万有引力常量,在国际单位制中,它的大小经测定为

$$G_0 = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

式(2-4)中的质量反映了物体的引力性质,叫做引力质量,它和反映物体惯性的质量在意义上是不同的.但实验证明,同一物体的这两个质量是相等的,因此可说它们是同一质量的两种表现,不必加以区分.

重力是由地球对它表面附近的物体的引力引起的,忽略地球自转的影响(其误差不超过 0.4%),物体所受的重力就等于它所受的万有引力.设地球的质量为 M ,半径为 R ,物体的质量为 m ,即有

$$mg = G_0 \frac{Mm}{R^2}$$

由此得

$$g = \frac{G_0 M}{R^2}$$

粒子之间的万有引力是非常小的,例如两个相邻的质子之间的万有引力大约只有 10^{-34} N ,因而完全可以忽略.

5. 电磁力

存在于静止电荷之间的电性力以及存在于运动电荷之间的电性力和磁性力,由于它们在本质上相互联系,总称为电磁力.在微观领域中,还发现有些不带电的中性粒子也参与电磁相互作用.电磁力和万有引力一样都是长程力,但与万有引力不同,它既有表现为引力的也有表现为斥力的,比万有引力大得多.两个质子之间的电力要比同距离下的万有引力大上 10^{36} 倍.

由于分子或原子都是由电荷组成的系统,所以它们之间的作用力基本上就是它们的电荷之间的电磁力.物体之间的弹力和摩擦力以及气体的压力、浮力、粘滞阻力等等都是相邻原子或分子之间作用力的宏观表现,因此基本上也是电磁力.

6. 强力

当人们对物质结构的探索进入到比原子还小的亚微观领域中时,发现在核子、介子和超子之间存在一种强力.正是这种力把原子内的一些质子以及中子紧紧地束缚在一起,形成原子核.强力是比电磁力更强的基本力,两个相邻质子之间的强力可达 10^4 N ,比电磁力大 10^2 倍.强力是一种短程力,其作用范围很短.粒子之间距离超过 10^{-15} m 时,强力小得可以忽略;小于 10^{-15} m 时,强力占主要支配地位;而且直到距离减小到大约 $0.4\times 10^{-15}\text{ m}$ 时,它都表现为引力.距离再减小,强力就表现为斥力.

7. 弱力

在亚微观领域中,人们还发现一种短程力,叫弱力.弱力在导致 β 衰变放出电子和中微子时,显示出它的重要性.两个相邻质子之间的弱力只有 10^{-2} N 左右.

在头绪纷繁、形式多样的力中,人们认识到基本力只有四种,这是本世纪30年代物理学的一大成就.从此以后,人们就企图发现这四种力之间的联系.爱因斯坦一生最大的愿望就是追求世界的和谐、简洁和统一,他企图把万有引力和电磁力统一起来,但没有成功.60年代,格拉肖(S. L. Glashow)、温伯格(S. Weinberg)和萨拉姆(A. Salam)在杨振宁等提出的理论基础上,发展了弱力与电磁力相统一的理论,并在70年代和80年代初得到了实验的证明,这是物理学发展史上又一个里程碑.人们期待有朝一日,能建立起弱、电、强的“大统一”理论,以致最后创立统一四种基本力的“超统一”理论.这是当前理论物理界最活跃的前沿课题,已出现了令人鼓舞的前景.

§ 2-3 牛顿第二定律及其微分形式

牛顿第一运动定律只定性地指出了力和运动的关系,力和运动的定量关系是由牛顿第二定律所揭示的.

1. 牛顿第二定律

读者在中学时所熟悉的第二定律是这样叙述的:

物体受到外力作用时,它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比,并与物体的质量成反比,加速度的方向与外力的方向相同.

牛顿第二定律通常的数学表达式为

$$\boxed{F=ma} \quad (2-5)$$

在国际单位制中,质量的单位是 kg,加速度的单位是 m/s,力的单位则是 N.

为了加深对牛顿第二定律的认识和理解,现在对质量、定律的瞬时性和矢量性等分别讨论如下.

质量这个概念是牛顿首先采用的.根据第一定律,我们把物体保持其原有运动不变的这个特性叫做物体的惯性.物体的惯性不仅表现在物体不受外力时要保持其运动状态不变,原来静止的仍然静止,原来运动的则作匀速直线运动,而速度的大小和方向都不改变;而且,物体的惯性还体现在迫使其运动状态改变的难易程度上.在一定外力作用下,物体的惯性越大,要使它改变运动状态就越难,它所获得的加速度也越小;物体的惯性越小,要使它改变运动状态就越容易,它所获得的加速度也越大.从第二定律容易看出,在外力一定时,不同物体的加速度与其质量成反比:质量越大,加速度越小;质量越小,加速度就越大.所以,质量是物体惯性的量度.物体的惯性表现,在牛顿第二定律中被质量这个物理量定量地表示出来了.我们把出现在第二定律中的质量叫做惯性质量.

牛顿第二定律定量地表述了物体的加速度与所受外力之间的瞬时关系。 a 表示瞬时加速度, F 表示瞬时力, 它们同时存在, 同时改变, 同时消失. 一旦作用在物体上的外力被撤去, 物体的加速度立即消失, 但这并不意味着物体停止运动. 按照第一定律, 这时物体将作匀速直线运动, 这正是惯性的表现. 物体有无运动, 表现在它有无速度; 而运动有无改变, 则要决定于它有无加速度. 如果有加速度, 则作用在物体上的外力一定存在, 力是产生加速度的原因. 为了突出第二定律的瞬时性, 利用瞬时加速度的定义式(1-8), 将式(2-5)改写成

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (2-6)$$

这将更为醒目.

式(2-5)原是对物体只受一个外力的情况说的, 在一个物体同时受到几个力的作用时, 它们和物体的加速度有什么关系呢? 实验证明, 如果几个力同时作用在一个物体上, 则物体产生的加速度等于每个力单独作用时产生的加速度的叠加, 也等于这几个力的合力所产生的加速度. 这一结论叫做力的独立性原理或力的叠加原理. 如果以 $F_1, F_2, \dots, F_i$ 表示同时作用在物体上的几个外力, 以 F 表示它们的合力, 以 $a_1, a_2, \dots, a_i$ 分别表示它们各自作用所产生的加速度, 以 a 表示合加速度, 则力的叠加原理可表示为

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + \dots + F_i = \sum F_i \\ &= ma_1 + ma_2 + \dots + ma_i = ma = m \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (2-7)$$

上式是矢量式, 实际应用时常用它们的投影式或分量式. 在直角坐标系中这些投影式是

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \quad (2-8)$$

对于平面曲线运动,常用沿切向和法向的投影式,即

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} \quad F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (2-9)$$

式 F_t 和 F_n 分别表示合外力的切向分量和法向分量, ρ 是质点所在处曲线的曲率半径.

2. 牛顿第二定律的微分形式

一个有趣而常被忽视的历史事实是,牛顿对力学基本定律的表述并非式(2-5)的形式;方程式 $F=ma$ 在其名著《自然哲学的数学原理》中从未出现过. 牛顿自己是怎样表述第二定律的呢? 他的原文的意思是这样的:

运动的变化与所加的动力成正比,并且发生在这力所沿直线的方向上.

牛顿在定律中提出的“运动”一词,并非我们泛泛而谈的运动,而是有其严格定义的,他把物体的质量和速度矢量之积定义为“运动”. 我们知道,现在这个乘积 $m\mathbf{v}$ 叫做物体的动量,用 $\mathbf{p}$ 表示,则

$$\boxed{\mathbf{p} = m \mathbf{v}} \quad (2-10)$$

而牛顿所说的运动的变化指的是动量的变化率,所以,牛顿对第二定律的说法实质上是

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}} \quad (2-11)$$

或

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \quad (2-12)$$

这就是牛顿第二定律的微分形式.

牛顿当时认为,而且后来已由实验证明,对运动速度与光速相比为很小的物体来说,它的质量是一个与其运动速度无关的常量. 因此,由式(2-12)可得 $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v} = \mathbf{F} dt$, 即

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

这就成为大家熟悉的式(2-5)了。

需要强调的是,作为牛顿第二定律的基本的普遍形式应该是它的微分形式(2-11)或(2-12)。这一方面是因为在物理学中动量的概念比速度、加速度等更为普遍更为基本,也更为重要;另一方面还因为,式(2-5)是在质量为常量条件下的特殊形式。火箭在发射过程中由于不断向外喷射气体,因而火箭的质量随时间减少,这时就不能用式(2-5)来分析这类变质量体的运动。而且,当物体的速率接近光速时,即使物体在运动过程中并不喷出或吸附质量,物体的质量也将随速率而改变,因而式(2-5)不再适用。但是式(2-11)或(2-12)却被实验证明仍然是成立的。

§ 2-4 牛顿运动定律应用举例

牛顿的三条运动定律是一个整体,不能只注意牛顿第二定律,而把其他两条定律置诸脑后。牛顿第一定律是牛顿力学的思想基础,它说明任何物体都有惯性,牛顿定律只能在惯性参考系中应用,力是使物体产生加速度的原因,不能把 ma 误认为力。牛顿第三定律指出了力有相互作用的性质,为我们正确分析物体受力情况提供了依据。通常在力学问题中,对每个物体来说,除重力外,其他外力都可以在该物体和其他物体相接触处去寻找,以免把作用在物体上的一些力遗漏掉。所有这些都是我们在应用牛顿第二定律作定量计算时所必需考虑的。

通常的力学问题可分为两类;一类是已知力求运动;另一类是已知运动求力。当然在实际问题中常常是两者兼有。而在本课程中具体涉及的问题则有两种:一是在常力作用下的连结体问题;另一种是在变力作用下的单体问题。兹分别举例如下。

1. 常力作用下的连结体问题

例题2-1 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮,在滑轮两侧用

轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的重物 A 和 B, 已知 $m_1 > m_2$. 当电梯 (1) 匀速上升, (2) 匀加速上升时, 求绳中的张力和物体 A 相对于电梯的加速度 a_r .

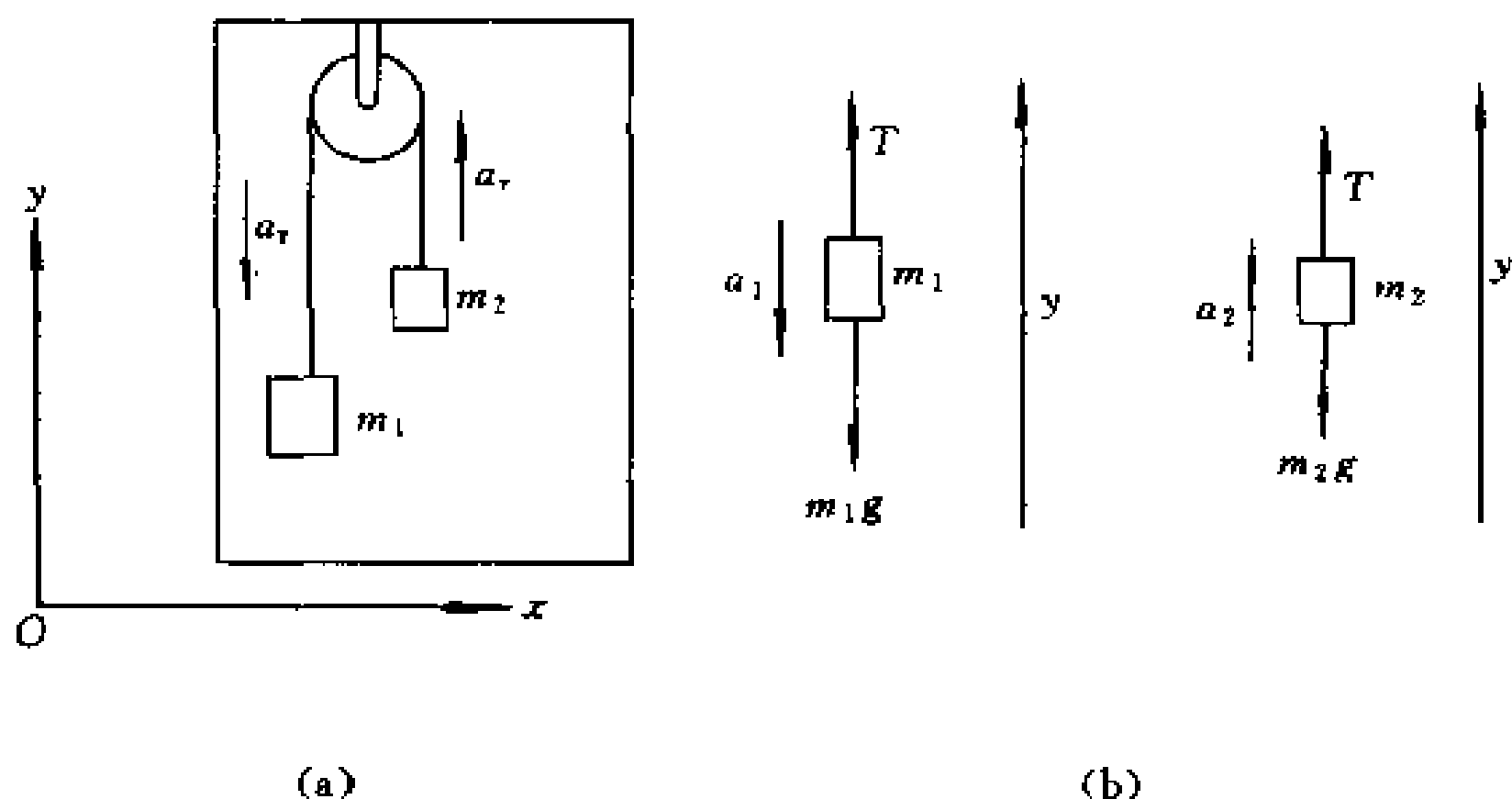


图2-3 例题2-1图

解 (1) 取地面为参考系, 如图2-3(a)所示. 把 A 与 B 隔离开来, 分别画出它们的示力图如图2-3(b). 可以看出, 每个质点都受两个力的作用: 绳子的向上拉力和质点的重力.

当电梯匀速上升时, 物体对电梯的加速度等于它们对地面的加速度. 选取 y 轴的正方向向上, 则 B 以 a_r 向上运动, 而 A 以 a_r 向下运动. 因绳子的质量可忽略, 所以轮子两侧绳的向上拉力相等. 由牛顿第二定律得

$$T - m_1g = -m_1a_r \quad (1)$$

$$T - m_2g = m_2a_r \quad (2)$$

由上列两式消去 T , 解得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad (3)$$

把 a_r 代入式(1), 得

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \quad (4)$$

(2) 当电梯以加速 a 上升时, A 相对于地面的加速度为 $a_1 = a - a_r$, B 相对于地面的加速度为 $a_2 = a + a_r$, 因此

$$T - m_1 g = m_1 (a - a_r) \quad (5)$$

$$T - m_2 g = m_2 (a + a_r) \quad (6)$$

由此解得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (a + g) \quad (7)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (a + g) \quad (8)$$

显然, 如果 $a = 0$, 上两式就归结为式(3)与式(4).

如在式(7)与式(8)中用 $-a$ 代替 a , 可得电梯以加速度 a 下降时的结果:

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g - a) \quad (9)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g - a) \quad (10)$$

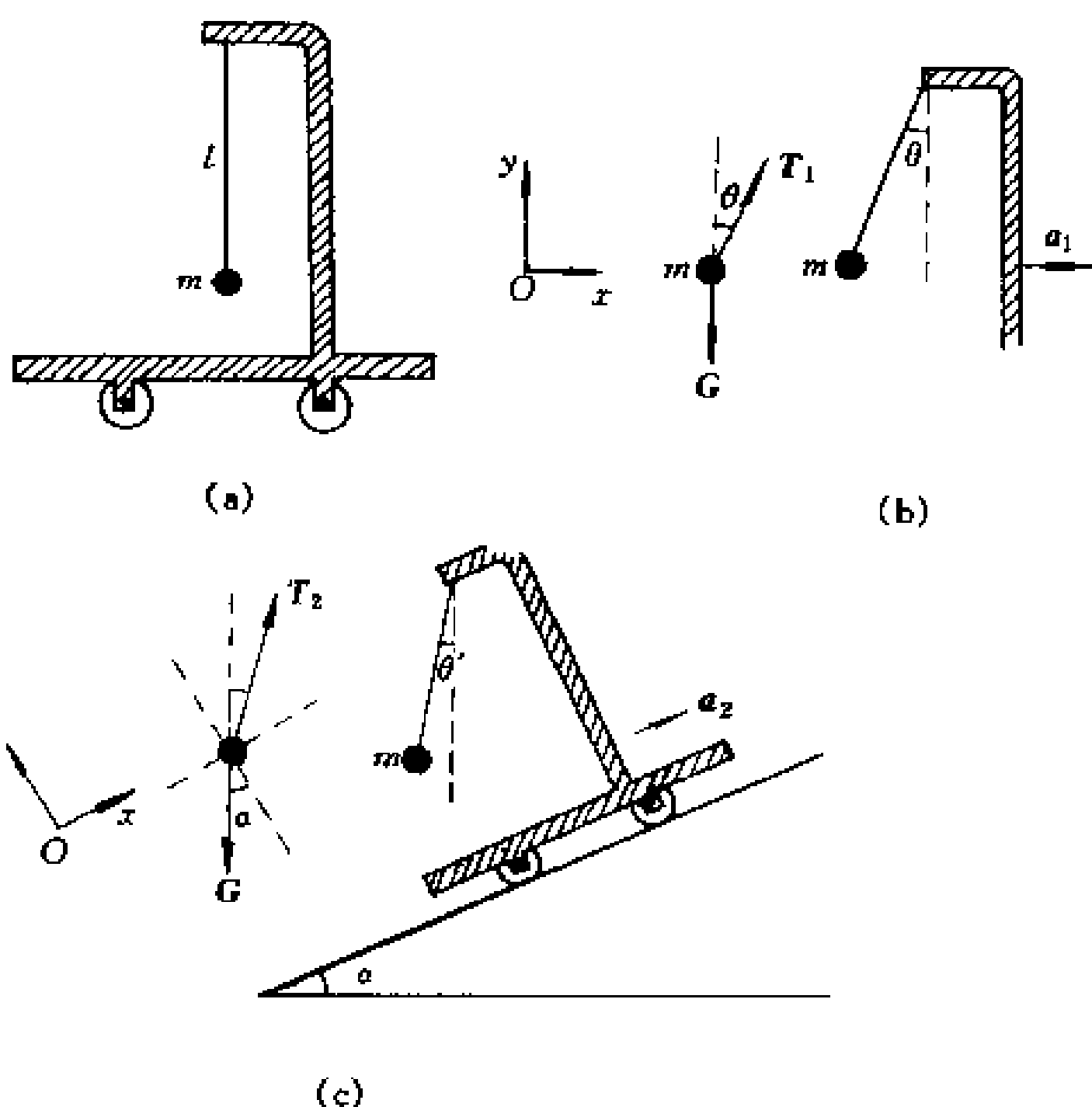
由此可以看出, 当 $a = g$ 时, a_r 与 T 都等于 0, 亦即滑轮、质点都成为自由落体, 两个物体之间没有相对加速度.

例题2-2 一个质量为 m 、悬线长度为 l 的摆锤, 挂在架子上, 架子固定在小车上, 如图2-4(a)所示. 求在下列情况下悬线的方向(用摆的悬线与竖直方向所成的角 θ 表示)和线中的张力:

(1) 当小车沿水平面以加速度 a_1 作匀加速直线运动时;

(2) 当小车以加速度 a_2 沿斜面(斜面与水平面成 α 角)向上作匀加速直线运动时.

解 (1) 当小车以加速度 a_1 向右作匀加速直线运动时, 摆的悬线将向左倾斜. 在摆锤相对于小车来说处于相对静止时, 摆锤的加速度也是 a_1 , 摆的悬线与竖直方向成 θ 角. 这时摆锤所受合力等于 ma_1 , 方向水平向右. 对摆锤来说, 它受到两个力的作用: 重力 G 和绳子对它的拉力 T_1 , T_1 和 G 的合力必在水平面内, 等于 ma_1 , 方向向右. 取坐标轴方向如图2-4(b)所示, 即得



(a) 小车中的单摆

(b) 小车中的单摆(小车向右以加速度 a_1 运动时)

(c) 小车中的单摆(小车以加速度 a_2 沿斜面上升)

图2-4

$$x \text{ 方向: } T_1 \sin \theta = ma_1$$

$$y \text{ 方向: } T_1 \cos \theta - mg = 0$$

由以上两式,可以解出

$$T_1 = m \sqrt{g^2 + a_1^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_1}{g}, \quad \theta = \arctan \frac{a_1}{g}$$

当 $a_1 = 0$ 时, $\theta = 0$; 当 a_1 较大时, 角 θ 也较大.

(2) 当小车以加速度 a_2 沿斜面向上作匀加速直线运动, 在摆锤相对于小车来说处于相对静止时, 摆锤的加速度也是 a_2 , 摆的悬线与竖直方向成 θ' 角. 这时, 对摆锤来说, 它受到重力 G 和绳的

拉力 T_2 的作用, 这两力的合力等于 ma_2 , 方向沿斜面向上. 取坐标轴方向如图2-4(c), 即得

$$x \text{ 方向: } T_2 \cos[90^\circ - (\theta' + \alpha)] - G \sin \alpha = ma_2$$

$$y \text{ 方向: } T_2 \sin[90^\circ - (\theta' + \alpha)] - G \cos \alpha = 0$$

于是
$$T_2 \sin(\theta' + \alpha) = mg \sin \alpha + ma_2$$

$$T_2 \cos(\theta' + \alpha) = mg \cos \alpha$$

由以上两式, 可以解出

$$T_2 = m \sqrt{(g \sin \alpha + a_2)^2 + g^2 \cos^2 \alpha} = m \sqrt{g^2 + 2ga_2 \sin \alpha + a_2^2}$$

$$\operatorname{tg}(\theta' + \alpha) = \frac{g \sin \alpha + a_2}{g \cos \alpha}, \quad \theta' = \arctan \frac{g \sin \alpha + a_2}{g \cos \alpha} - \alpha$$

这里, 如果 $\alpha=0, a_2=a_1$, 这就是情况(1), 由上式可看出 T_2 将等于 T_1 , θ' 等于 θ . 又如果 $a_2=-g \sin \alpha$, 这就是小车在斜面上自由下滑的情况, 这时 $T_2=mg \cos \alpha \neq mg$, 而 $\theta'=-\alpha$, 可见这时悬线方向与斜面相垂直.

读者可以想见, 利用一个系统(例如小车)中的单摆悬线的取向, 可测知这个系统直线运动时的加速度.

例题2-3 一重物 m 用绳悬起(图2-5), 绳的另一端系在天花板上, 绳长 $l=0.5\text{m}$. 重物经推动后, 在一水平面内作匀速率圆周运动, 转速 $n=1\text{r/s}$. 这种装置叫做圆锥摆. 求这时绳和竖直方向所成的角度.

解 重物作匀速圆周运动时, 加速度是向心加速度. 根据牛顿第二运动定律, 合外力的方向应与加速度的方向相同. 因此本题中重物所受合外力, 亦即绳子拉力 T 和重力 $G(=mg)$ 的合力 F , 必定指向圆心. 通常把这种引起向心加速度的合外力称为向心力. 向心力的量值等于质点的质量和向心加速度的乘积.

在竖直方向上, 重物所受的力是平衡的, 即

$$T \cos \theta = G = mg \quad (1)$$

式中 θ 为绳和竖直方向所成的角. 在水平面内, 重物所受的合力 F

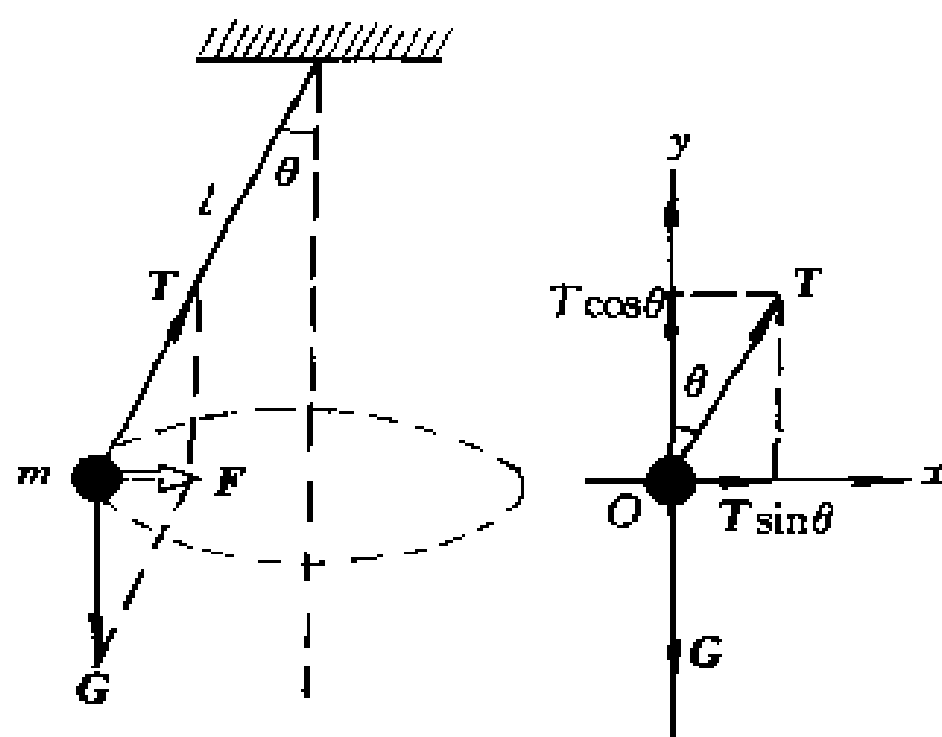


图2-5 圆锥摆

的大小为 $T \sin \theta$, 所以

$$T \sin \theta = ma \quad (2)$$

式中 a 为向心加速度. 由(1)、(2)两式可得

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta = \frac{a}{g} \quad (3)$$

从图中可以看出圆的半径 $R = l \sin \theta$, 圆周长为 $2\pi l \sin \theta$, 所以重物在圆周上运动的速率 $v = 2\pi n l \sin \theta$, 而向心加速度

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi n l \sin \theta)^2}{l \sin \theta} = 4\pi^2 n^2 l \sin \theta \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 得

$$\cos \theta = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l} \quad (5)$$

代入已知数据, 得

$$\cos \theta = \frac{9.8}{4\pi^2 \times 1 \times 0.5} = 0.497$$

即

$$\theta = 60^\circ 13'$$

从式(5)可以看出, 物体的转速 n 愈大, θ 也愈大, 而与重物的质量 m 无关.

应该指出, 工厂里常见的离心节速器就是根据圆锥摆原理制成的.

2. 变力作用下的单体问题

例题2-4 计算一·小球在水中竖直沉降的速度. 已知小球的质量为 m , 水对小球的浮力为 B , 水对小球运动的粘性力为 $R = -Kv$, 式中 K 是和水粘性、小球的半径有关的一个常量.

解 先对小球所受的力作一分析: 重力 G , 竖直向下; 浮力 B , 竖直向上; 粘性力 R , 竖直向上 (图2-6). 取向下方为正, 根据牛顿第二定律, 小球的运动方程可写为

$$G - B - R = ma$$

即
$$mg - B - Kv = ma = m \frac{dv}{dt}$$

或
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{mg - B - Kv}{m} \quad (1)$$

当 $t=0$ 时, 设小球初速为零, 由式(1)可知, 此时加速度有最大值 $\left(= g - \frac{B}{m} \right)$. 当小球速度 v 逐渐增加时, 其加速度就逐渐减小了. 令

$$v_T = \frac{mg - B}{K} \quad (2)$$

于是式(1)可化作

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K(v_T - v)}{m} \quad (3)$$

或
$$\frac{dv}{v_T - v} = \frac{K}{m} dt$$

对上式两边取积分, 则有

$$\int_0^v \frac{dv}{v_T - v} = \int_0^t \frac{K}{m} dt$$

$$\ln \frac{v_T - v}{v_T} = - \frac{K}{m} t$$

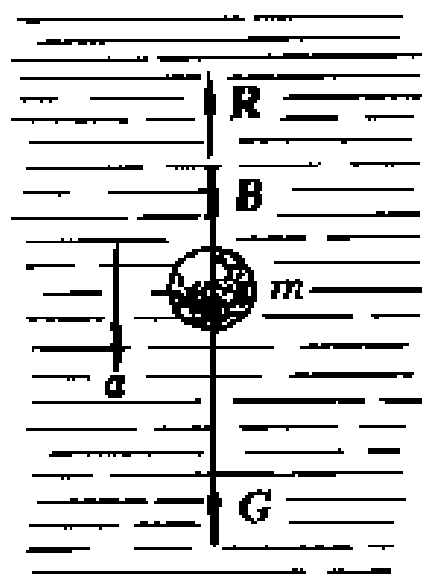


图2-6 小球在水中的沉降

$$v_T - v = v_T e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$v = v_T(1 - e^{-\frac{K}{m}t}) \quad (4)$$

式(4)表明小球沉降速度 v 随 t 增大的函数关系,如图2-7所示.

由式(4)可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时,
 $v = v_T$,而当 $t = \frac{m}{K}$ 时,

$$v = v_T \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.632v_T$$

所以,只要 $t \gg \frac{m}{K}$ 时,就可以认为 $v \approx v_T$. 我们把 v_T 叫做极限速度,它是小球沉降所能达到的最大速度. 也就是说,当下降

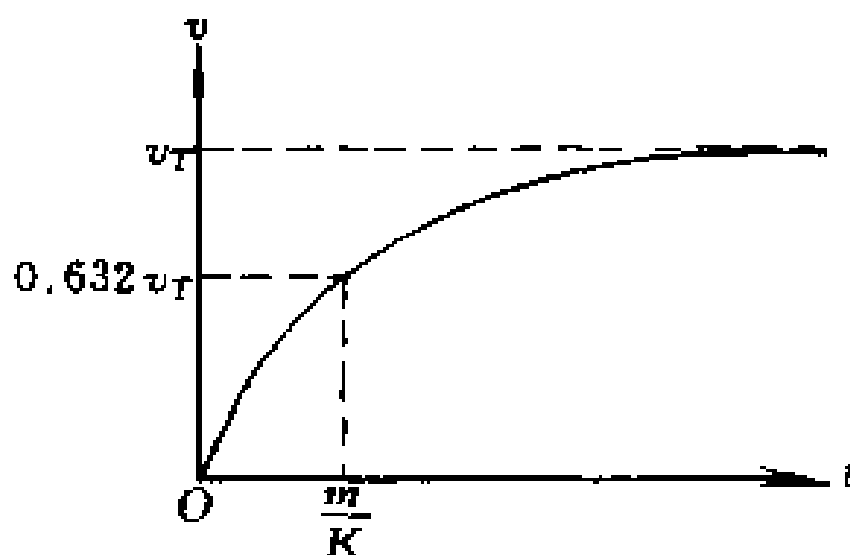


图2-7 沉降速度增长曲线

时间符合 $t \gg \frac{m}{K}$ 条件时,小球即以极限速度匀速下降.

因小球在粘性介质中的沉降速度与小球半径有关,利用不同大小的小球有不同沉降速度的事实,可用来分离大小不同的球形微粒.

所有物体在气体或液体中降落,都存在类似情况. 物体越是紧密厚实,它沉降时极限速度就越大. 典型例子(十分近似)如下:雨滴, 7.6 m/s ; 烟粒, 10^{-3} m/s ; 人 7.6 m/s . 一个极限速度的有趣例子如图2-8所示.

例题2-5 有一密度为 ρ 的细棒,长度为 l ,其上端用细线悬着,下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面. 现将悬线剪断,求细棒在恰好全部没入液体中时的沉降速度. 设液体没有粘性.

解 根据已知条件,液体没有粘性,所以在下落时,细棒只受到两个力:一是重力 G ,方向竖直向下;一是浮力 B ,方向竖直向上,如图2-9所示. 其中 B 是个变力,当棒的浸没长度为 x 时, $B = \rho' xg$ (为方便计,棒的截面积被假设为1个单位). 取竖直向下为 x 轴的正方向,棒所受合外力为



图2-8 飞行员的集体降落表演

$$F = G - B = \rho l g - \rho' x g$$

由式(2-11)得

$$(\rho l - \rho' x)g = m \frac{dv}{dt}$$

因所求的是当浸没长度 x 为 l 时的棒速,所以上式中的变量 l 应消去而只保留 x 和 v 两个变量,考虑到这三个变量之间有关系 $v = \frac{dx}{dt}$,把它代入上式,并整理成如下形式:

$$(\rho l - \rho' x)g dx = m v dv$$

这样就可以积分了.

$$\int_0^l (\rho l - \rho' x)g dx = \int_0^v m v dv = \rho l \int_0^v v dv$$

最后求得

$$v = \sqrt{\frac{2\rho l g - \rho' l g}{\rho}}$$

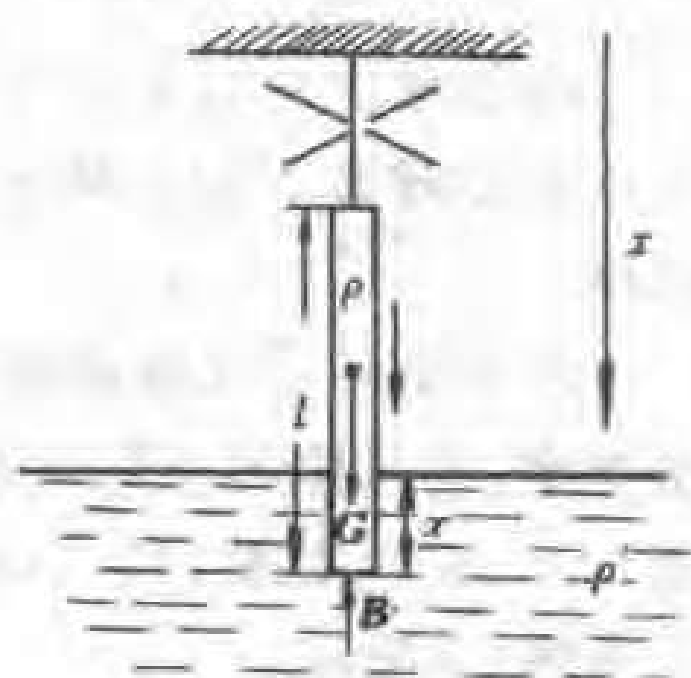


图2-9

总之,通过上述这些例题可以看出,应用牛顿定律解决动力学问题,可按下述思路分析进行:

(1) 认物体

在有关问题中选定一个物体作为分析对象. 如果问题涉及几个物体,那就一个一个地作为对象进行分析,认定出每个物体的质量.

(2) 看运动

分析所认定物体的运动状态,包括它的轨迹、速度和加速度. 问题涉及几个物体时,还要找出它们运动学的联系,亦即它们的速度或加速度之间的关系.

(3) 查受力

找出被认定物体所受的一切外力,不能有所遗漏. 这些力可能是重力、弹力、摩擦力等等. 而弹力又常常表现为接触面的压力或绳子的拉力. 画出示力图,把物体受力情况和运动情况表达出来.

(4) 列方程

把上面分析出的质量、加速度和力用牛顿第二定律联系起来,列出方程式. 在方程式足够的情况下就可以求解未知量了.

(5) 作讨论

通过分析讨论,巩固和增强对物理概念和定律的理解,提高分析能力.

§ 2-5 牛顿第二定律积分形式之一:动量定理

在上面,我们主要考虑的是力的瞬时效果,物体在外力作用下立即产生瞬时加速度. 但是,我们今后非常广泛地分析讨论的主题是:当一个力作用于物体并维持一定时间,其效果将是什么?也就是说,我们关心的不是加速度,而是在力对物体作用一定时间后物体的速度. 这类问题在例题2-5中已初露端倪,似乎直接应用牛顿第二定律的瞬时关系式或微分形式都还不够方便,最终都得借助

于积分才能得出结果.这就自然而然地引出一个问题,有没有牛顿第二定律的积分形式,以利于这类问题的计算.回答是肯定的.但对这问题能够给出不止一种答案,这要看我们究竟是考虑力所作用的时间呢还是距离.不管是力的作用时间还是距离,现在我们将把注意力从力和运动的瞬时关系转向力和运动的过程关系.

1. 动量定理

现在,我们直接从牛顿第二定律的微分形式

$$Fdt = dp$$

出发,考察力的时间累积效果.为此,将上式从 t_1 到 t_2 这段有限时间进行积分,即得

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 \tag{2-13}$$

左侧积分表示外力在这段时间内的累积量,叫做力的冲量,写成 I ,即

$$I = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

(2-14)

于是式(2-13)可表示为

$$I = p_2 - p_1$$

(2-15)

式(2-13)或式(2-15)就是牛顿第二定律的一种积分形式.它表明,物体在运动过程中所受合外力的冲量,等于该物体动量的增量.这个结论叫做动量定理:

动量的概念早在牛顿定律建立之前,由笛卡儿(R. Descartes)于1644年引入,它纯粹是描述物体机械运动的一个物理量.我们知道,要使速度相同的两辆车停下来,质量大的就比质量小的要困难些;同样,要使质量相同的两辆车停下来,速度大的就要比速度小的困难些.由此可见,在研究物体机械运动状态的改变时,必须同时考虑质量和速度这两个因素,为此而引入了动量的概念.动量定

理使人们认识到：力在一段时间内的累积效果，是使物体产生动量增量。要产生同样的效果，即同样的动量增量，力大力小都可以，但是力大的需要时间短些，力小的需要时间长些。只要力的时间累积量即冲量一样，就能产生同样的动量增量。

下面对动量定理作几点说明。

(1) 如果 F 是个方向和大小都变的变力，则式(2-13)中 I 的方向和大小要由这段时间内所有微分冲量 Fdt 的矢量和来决定，而不能由某一瞬时的 F 来决定。只有当 F 的方向恒定不变时，式(2-13)中的 I 才和 F 同方向。令人鼓舞的是，尽管外力在运动过程中时刻改变着，物体的速度方向可以逐点不同，动量定理却又总是遵守着的，亦即不管物体在运动过程中动量变化的细节如何，冲量的大小和方向总等于物体始末动量的矢量差。这便是应用动量定理解决问题的优点所在。由于动量定理是个矢量方程，在一般情况下，冲量的方向并不一定和质点的初动量或末动量方向相同。帆船能够逆风行驶，是这一结论的生动例证。图2-10表示，风从与船身

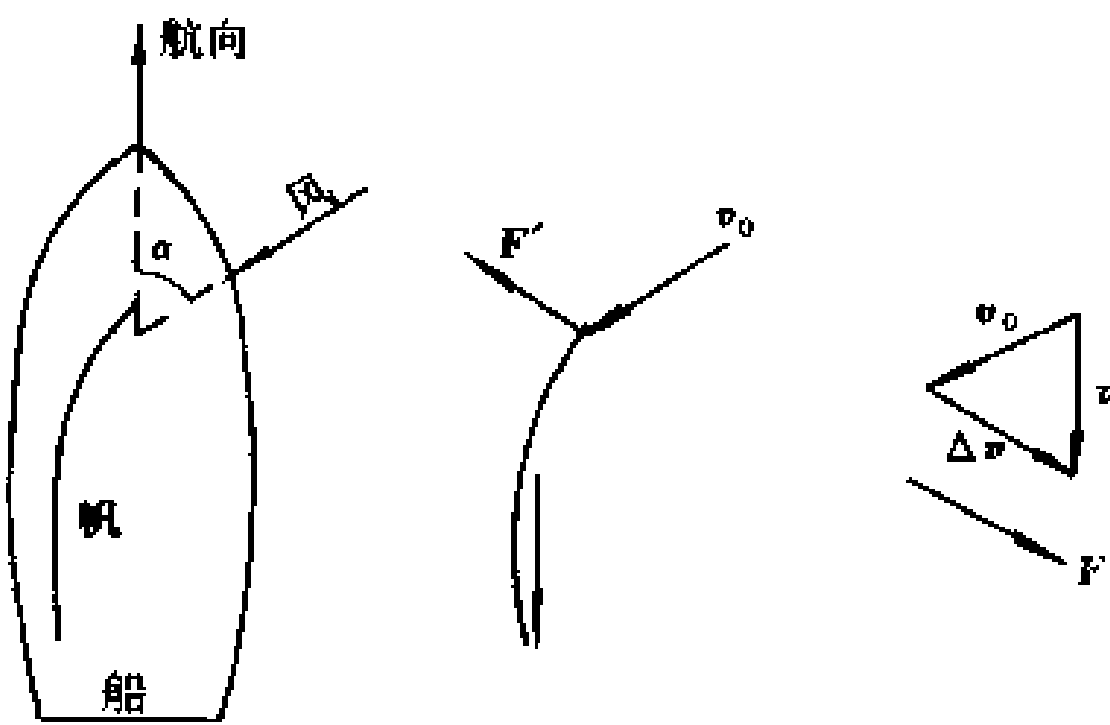


图2-10 逆风行舟的分析

成锐角 α 的方向吹来。经验表明，只要帆的方位与帆形合适，帆船能在风力作用下逆风前进。利用动量定理，就可解释这种貌似奇怪的现象。设风的初速为 v_0 。风吹到帆上后，由于帆的作用，速度变为

v , v_0 和 v 的大小相差不大, 但方向改变了. 根据动量定理, 风所受帆的作用力 F 应和风的速度增量 Δv 的方向一致. 根据牛顿第三定律, 风给帆的作用力 F' 应与 F 相等而反向, 如图所示, F' 在沿船身方向的分力将推动帆船前进.

由于动量定理是个矢量方程, 应用时可以直接用矢量作图, 也可以写成坐标系中的投影式. 在平面直角坐标系中, 有

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \end{aligned} \quad (2-16)$$

在国际单位制中, 冲量的单位是 $1\text{N}\cdot\text{s}$, 动量的单位是 $\text{kg}\cdot\text{m/s}$, 这两者其实是一致的, 因为 $1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$, 所以 $1\text{N}\cdot\text{s}=1(\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\cdot\text{s}=1\text{kg}\cdot\text{m/s}$.

(2) 动量定理在碰撞或冲击问题中有其重要意义, 它给我们带来不少方便. 在碰撞中, 两物体相互作用的时间极为短促, 有的短达几千分之一秒, 有的甚至更短一些. 并且, 在这样短促的时间内, 作用力迅速达到很大的量值, 然后又急剧地下降为零, 其情况如图2-11所示. 这种量值很大、变化很快、作用时间又很短的力, 一般称为冲力, 因为冲力是个变力, 它随时间而变化的关系又比较难以确定, 所以表示瞬时

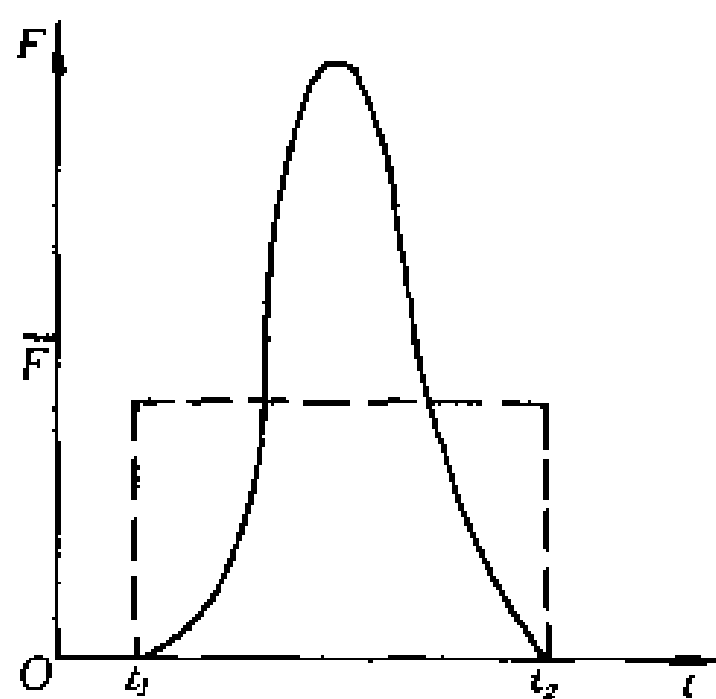


图2-11 冲力示意图

关系的牛顿第二定律无法直接应用. 但是, 根据动量定理, 我们能够肯定冲力的冲量所具有的确定的量值. 因为我们可从实验测出物体在碰撞或冲击前后的动量, 从而由动量差值来决定冲量的量值. 此外, 如果还能测定冲力的作用时间, 我们就可对冲力的平均大小作出估算. 在图2-11中 $\bar{F}$ 表示变力 F (其方向是一定的) 的平

均大小,它是这样定义的,令 $\bar{F}$ 横线下的面积和变力 F 曲线下的面积相等,亦即 $\bar{F}$ 和作用时间 $t_2 - t_1$ 的乘积应等于变力 F 的冲量.当然,冲力的平均值小于冲力的峰值.在一些实际问题,冲力平均值的估算是很需要的.

在生产中,我们时常要利用冲力,增大冲力;有时又要减小冲力,避免冲力造成损害.例如,利用冲床冲压钢板,由于冲头受到钢板给它的冲量的作用,冲头的动量很快地减到零,相应的冲力很大.根据牛顿第三定律,钢板所受的反作用冲力也同样很大,所以钢板被冲断了.这是利用冲力的例子.又如渡轮驶靠码头时,在码头和船只相接触处都装有橡皮轮胎作为缓冲装备,这是为了延长碰撞时间以减小冲力.火车车厢两端的缓冲器和车厢底下的减震器,都是为了达到这样的目的.在日常生活中也有这样的例子.当人们用手去接对方抛来的篮球时,手在接触篮球后,要先向后退缩一下,再把篮球刹住,其目的也是延缓篮球对手的接触时间,从而减小篮球对手的冲力.

(3) 我们曾提到过,当物体质量改变时,牛顿第二定律式(2-5)是不适用的,因为定律中的 m 是个不变量.但变质量问题大量存在于现实生活中.例如滚雪球时球愈滚愈大;雨滴或冰雹在过饱和水气中降落时,因水气不断凝结其上而使质量变大.这些是质量变大的情况.还有质量减少的情况.例如洒水车因喷出水来而质量变小;又如火箭在升空过程中,由于喷出燃气也使质量变小.这类现象组成了力学中独特的一章,叫做“变质量物体的力学”.根据动量定理,我们可以建立变质量物体的运动方程.动量在这里大显身手,其重要性就不言而喻了.

2. 变质量物体的运动方程

设某物体的质量在 t 时为 m ,它的速度为 $\mathbf{v}$ ($\ll c$).另有一质元 dm ,以速度 $\mathbf{u}$ 运动着.在 $t + dt$ 时, dm 与 m 相合并,合并后的共同速度是 $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.我们用 $\mathbf{F}$ 表示在这段时间里作用在 m 与 dm 这系

统上外力的矢量和. 根据动量定理, 物体系统的动量变化决定于所受外力矢量和的冲量, 即

$$(m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v} - u dm = F dt$$

在上式中, 略去二阶微量 $dm \cdot d\boldsymbol{v}$, 并用 dt 除上式两端, 得

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) - \frac{dm}{dt}u = F} \quad (2-17)$$

上式就是变质量物体运动方程的微分形式. 这个方程的意义可理解如下: u 是质元 dm 未与 m 合并之前或从 m 分出之后一刹那的速度. $\frac{dm}{dt}$ 是质量的时间变化率, 它可正可负. 与 dm 比较, 可把质量为 m 的物体叫做主体. 那么, 在质量减少的情况下, 上式表明, 主体动量的时间变化率 $\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})$ 等于外力 F 与被喷射物质在单位时间带走的动量 $-u \left| \frac{dm}{dt} \right|$ 之和; 而在质量增大的情况下, 上式表明, 主体动量的时间变化率等于外力 F 与被附加物质在单位时间带来的动量 $u \frac{dm}{dt}$ 之和.

例题2-6 质量 $M=3\text{ t}$ 的重锤, 从高度 $h=1.5\text{ m}$ 处自由落到受锻压的工件上 (图2-12), 工件发生变形. 如果作用的时间 (1) $\tau=0.1\text{ s}$, (2) $\tau=0.01\text{ s}$. 试求锤对工件的平均冲力.

解 解法一: 取重锤为研究对象. 在 τ 这段时间内, 作用在锤上的力有两个: 重力 G , 方向向下; 工件对锤的支持力 N , 方向向上. 此支持力是个变力, 在这极短时间 τ 内迅速变化, 我们用平均支持力 $\bar{N}$ 来代替.

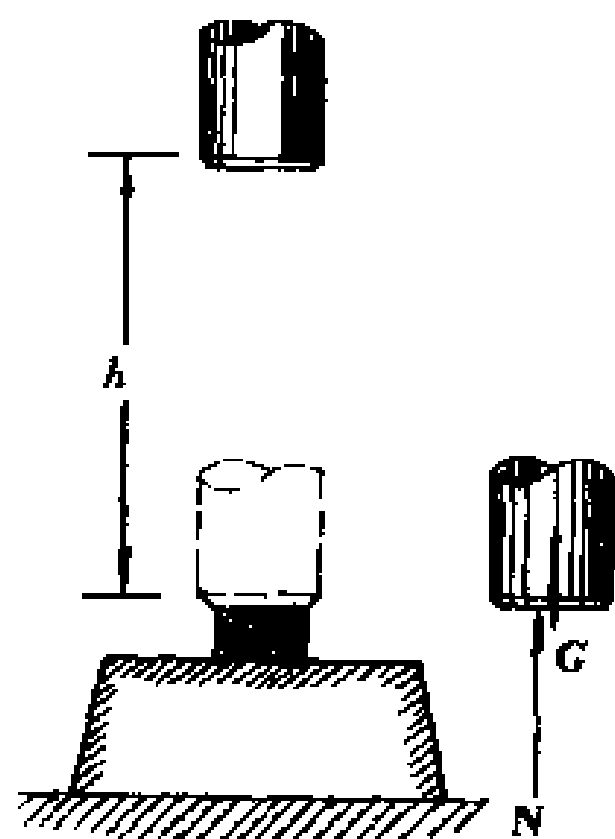


图2-12 锻压工件

由自由落体公式, 可以求出锤刚接触工件时的速度为 $v_0 =$

$\sqrt{2gh}$. 在这极短时间 τ 内, 锤的速度由初速度 v_0 变到末速度 $v = 0$. 如取竖直向上的方向为坐标轴的正方向, 那么, 根据动量定理得到

$$(\bar{N} - G)\tau = 0 - (-Mv_0) = M\sqrt{2gh}$$

由此得

$$\bar{N} = \frac{M\sqrt{2gh}}{\tau} + G = Mg\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2h}{g}} + 1\right)$$

将 M 、 h 、 τ 的数值代入, 求得

$$\begin{aligned} (1) \tau = 0.1 \text{ s 时}, \bar{N} &= 0.3 \times 10^3 \times 9.8 \times \left(\frac{1}{0.1}\sqrt{\frac{2 \times 1.5}{9.8}} + 1\right) \text{ N} \\ &= 0.19 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \tau = 0.01 \text{ s 时}, \bar{N} &= 0.3 \times 10^3 \times 9.8 \times \left(\frac{1}{0.01}\sqrt{\frac{2 \times 1.5}{9.8}} + 1\right) \text{ N} \\ &= 0.17 \times 10^6 \text{ N} \end{aligned}$$

重锤对工件的平均冲力 $\bar{N}'$ 的大小等于工件对锤的平均支持力 $\bar{N}$, 所以 $\bar{N}' = 0.19 \times 10^5 \text{ N}$ 和 $0.17 \times 10^6 \text{ N}$, 但方向竖直向下. 由上面的计算知道, 锤的自重 ($= 0.29 \times 10^4 \text{ N}$) 对平均冲力是有影响的. 但在第二种情况中, 锤对工件的平均冲力 $\bar{N}'$ 比锤的自重大几十倍, 因此, 在计算过程中, 可以忽略锤的自重的影响.

解法二: 动量定理不仅用于锤与工件接触的短暂时间, 也可用于锻压时重锤运动的整个过程. 设锤自由落下 h 高度的时间为 t , 显然

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

在这锻压的整个过程中, 重力 G 的作用时间为 $(t + \tau)$, 它的冲量大小等于 $G(t + \tau)$, 方向竖直向下; N 的作用时间为 τ , 它的冲量大小为 $\bar{N}\tau$, 方向竖直向上. 由于重锤在这整个过程的初、末速度均为零, 所以它的初、末动量均为零. 如取竖直向上的方向为坐标轴的正方向, 那么, 根据动量定理得到

$$\bar{N}\tau - G(t + \tau) = 0$$

由此得

$$\bar{N} = G\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) = Mg\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2h}{g}} + 1\right)$$

这和解法一的结果相同.

例题2-7 一绳跨过一定滑轮, 两端分别拴有质量为 m 及 M 的物体 A 和 B(图2-13), M 大于 m . B 静止在地面上, 当 A 自由下落 h 距离后, 绳子才被拉紧. 求绳子刚被拉紧时两物体的速度, 以及 B 能上升的最大的高度.

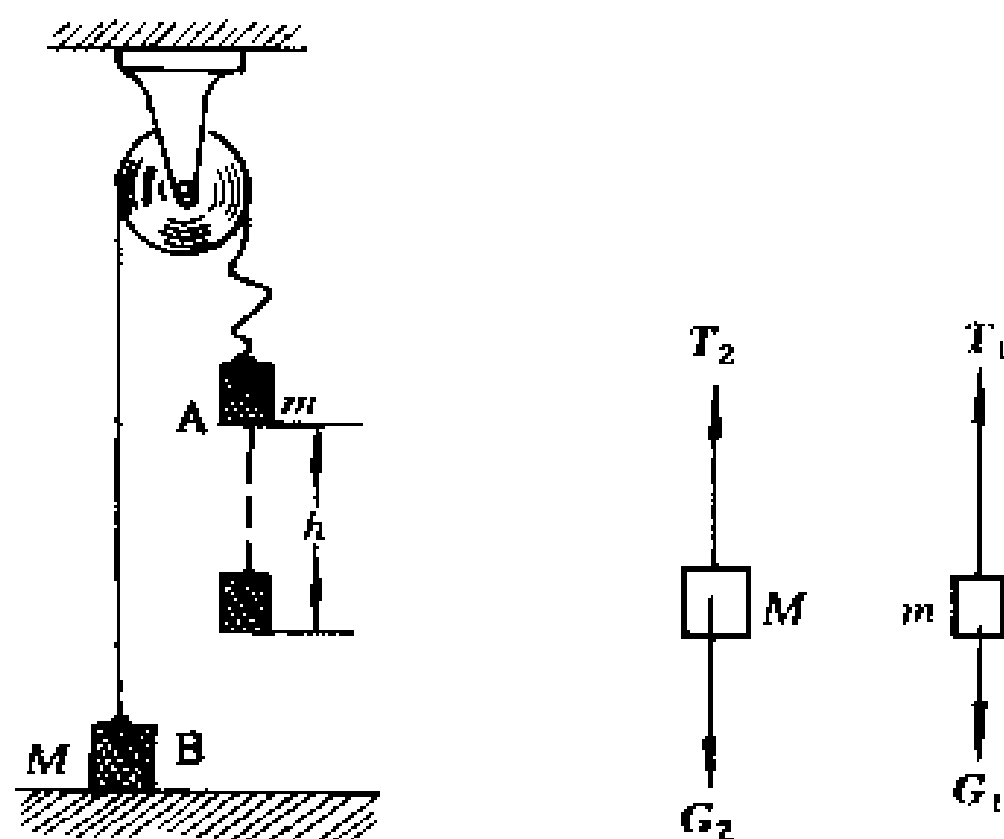


图2-13 跨接在定滑轮两端的物体的运动

解 已知物体 A 自由下落 h 距离时, 正好绳子拉紧, 此时 A 的速度为

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

当绳子拉紧时, A 和 B 除受到重力外, 还同时受到绳子的冲力作用, 经过极短时间 Δt 后, 它们以相等的速率 V 运动^①, B 的速度向

^① 只有当绳子完全没有弹性时, 这两个物体才以相等速率运动. 实际上, 绳子或多或少都有些弹性, 这时, 这两个物体将分别以不同速率运动, 经过一段动荡不定之后才以相等速率开始运动.

上, A 的速度向下. 因此 B 在受到冲量的前后速度分别为 0 及 $+V$, 而 A 分别为 $-v$ 及 $-V$ (我们以向上的速度为正, 向下的为负). 根据动量定理, 得

$$(T_1 - G_1)\Delta t = -mV - (-mv) \quad (2)$$

和

$$(T_2 - G_2)\Delta t = mV - 0 \quad (3)$$

式中 T_1 是 A 所受的向上的冲力, T_2 是 B 所受的向上的冲力. T_1 和 T_2 相等, 都等于这时绳子中的张力. A 和 B 所受的重力与冲力相比较, 可以忽略不计. 因 $T_1 = T_2$, 从式(2)和式(3)得

$$V = \frac{mv}{M + m}$$

将式(1)中的 v 代入, 得

$$V = \frac{m \sqrt{2gh}}{M + m}$$

绳子拉紧后, A 和 B 两物体分别作向下和向上的加速运动, 加速度 a 可根据牛顿运动定律求得:

$$a = \frac{M - m}{M + m}g$$

B 以初速 V 上升, 其加速度方向与速度方向相反, 设最后 B 上升的高度为 H , 这时它的瞬时速度为零, 于是

$$0 = V^2 - 2aH$$

所以
$$H = \frac{V^2}{2a} = \frac{m^2(2gh)}{2(M^2 - m^2)g} = \frac{m^2h}{(M^2 - m^2)}$$

例题2-8 矿砂从传送带 A 落到另一传送带 B [图2-14(a)], 其速度 $v_1 = 4\text{m/s}$, 方向与竖直方向成 30° 角, 而传送带 B 与水平成 15° 角, 其速度 $v_2 = 2\text{m/s}$. 如传送带的运送量恒定, 设为 $k = 20\text{ kg/s}$, 求落到传送带 B 上的矿砂在落上时所受到的力.

解 设在某极短的时间 Δt 内落在传送带上矿砂的质量为 m , 即 $m = k\Delta t$, 这些矿砂动量的增量为

$$\Delta(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

其量值可用矢量差方法求得 [参看图2-14(b)]

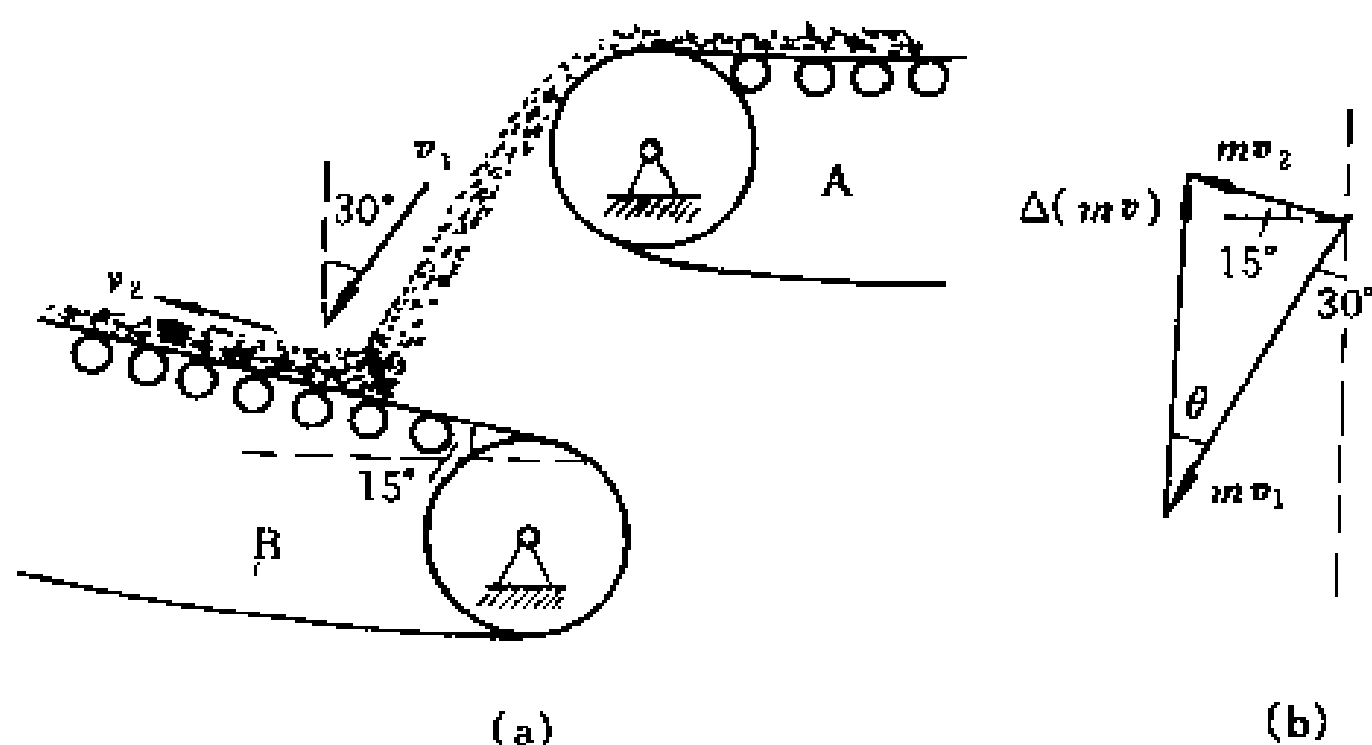


图2-14 传送带传送矿砂

$$|\Delta(mv)| = m \sqrt{4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \cos 75^\circ} \text{ m/s} \\ = 3.98m \text{ m/s} = 3.98k\Delta t \text{ m/s}$$

设这些矿砂在 Δt 时间内的平均作用力为 $\bar{F}$, 根据动量定理,

$$\bar{F}\Delta t = \Delta(mv)$$

于是

$$\bar{F} = \frac{|\Delta(mv)|}{\Delta t} = \frac{3.98k\Delta t \text{ m/s}}{\Delta t} = 79.6 \text{ N}$$

作用力 $\bar{F}$ 的方向与 $\Delta(mv)$ 的方向相同, 图2-14(b)中的 θ 角可由下式求得:

$$\frac{|\Delta(mv)|}{\sin 75^\circ} = \frac{mv_2}{\sin \theta} \\ \theta = 29^\circ$$

即作用力 $\bar{F}$ 近似地沿竖直方向向上.

例题2-9 质量为 m 的匀质链条, 全长为 L , 手持其上端, 使下端离地面的高度为 h . 然后放手让它自由下落到地上, 如图2-15所示. 求链条落到地上的长度为 l 时, 地面所受链条作用力的大小.

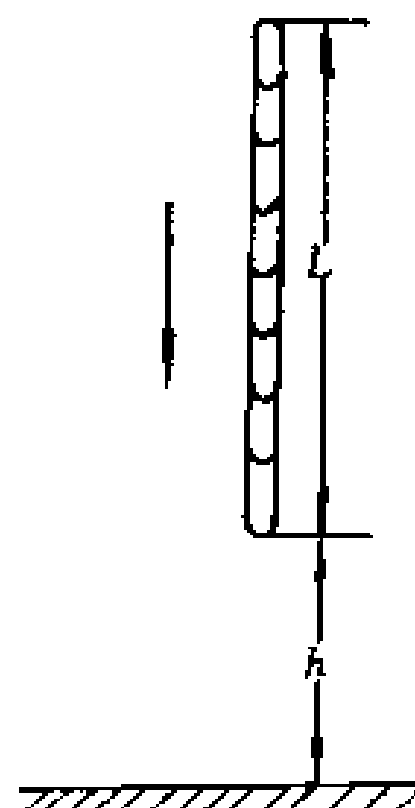


图2-15 链条下落

解 此题可用变质量物体运动方程的微分

形式求解. 因落在地面上链段 m_l 速度为零, 所以式(2-17)中 $u=0$. 作用在未落地部分 $(m-m_l)$ 上的外力有两个: 重力 G , 大小为 $(m-m_l)g$, 方向向下; 地面给它的冲力 f , 方向向上. 取向下为正, 由式(2-17)可得

$$\frac{d}{dt}[(m-m_l)v] = (m-m_l)g - f$$

或
$$v \frac{d}{dt}(m-m_l) + (m-m_l) \frac{dv}{dt} = (m-m_l)g - f$$

因在自由下落中, $\frac{dv}{dt}=g$, 所以上式简化成

$$v \frac{d}{dt}(m-m_l) = -f$$

考虑到 $m_l = \frac{m}{L}l$, 又因 $v = \frac{dl}{dt}$, 即得

$$f = \frac{m}{L}v^2 = \frac{2m(l+h)}{L}g$$

式中 v 为即将着地部分 $m-m_l$ 的速度, 其值按自由落体公式为 $\sqrt{2g(l+h)}$, 已经代入. 在上式中 f 的反作用上加入已落地部分 m_l 的静压力, 即得最后结果为

$$F = \frac{2m(l+h)}{L}g + \frac{ml}{L}g = \frac{m}{L}(3l+2h)g$$

§ 2-6 牛顿第二定律积分形式之二: 动能定理

一个运动的物体, 在力的作用下, 经历了一个过程然后得到某个速度, 由其初始状态改变为终末状态. 我们知道, 任何过程都是在时间和空间内进行的, 因此, 对运动过程的研究离不开时间和空间. 在上一节, 我们研究了力的时间累积作用, 它导致了牛顿第二定律的一种积分形式. 在本节中, 我将研究力的空间累积作用, 它将导致牛顿第二定律的另一种积分形式.

1. 功的概念

在很多实际情况中,一个物体受的力随它的位置而改变,而且力和位置的关系事先是知道的.在这种情况下,我们常常需要知道在物体的运动过程中,力的空间累积将给物体带来什么效果.为了表示力的空间累积,我们引入功的概念.

物体在力 F 的作用下发生一无限小的位移 $d\mathbf{r}$ (元位移)时,此力对它做的功定义为,力在位移方向上的投影和此元位移大小的乘积.以 dA 表示元功,则

$$dA = (F \cos \varphi) |d\mathbf{r}| \quad (2-18)$$

式中 φ 为 F 与 $d\mathbf{r}$ 之间的夹角.我们把两个矢量的上述乘积叫做矢量的标积,并简写成

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2-19)$$

标积意思是乘积为一标量(只有大小和正负,没有方向的量),因为一般如式(2-19)那样采用了“ $\cdot$ ”号,所以也叫点积.这样,功的定义是功等于力和位移的点积.

功是个标量,它没有方向,但有正负.

当 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时, $dA > 0$, 力对物体作正功.

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $dA = 0$, 力对物体不作功. 当

$\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ 时, $dA < 0$, 力对物体作负功. 这

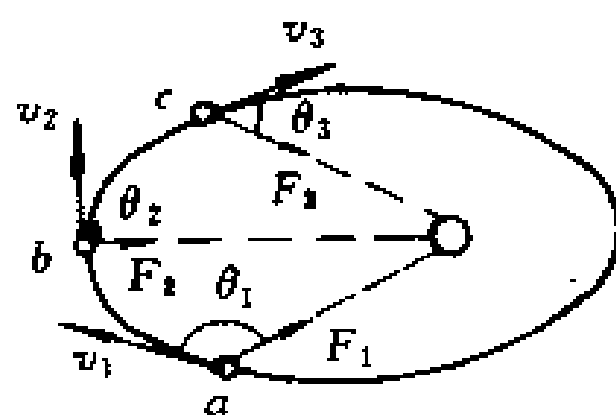


图2-16

最后一种情况常被说成物体在运动中克服外力 F 作了功. 在行星绕日运动中,起作用的是太阳的引力. 如图2-16所示,此引力有时对行星作负功(a 点),有时作正功(c 点),有时不作功(b 点).

力在单位时间内作的功叫做功率,用 P 表示:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2-20)$$

功率这个物理量被用来表明力作功的快慢程度. 功率愈大,作同样的

功所花费的时间就愈少, 做功的效率也愈高. 它是个很有用的物理量.

在国际单位制中, 力的单位是 N , 位移的单位是 m , 因此功的单位是 $N \cdot m$, 叫做 J (焦耳). 功率的单位是 J/s , 叫做 W (瓦).

2. 能量

人们在生产活动和科学实践中发现, 物质运动的形式是多种多样的, 各种运动形式都可由一些物理量来量度, 如动量就是机械运动的一种量度; 但不同的运动形式又是可以互相转化的, 而且在转化时存在着一定的数量关系, 这就是说, 一定量的某种运动形式的产生, 总是以一定量的另一种运动形式的消失为代价的. 为了探求各种运动形式的相互转化以及在转化中所存在的数量关系, 我们必须选用一个能够反映各种运动形式的共性的物理量, 作为各种运动形式的一般量度, 这个量就是能量. 能量的概念最早是由19世纪初英国物理学家杨(T. Young)引入的. 它很快就进入了力学、热学和电磁学领域. 能量概念的巨大价值在于它形式上的多样性以及不同能量形式之间的可转换性. 有关能量与能源的开发和利用的研究, 对于当代社会和人类未来有着深远的意义. 对应于物体的某一状态, 必定有一个而且只能有一个能量值. 如果物体状态发生变化, 它的能量值也随之变化. 因此, 能量是物体状态的单值函数. 物体作机械运动, 它的状态是用位置和速度描述的, 我们把位置和速度叫做状态参量. 这样, 量度机械运动的机械能应是位置和速度的单值函数. 现在, 我们将通过动能定理的介绍, 了解机械能的一种具体表式以及它与功的关系.

3. 牛顿第二定律的又一积分形式

当物体在变力 f 作用下, 从 a 点沿曲线运动到 b 点时, 我们用 v_a 和 v_b 分别表示它在起点 a 和终点 b 处的速度, 如图2-17所示. 由式(2-18), 变力 f 在这过程中所作的功是

$$A = \int_a^b f \cos \varphi |dr|$$

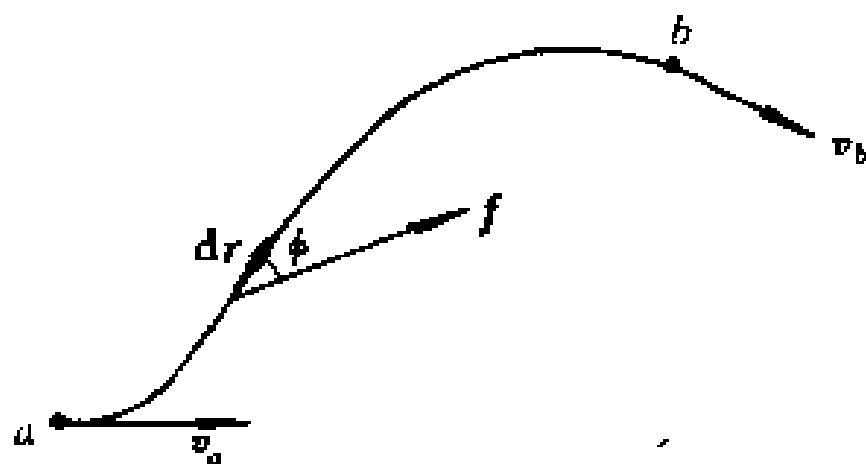


图2-17 变力的功

根据牛顿第二定律,有

$$f \cos \varphi = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

因速度 $|v| = \frac{|dr|}{dt}$, 所以 $f \cos \varphi |dr| = m \frac{dv}{dt} v dt = m v dv$, 代入上式, 即得

$$A = \int_{v_a}^{v_b} m v dv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 \quad (2-21)$$

式中的 $\frac{1}{2} m v^2$ 叫物体的动能, 用 E_k 表示, 即

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2-22)$$

它是机械能的一种形式. 这样, 式(2-21)就可写成

$$A = E_{kb} - E_{ka} \quad (2-23)$$

式(2-21)或式(2-23)是我们寻求的牛顿第二定律又一积分形式, 它常被叫做动能定理. 动能定理告诉我们: 合外力对物体作的功总等于物体动能的增量. 当 $A > 0$ 时, 作用于物体上的合外力作正功, 结果是使物体增加了动能; 当 $A < 0$ 时, 作用于物体上的合外力作负功, 其结果是使物体减少了动能.

应该指出, 动能定理适用于物体的任何运动方程, 物体在外力的持续作用下经历某一段路程, 不管外力是否是变力, 也不管物体运动状态如何复杂, 其路程是曲线还是直线, 合外力对物体所作的功总是取决于物体始末动能之差. 这样, 动能定理在解决某些力学

问题时,往往比直接运用牛顿第二定律的瞬时关系要简便得多.

动能和功的单位是一样的,但是意义不同.功反映力的空间累积,其大小取决于过程,是个过程量,动能表示物体的运动状态,是个状态量,或者叫做状态函数.动能定理启示我们:功是物体在某过程中能量改变的一种量度,这个观点将有助于我们去识别与理解其它形式的能量.

动能定理也有其微分形式.从功率的表达式得

$$\frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

考虑到 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \varphi |d\mathbf{r}|$,由动能定理可知,这是动能的微小变化,可写成 dE ,以此代入上式,即得

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dE}{dt} \quad (2-24)$$

上式就是物体动能定理的微分形式.

最后应该指出,由于位移和速度的相对性,功和动能也都有相对性,它们的大小都依赖于参考系的选择.一颗飞行着的子弹,对速度和它一样的飞机来说,动能是等于0的,这颗子弹对飞机中驾驶员毫无威胁.但对固定在地面的物体来说,它将穿到物体中去,子弹的动能就不能等闲视之了.但是,尽管功和动能都依赖于参考系的选择,在不同参考系中各有不同的量值,而在每个参考系中却都存在着各自的动能定理.这就是说,动能定理的形式与参考系的选择无关.动能定理的这种不变性,为人们应用它提供了很大的方便.

例题2-10 装有货物的木箱,重 $G=980\text{ N}$,要把它运上汽车.现将长 $l=3\text{ m}$ 的木板搁在汽车后部,构成一斜面,然后把木箱沿斜面拉上汽车.斜面与地面成 30° 角,木箱与斜面间的滑动摩擦系数 $\mu=0.20$,绳的拉力 F 与斜面成 10° 角,大小为 700 N ,如图2-18(a)所示.求:(1)木箱所受各力所作的功;(2)合外力对木箱所作的功;(3)如改用起重机把木箱直接吊上汽车,能不能少做些功?

解 木箱所受的力为:拉力 F ,方向与斜面成 10° 角向上;重力

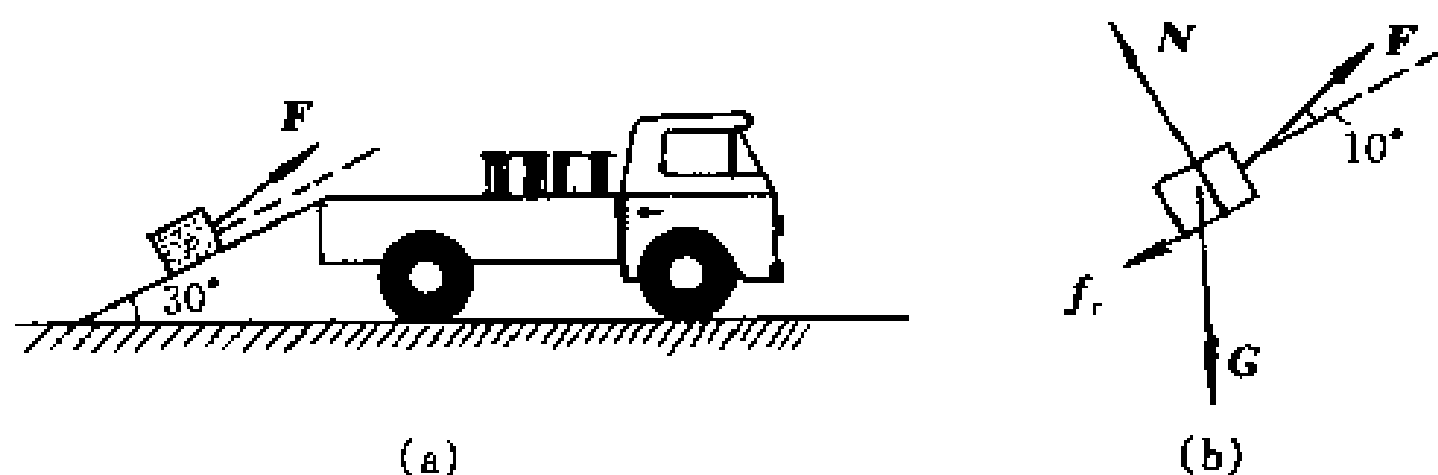


图2-18 例题2-10图

G , 方向竖直向下; 斜面对木箱的支持力 N , 方向垂直于斜面向上, 斜面对木箱的摩擦力 f_r , 方向和斜面平行, 与木箱运动方向相反, 如图2-18(b). 已知 $l = 3 \text{ m}$, 每个力所作的功可计算如下.

(1) 拉力 F 所作的功 A_1 ,

$$A_1 = Fl \cos 10^\circ = 700 \times 3 \times 0.985 \text{ J} = 2.07 \times 10^3 \text{ J}$$

重力 G 所作的功 A_2 ,

$$\begin{aligned} A_2 &= Gl \cos(180^\circ - 60^\circ) = 980 \times 3 \times (-0.5) \text{ J} \\ &= -1.47 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

正压力 N 所作的功 A_3 ,

$$A_3 = Nl \cos 90^\circ = 0$$

摩擦力 f_r 所作的功 A_4 : 分析木箱在垂直斜面方向上的受力情况, 由于木箱在垂直于斜面方向上没有运动, 根据牛顿第二定律得

$$N + F \sin 10^\circ - G \cos 30^\circ = 0$$

所以 $N = G \cos 30^\circ - F \sin 10^\circ = 727 \text{ N}$

由此可求得摩擦力

$$f_r = \mu N = 0.20 \times 727 \text{ N} = 145 \text{ N}$$

那么 $A_4 = f_r l \cos 180^\circ = -145 \times 3 \text{ J} = -435 \text{ J}$

因为重力和摩擦力在这里是阻碍物体运动的力, 所以它们对物体所作的功都是负值.

(2) 根据合力所作功等于各分力所作功的代数和, 算出合力所作的功

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 165 \text{ J}$$

(3) 如改用起重机把木箱吊上汽车, 这时所用拉力 F' 至少要等于重力 G . 在这个拉力 ($F' = 980 \text{ N}$) 的作用下, 木箱移动的竖直距离是 $l \sin 30^\circ$. 因此, 拉力所作的功为

$$A' = F' l \sin 30^\circ = 980 \times 30 \times (0.5) \text{ J} = 1.47 \times 10^3 \text{ J}$$

它等于重力 G 所作的功, 而符号相反 (因这时合外力 $F' + G$ 所作的功为零). 与 (1) 中 F 作的功相比较, 用了起重机能够少作功. 我们还发现, 虽然 F' 比 F 大, 但所作的功 A' 却比 A_1 为小, 这是因为功的大小不完全取决于力的大小, 还和位移的大小以及位移与力之间的夹角有关. 为了把木箱装上汽车, 我们所需要作的最小功等于克服重力所作的功, 其大小为 $1.47 \times 10^3 \text{ J}$, 这对于利用斜面或是利用起重机甚至其他机械都是一样的. 机械不能省功, 但能省力或省时间. 正是这些场合, 使我们对功的概念的重要性加深了认识. 现在, 在 (1) 中推力 F 所多作的功

$$2.07 \times 10^3 \text{ J} - 1.47 \times 10^3 \text{ J} = 0.60 \times 10^3 \text{ J}$$

起的是什麼作用呢? 我们说: 第一, 为了克服摩擦力, 用去了 435 J 的功, 它最后转变成热量; 第二, 余下的 165 J 的功将使木箱的动能增加.

例题2-11 利用动能定理重做例题2-5.

解 如图2-9所示, 细棒下落过程中, 合外力 ($G - B$) 对它作的功为

$$A = \int_0^l (G - B) dx = \int_0^l (\rho l - \rho' x) g dx = \rho l^2 g - \frac{1}{2} \rho' l^2 g$$

应用动能定理, 因初速度为0, 末速度 v 可求得如下:

$$\rho g l^2 - \frac{1}{2} \rho' g l^2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho l v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{(2\rho l - \rho' l)g}{\rho}}$$

所得结果相同, 而现在的解法无疑是大为简便了.

例题2-12 传送机通过滑道将长为 L 、质量为 m 的柔软匀质物体以初速 v_0 向右送上水平台面, 物体前端在台面上滑动 s 距离后停下来(图2-19). 已知滑道上的摩擦可不计, 物与台面间的摩擦系数为 μ , 而且 $s > L$, 试计算物体的初速度 v_0 .

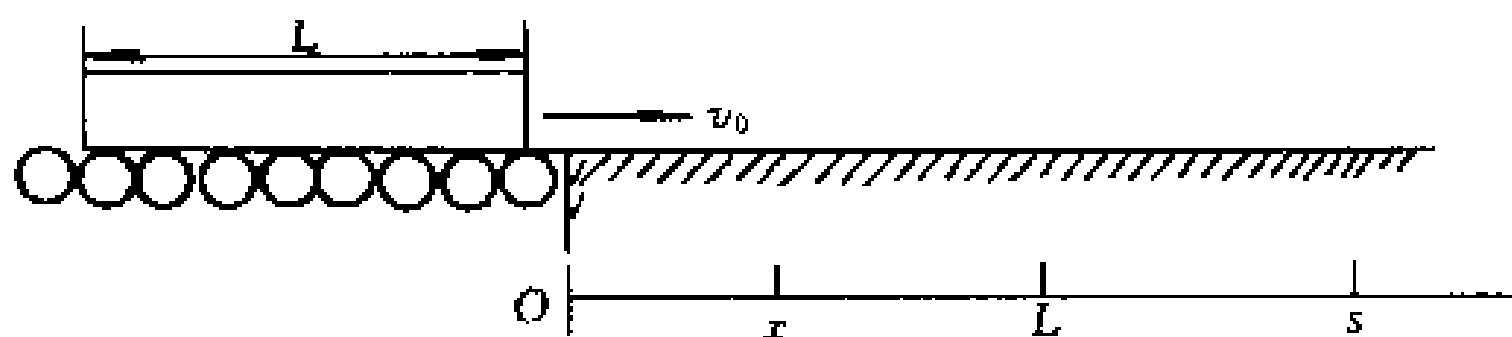


图2-19 例题2-12图

解 由于物体是柔软匀质的, 在物体完全滑上台面之前, 它对台面的正压力可认为与滑上台面的质量成正比, 所以它所受台面的摩擦力 f_r 是变化的. 本题如用牛顿定律的瞬时关系求加速度是不太方便的. 我们把变化的摩擦力表示为

$$0 < x < L, \quad f_r = \mu \frac{m}{L} g x$$

$$x \geq L, \quad f_r = \mu m g$$

当物体前端在 s 处停止时, 摩擦力作的功为

$$\begin{aligned} A &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int f_r dx \\ &= - \int_0^L \mu \frac{m}{L} g x dx - \int_L^s \mu m g dx \\ &= - \mu m g \left(\frac{L}{2} + s - L \right) = - \mu m g \left(s - \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

再由动能定理得

$$- \mu m g \left(s - \frac{L}{2} \right) = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

即得

$$v_0 = \sqrt{2 \mu g \left(s - \frac{L}{2} \right)}$$

表2-1列出了某些物体运动的动能

表2-1 物体运动的动能

物体	E_k/J	物体	E_k/J
地球绕日运动	2.6×10^{33}	宇宙线中高能粒子	5×10
地球自转	2.1×10^{29}	雨 滴	4×10^{-5}
万吨轮航行	9×10^9	加速器中质子	1.6×10^{-7}
喷气式客机	$\sim 10^9$	U 核裂变碎片	2.6×10^{-14}
汽车	5×10^5	核中质子	3×10^{-12}
子弹	4×10^3	氢原子中电子	2.2×10^{-18}
人步行	6×10	室温下空气分子	6.2×10^{-21}

§ 2-7 非惯性系 惯性力

我们一再指出,运动的描述是相对的.为了具体地描述运动,必须选用参考系.如果问题只涉及运动的描述,那就完全可以根据研究问题的方便任意地选用参考系.但是,如果问题涉及运动和力的关系,即要应用牛顿定律时,参考系就不能任意选择,因为牛顿定律只适用于惯性系.

1. 非惯性系

地面参考系是个足够好的惯性系,一切对地面参考系作匀速直线运动的物体,也都是惯性系.一般地说,凡是对一个惯性系作匀速直线运动的一切物体都是惯性系.面对地面参考系作加速运动的物体,则是非惯性系.牛顿定律对非惯性系是不成立的.现在举例说明如下.

站台上,停有一辆小车.相对于地面参考系来说,小车停着,加速度为0,这是因为作用在它上面的力相互平衡,即合力为0的缘故.这符合牛顿定律.如果以加速起动的列车为参考系,在列车车厢内的人看到小车的情况就大不一样,小车是向列车车尾方向作

加速运动的. 小车受力的情况没有变化, 合力仍然是0, 却有了加速度, 这是违反牛顿定律的. 因此, 加速运动的列车是个非惯性系, 相对于它, 牛顿定律不成立.

再举一个水平转盘的例子. 如图2-20所示, 圆盘以匀角速度 ω

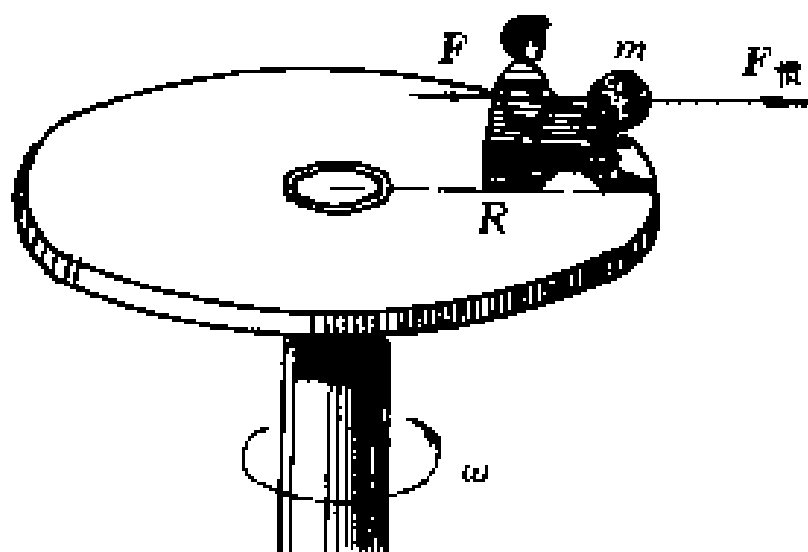


图2-20 作匀角速转动的参考系中的惯性力

转动着. 圆盘上坐着一人, 手中捧了个小球, 球的质量为 m , 人与转轴的距离为 R . 从地面参考系来看, 小球是以角速度 ω 随圆盘一起转动的, 具有向心加速度 a , 对小球提供向心力的是人手的拉力 F . 这符合牛顿定律. 但从圆盘上的人看来, 小球受力情况不变, 但静止着, 手虽然拉着小球, 小球却并不运动, 这显然不符合牛顿定律.

2. 惯性力

以上的讨论表明, 在相对于惯性系以加速度 a 运动的非惯性系中, 牛顿定律不再适用. 但在实际问题中, 往往需要在非惯性系中观察和处理物体的运动, 这时, 我们要引入惯性力的概念, 以便在形式上利用牛顿定律去分析问题. 惯性力是个虚拟的力, 它是在非惯性系中来自参考系本身加速效应的力. 和真实力不同, 惯性力找不到相应的施力物体. 它的大小等于物体的质量 m 和非惯性系加速度 a 的乘积, 但方向和 a 相反. 如用 $F_{\text{惯}}$ 表示惯性力, 则

$$F_{\text{惯}} = -ma \quad (2-25)$$

在非惯性系中, 如物体受的真实力为 F , 另外加上惯性力 $F_{\text{惯}}$,

则物体对于此非惯性系的加速度 a' 就可在形式上和牛顿定律一样,求得如下:

$$F + F_{\text{惯}} = ma' \quad (2-26)$$

引入惯性力,就可对上述两个例子作出解释. 在第一个例子中,以加速列车为参考系,与之相应的惯性力另加在小车上,这样,小车具有和列车相反的加速度,这就符合牛顿定律了. 在第二个例子中,以转盘为参考系,小球上应另加一个惯性力,它和真实的人手拉力恰好平衡,因此,小球在转盘这个非惯性系中保持静止,这正是牛顿定律所要求的.

惯性力在技术上有着广泛的应用. 例如,导弹和舰艇的惯性导航系统中安装的加速度计(图2-21),就是利用系统在加速移动时作用于质量 m 上的惯性力的大小来确定系统的加速度的.

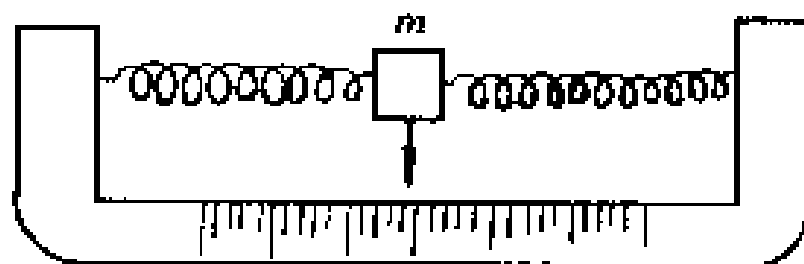


图2-21 加速度计

例题2-13 一质量为60 kg的人,站在电梯中的磅秤上,当电梯以 0.5 m/s^2 的加速度匀加速上升时,磅秤上指示的读数是多少? 试用惯性力的方法求解.

解 取电梯为参考系. 已知这个非惯性系以 $a = 0.5 \text{ m/s}^2$ 的加速度对地面参考系运动,与之相应的惯性力 $F_{\text{惯}} = -ma$. 从电梯这个非惯性系看来,人除受到重力 G (方向向下) 和磅秤对他的支持力 N (方向向上) 之外,还要另加一个 $F_{\text{惯}}$. 此人相对于电梯是静止的,则以上三个力必须恰好平衡,即

$$N - G - F_{\text{惯}} = 0$$

于是

$$N = G + F_{\text{惯}} = m(g + a) = 618 \text{ N}$$

由此可见,磅秤上的读数(根据牛顿第三定律,它读的是人对秤的正压力,而正压力和 N 是一对大小相等的相互作用)不等于物体所受的重力 G . 当加速上升时, $N > G$; 加速下降时, $N < G$. 前

一种情况叫做“超重”，后一种情况叫做“失重”。尤其在电梯以重力加速度下降时，失重严重，磅秤上的读数将为0。

在现代航天技术中，惯性力也是必须考虑的一个因素。在火箭点火时，飞船起飞加速度高达 $6g$ 以上，这时人必须躺在座椅上，否则强大的惯性力会使人脑部失血而昏晕。当飞船在轨道上作无动力飞行时，其情形与作自由降落的电梯一样，宇航员处于完全“失重”状态，这将妨碍宇航员的正常生活和执行任务。

思 考 题

2-1 回答下列问题：

- (1) 物体的运动方向和合外力方向是否一定相同？
- (2) 物体受到几个力的作用，是否一定产生加速度？
- (3) 物体运动的速率不变，所受合外力是否为零？
- (4) 物体速度很大，所受到的合外力是否也很大？

2-2 物体所受摩擦力的方向是否一定和它的运动方向相反？试举例说明。

2-3 用绳子系一物体，在竖直平面内作圆周运动，当这物体达到最高点时，(1)有人说：“这时物体受到三个力：重力、绳子的拉力以及向心力”；(2)又有人说：“因为这三个力的方向都是向下的，但物体不下落，可见物体还受到一个方向向上的离心力和这些力平衡着”。这两种说法对吗？

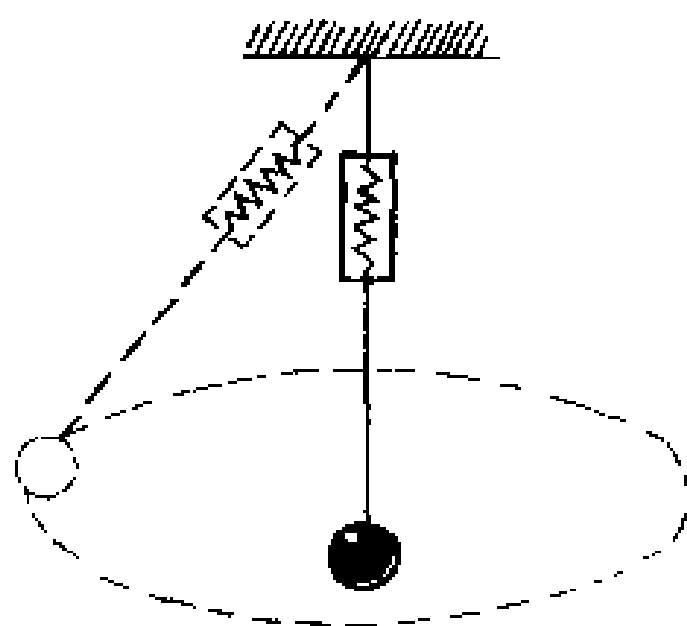
2-4 绳子的一端系着一金属小球，另一端用手握着使其在竖直平面内作匀速圆周运动，问球在哪一点时绳子的张力最小？在哪一点时绳子的张力最大？为什么？

2-5 在弹簧测力计的下面挂着一个物体，如图所示，试判别在下列两种情况下，测力计所指出的读数是否相同？如果不同，则在哪种情况下读数较大？

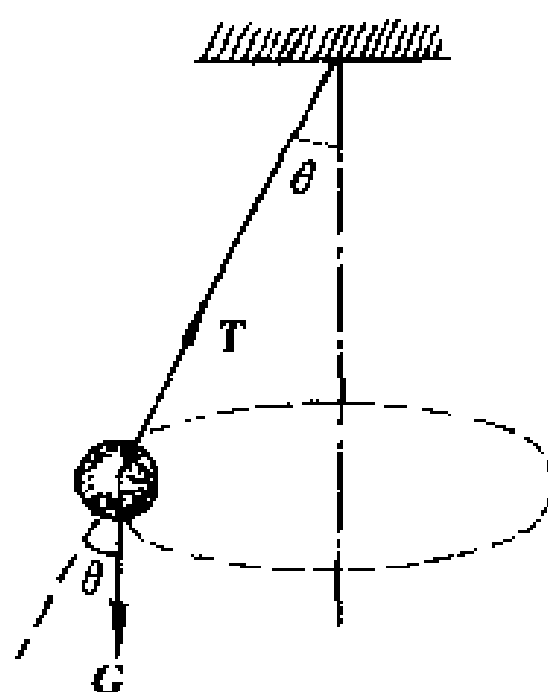
- (1) 物体竖直地静止悬挂；
- (2) 物体在一水平面内作匀速圆周运动。

2-6 如图所示，一个用绳子悬挂着的物体在水平面上作匀速圆周运动，有人在重力的方向上求合力，写出

$$T \cos \theta - G = 0$$



思考题2-5图



思考题2-6图

另有人沿绳子拉力 T 的方向求合力, 写出

$$T - G \cos \theta = 0$$

显然两者不能同时成立, 试指出哪一个式子是错的, 为什么?

2-7 一物体可否只具有机械能而无动量? 一物体可否只有动量而无机械能? 试举例说明.

2-8 两质量不等的物体具有相等的动能? 哪个物体的动量较大? 两质量不等的物体具有相等的动量, 哪个物体的动能较大?

2-9 用锤压钉, 很难把钉压入木块, 如用锤击钉, 钉就很容易进入木块, 这是为什么?

2-10 用细线把球挂起来, 球下系一同样的细线, 拉球下细线, 逐渐加大力量, 哪段细线先断? 为什么? 如用较大力量突然拉球下细线, 哪段细线先断, 为什么?

2-11 有两只船与堤岸的距离相同, 为什么人从小船跳上岸比较难, 而从大船跳上岸却比较容易?

2-12 一物体沿粗糙斜面下滑, 试问在这过程中哪些力作正功? 哪些力作负功? 哪些力不作功?

2-13 外力对质点不作功时, 质点是否一定作匀速运动?

2-14 两个相同的物体处于同一位置, 其中一个水平抛出, 另一个沿斜面无摩擦地自由滑下, 问哪一个物体先到达地面? 到达地面时两者速率是否相等?

习 题

2-1 质量为 m 的物体沿斜面向下滑动, 当斜面的倾角为 α 时, 物体正好

匀速下滑,问:当斜面的倾角增大到 β 时,物体从高为 h 处由静止滑到底部需要多少时间?

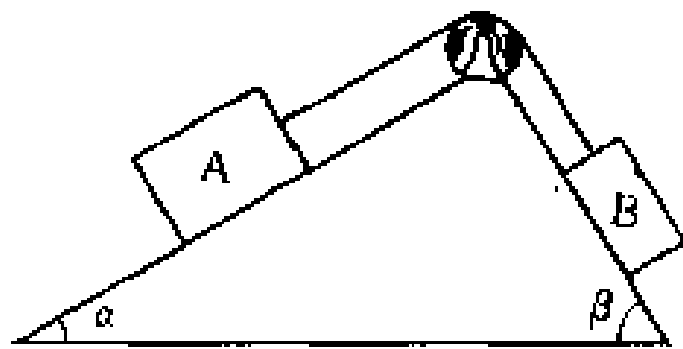
2-2 A、B 两个物体,质量分别为 $m_A=100\text{ kg}$, $m_B=60\text{ kg}$,装置如图所示.两斜面的倾角分别为 $\alpha=30^\circ$ 和 $\beta=60^\circ$.如果物体与斜面间无摩擦,滑轮和绳的质量忽略不计,问:

- (1) 系统将向哪边运动?
- (2) 系统的加速度是多大?
- (3) 绳中的张力多大?

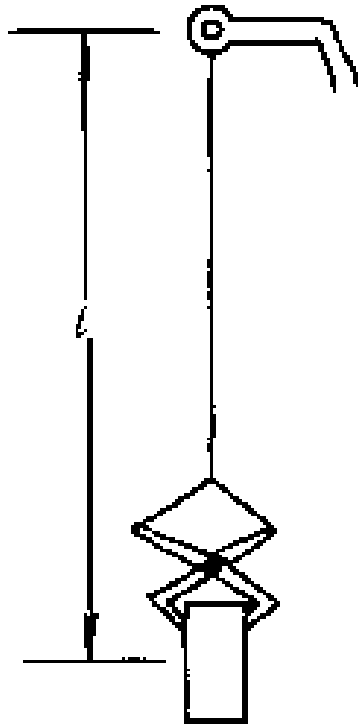
2-3 一辆铁路平车装有货物,货物与车底板之间的静摩擦系数为 0.25,如果火车以 30 km/h 的速度行驶,问要使货物不发生滑动,火车从刹车到完全静止所经过的最短路程是多少?

2-4 用一种钳子夹住一块质量 $M=50\text{ kg}$ 的混凝土砌块起吊(如图).已知钳子与砌块接触处的最大静摩擦系数 $\mu=0.4$.如果

- (1) 钳子匀速上升,
- (2) 钳子以 0.2 m/s^2 的加速度上升,



习题2-2图



习题2-4图

(3) 钳子在沿水平方向以 4 m/s 的速度行驶时,上端悬挂点突然停止运动(设悬挂点到砌块重心之间的距离 $l=4\text{ m}$),为使砌块不从钳子口滑出,至少必须对砌块施加多大正压力?

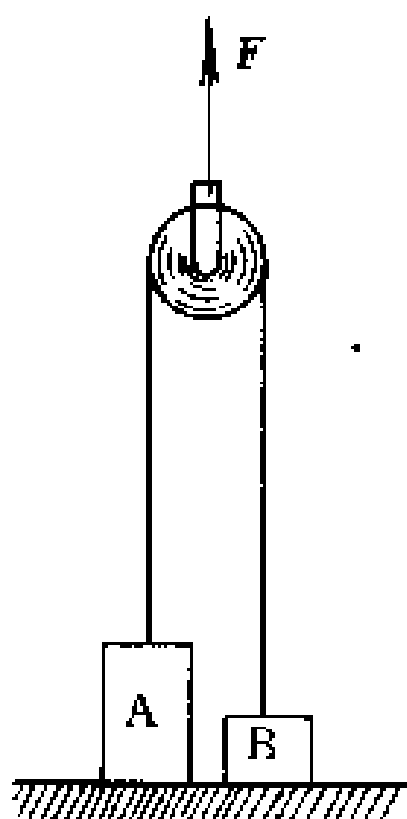
△2-5 一滑轮两边分别挂着 A 和 B 两物体,它们的质量分别为 $m_A=20\text{ kg}$, $m_B=10\text{ kg}$,今用力 F 将滑轮提起(如图),当 F 分别等于(1)98 N,(2)196 N,(3)392 N,(4)784 N 时,求物体 A 和 B 的加速度以及两边绳中的张力(滑

轮的质量与摩擦不计)。

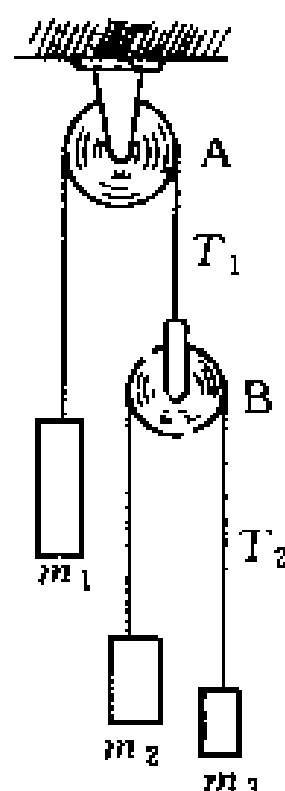
△2-6 图中 A 为定滑轮, B 为动滑轮, 三个物体 $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 100 \text{ g}$, $m_3 = 50 \text{ g}$, 求:

(1) 每个物体的加速度;

(2) 两根绳子中的张力 T_1 与 T_2 , 假定滑轮及绳的质量以及摩擦均可忽略不计。



习题2-5图

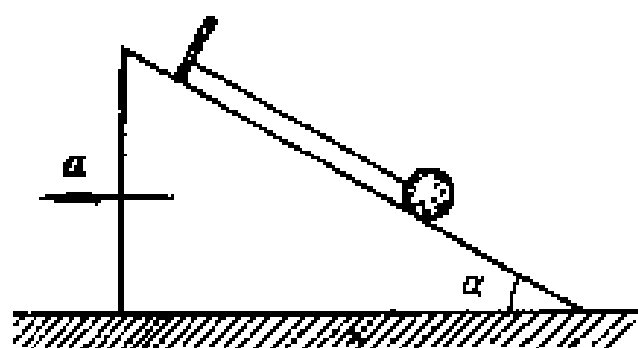


习题2-6图

2-7 将质量为 10 kg 的小球挂在倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的光滑斜面上(如图)。

(1) 当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$, 沿如图所示的方向运动时, 求绳中的张力及小球对斜面的正压力。

(2) 当斜面的加速度至少为多大时, 小球对斜面的正压力为零?



习题2-7图

△2-8 摩托快艇以速率 v_0 行驶, 它受到的摩擦阻力与速度平方成正比, 设比例系数为常数 k , 则可表示为 $F = -kv^2$. 设摩托快艇的质量为 m , 当摩托快艇发动机关闭后,

(1) 求速度 v 对时间的变化规律。

(2) 求路程 x 对时间的变化规律。

(3) 证明速度 v 与路程 x 之间有如下关系

$$v = v_0 e^{-kx/m}$$

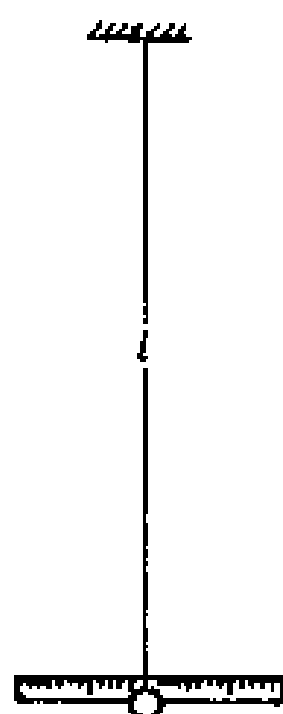
式中的 $k' = k/m$.

(4) 如果 $v_0 = 20 \text{ m/s}$, 经 15 s 后, 速度降为 $v_t = 10 \text{ m/s}$, 求 k' .

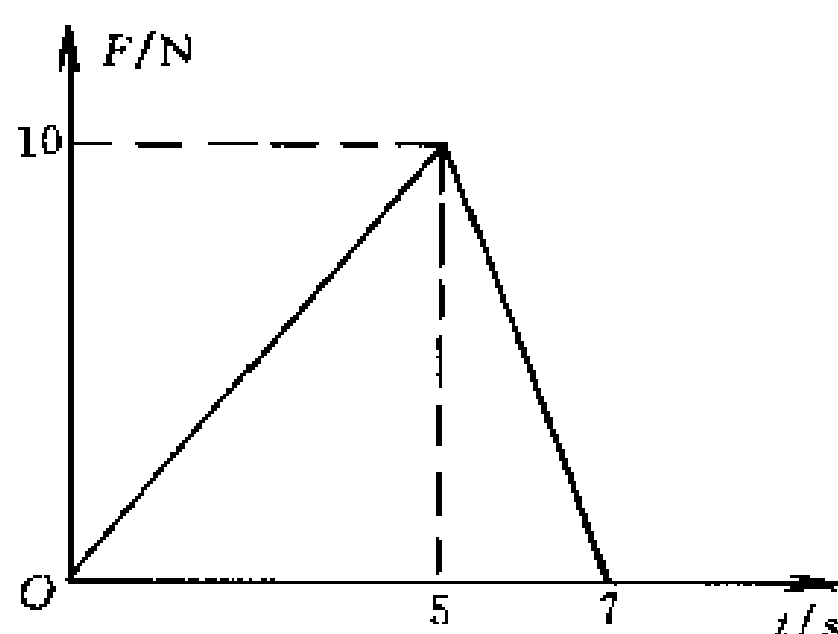
(5) 画出 x 、 v 、 a 随时间变化的图形.

2-9 利用一挂在车顶的摆长为 $l \text{ m}$ 的单摆和附在下端的米尺(如图), 怎样测出车厢的加速度?(单摆的偏角很小.)

2-10 一质点的质量为 1 kg , 沿 x 轴运动, 所受的力如图所示. $t = 0$ 时, 质点在坐标原点, 试求此质点第 7 s 末的速度和坐标.



习题2-9图



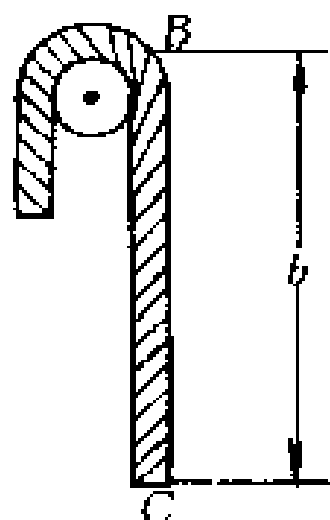
习题2-10图

2-11 一根长为 L 、质量均匀的软绳, 挂在一半径很小的光滑木钉上, 如图. 开始时, $BC = b$. 试证当 $BC = 2L/3$ 时, 绳的加速度为 $a = g/3$, 速度为

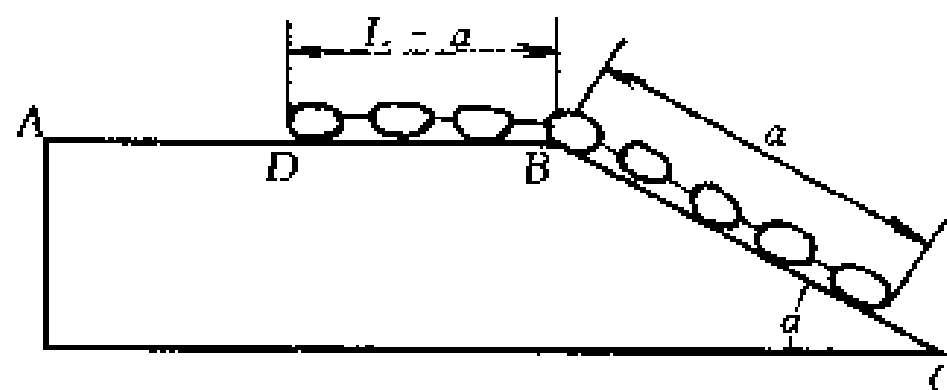
$$v = \sqrt{\frac{2g}{L} \left(\frac{2}{9} L^2 + bL - b^2 \right)}$$

2-12 如图, 一条长为 L 的柔软链条, 开始时静止地放在一光滑表面 AB 上, 其一端 D 至 B 的距离为 $L - a$. 试证当 D 端滑到 B 点时, 链条的速率为

$$v = \sqrt{\frac{L}{g} (L^2 - a^2) \sin \alpha}$$



习题2-11图



习题2-12图

2-13 一条均匀的金属链条,质量为 m ,挂在一个光滑的钉子上,一边长度为 a ,另一边长度为 b ,且 $0 < b < a$. 试证链条从静止开始到滑离钉子所花时间为

$$t = \sqrt{\frac{a+b}{2g}} \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

2-14 一圆台可绕其轴在水平面内转动,圆台半径为 R ,甲、乙两物体质量分别为 m_1 与 m_2 ($m_1 > m_2$),它们与台面间的静摩擦系数都是 μ ,现用一根长度 $l < R$ 的绳子将它们联接,

(1) 将甲放在圆心,乙放在距圆心为 l 处,要使物体与圆台不发生相对滑动,圆台旋转的最大角速度是多少?

(2) 如将甲与乙互换位置,(1)的结果又将如何?

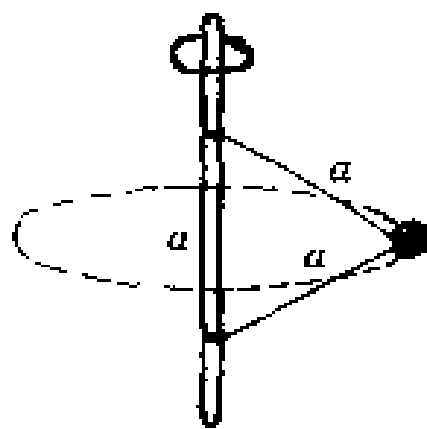
(3) 如果两物体均不放在圆心但联线经过转轴时,又将如何?

2-15 (1) 试证长度不同的圆锥摆只要其高度相等,则其周期也相等.
(2) 如果某圆锥摆的高度为 1.5 m ,求其周期.

2-16 质量为 m 的小球沿半球形碗的光滑的内面,正以角速度 ω 在水平面内作匀速圆周运动,碗的半径为 R ,求该小球作匀速圆周运动的水平面离碗底的高度.

2-17 长度为 l 的绳,一端系一质量为 m 的小球,另一端挂于光滑水平面上的 h ($h < l$) 高度处,使该小球在水平面上以 $n \text{ r/s}$ 作匀速圆周运动时,水平面上受多少正压力?为了使小球不离开水平面,求 n 的最大值.

2-18 用两根长为 a 的绳子连住一个质量为 m 的小球,两绳的另一端分别固定在相距为 a 的棒的两点上(如图).今使小球在水平面内作匀速圆周运动,求:



(1) 当转速 ω 为多大时,下面一根绳子刚刚伸直?

(2) 在此情形下,上面一根绳子内的张力是多少?

△2-19 在半径为 R 的光滑球面的顶点处,一质点开始滑落,取初速度接近于零.试问质点滑到顶点以下多远的一点时,质点离开球面? 习题2-18图

2-20 三艘质量相等的小船鱼贯而行,速度均等于 v . 如果从中间船上同时以速度 u 把两个质量均为 m 的物体分别抛到前后两船上,速度 u 的方向和 v 在同一直线上. 问抛掷物体后,这三艘船的速度如何变化?

2-21 质量为 m 的小球在水平面内作速率为 v_0 的匀速圆周运动,试求

小球在经过：(1) $\frac{1}{4}$ 圆周；(2) $\frac{1}{2}$ 圆周，(3) $\frac{3}{4}$ 圆周，(4) 整个圆周的过程中的动量改变。试从冲量的计算得出结果。

2-22 一颗子弹从枪口飞出的速度是 300 m/s ，在枪管内子弹所受合力的大小由下式给出：

$$F = 400 - \frac{4 \times 10^5}{3} t$$

其中 F 以 N 为单位， t 以 s 为单位。

(1) 画出 $F-t$ 图。

(2) 计算子弹行经枪管长度所花费的时间，假定子弹到枪口时所受的力变为零。

(3) 求该力冲量的大小。

(4) 求子弹的质量。

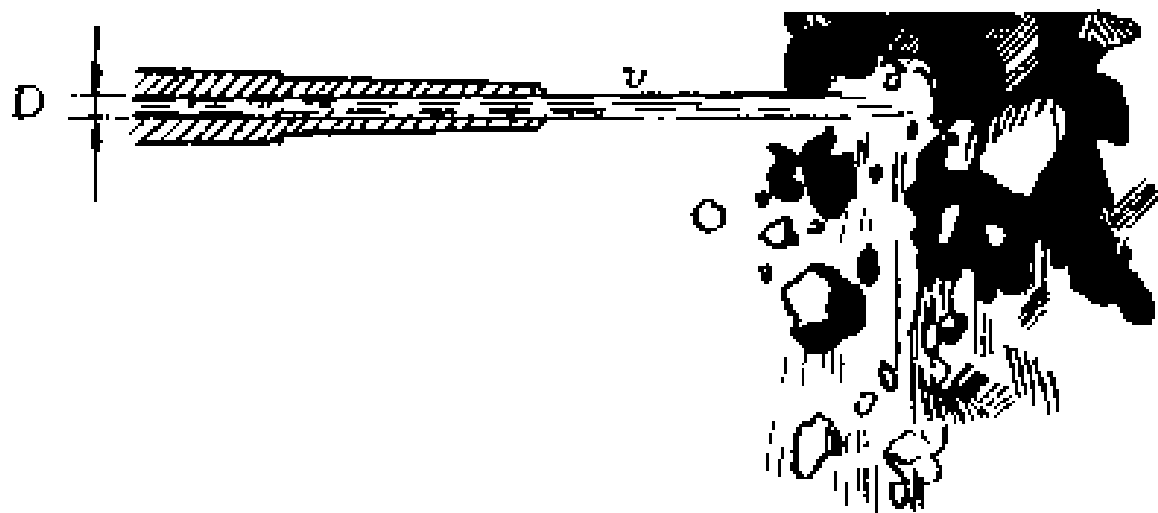
2-23 某物体上有一变力 F 作用，它随时间变化的关系如下：在 0.1 s 内， F 均匀地由 0 增加到 20 N ；又在以后 0.2 s 内， F 保持不变；再经 0.1 s ， F 又从 20 N 均匀地减少到 0 。

(1) 画出 $F-t$ 图；

(2) 求这段时间内力的冲量及力的平均值；

(3) 如果物体的质量为 3 kg ，开始速度为 1 m/s ，与力的方向一致，问在力刚变为 0 时，物体速度为多大？

2-24 水力采煤，是用高压水枪喷出的强力水柱冲击煤层，如图所示。设水柱直径 $D = 30 \text{ mm}$ ，水速 $v = 56 \text{ m/s}$ ，水柱垂直射在煤层表面上，冲击煤层后的速度为零，求水柱对煤的平均冲力。



习题2-24图

2-25 将一空盒放在秤盘上,并将秤的读数调整到零.然后从高出盒底 $h=4.9\text{ m}$ 处,将小石子流以每秒 $n=100$ 个的速率注入盒中.假设每一石子的质量 $m=0.02\text{ kg}$,都从同一高度落下,且落到盒内后就停止运动,求石子从开始注入盒内到 $t=10\text{ s}$ 时秤的读数.

2-26 一辆装煤车以 3 m/s 的速率从煤斗下面通过,煤粉通过煤斗以每秒 5 t 的速率竖直注入车厢.如果车厢的速率保持不变,车厢与钢轨间摩擦忽略不计,求牵引力的大小.

2-27 (1)以 5 m/s 的速度匀速提升一质量为 10 kg 的物体,问在 10 s 内提升力作功若干?

(2)又若以比前快1倍的速度把该物体匀速提高同样的高度,试问所作的功是否比前一种情况大?为什么?

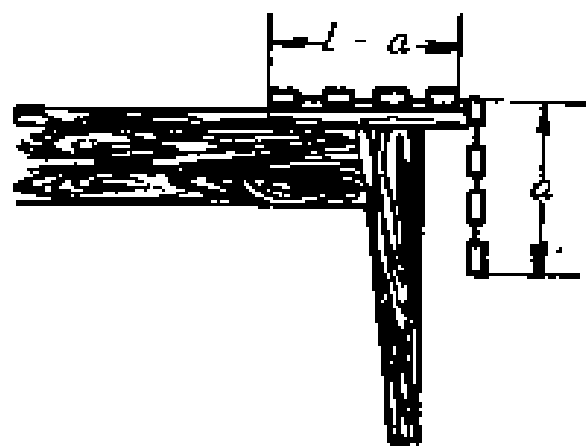
(3)在(1)、(2)两种情况下,它们的功率是否一样?

(4)若用一大小不变的力将该物体从静止加速提高到同一高度,使物体最后获得的速度为 5.0 m/s ,问提升力作功多少?平均功率为多少?又开始时和结束时的瞬时功率各为多少?

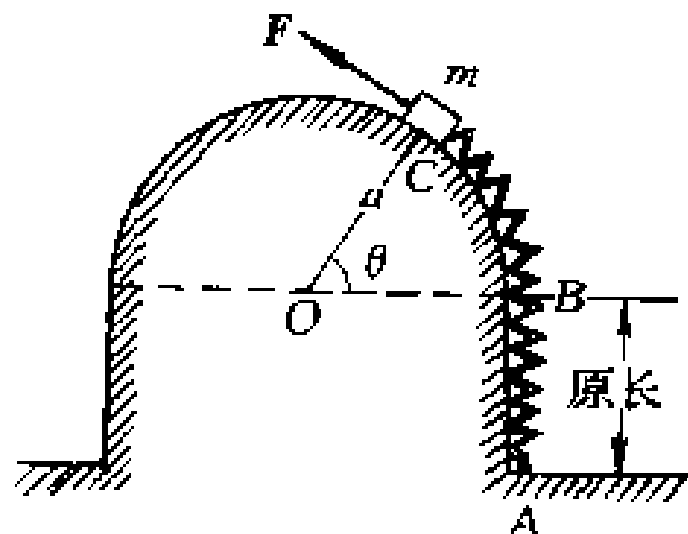
2-28 一地下蓄水池,面积为 50 m^2 ,贮水深度为 1.5 m .假定水平面低于地面的高度是 5.0 m .问要将这池水全部吸到地面,需作多少功?若抽水机的效率为 80% ,输入功率为 35 kW ,则需多少时间可以抽完?

2-29 一链条,总长为 l ,放在光滑的桌面上,其中一端下垂,长度为 a ,如图所示.假定开始时链条静止,求链条刚刚离开桌边时的速度.

2-30 以铁锤将一铁钉击入木板,设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比.在铁锤击第一次时,能将小钉击入木板内 1 cm ,问击第二次时能击入多深.假定铁锤二次打击铁钉时的速度相同.



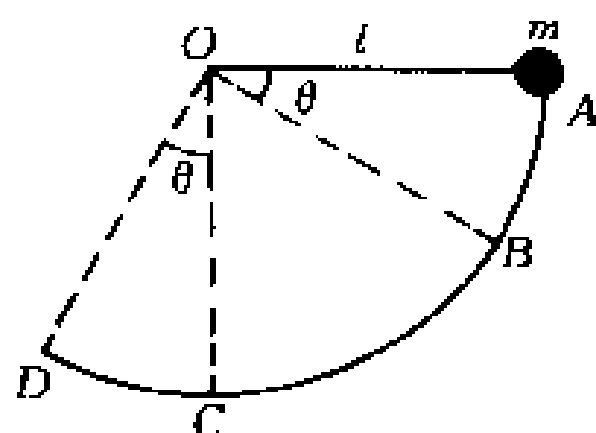
习题2-29图



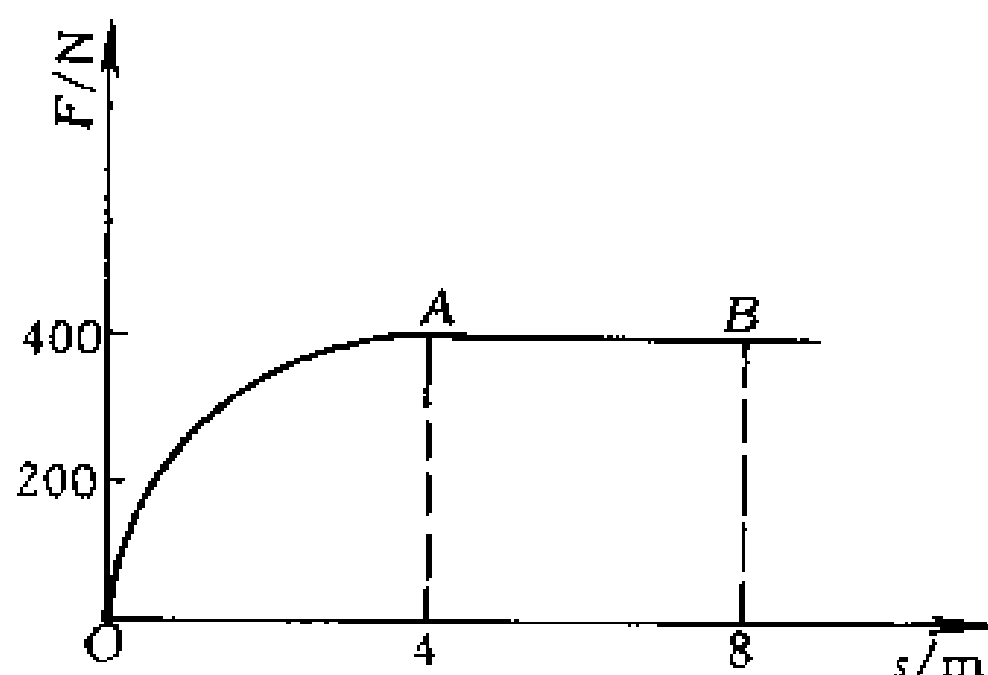
习题2-31图

2-31 一弹簧,劲度系数为 k ,一端固定在 A 点,另一端连一质量为 m 的物体,靠在光滑的半径为 a 的圆柱体表面上,弹簧原长为 AB (如图).在变力 F 作用下,物体极缓慢地沿表面从位置 B 移到 C ,求力 F 所作的功.

2-32 质量 $m=6\times 10^{-3}\text{ kg}$ 的小球,系于绳的一端,绳的另一端固结在 O 点,绳长为 1 m (如图).今将小球拉升至水平位置 A ,然后放手,求当小球经过圆弧上 B 、 C 、 D 点时的(1)速度,(2)加速度,(3)绳中的张力.假定空气阻力不计, $\theta=30^\circ$.



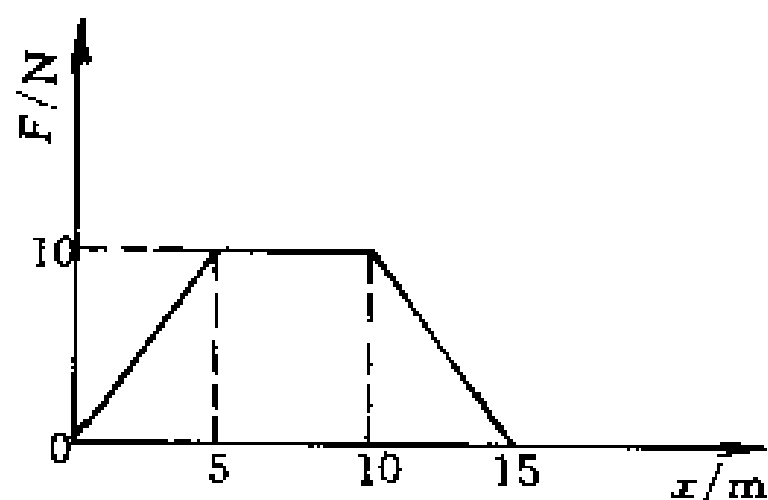
习题2-32图



习题2-33图

2-33 某汽车起动后,牵引力的变化如图所示,若两坐标轴的单位长度分别为 100 N 和 1 m ,则曲线 OA 恰好是个 $1/4$ 的圆周.问汽车运动 7 m ,牵引力所作的功有多大?(此功也可由图中曲线 OB 对 s 轴覆盖的面积求出,这种图叫做示功图.)

2-34 设作用在质量为 2 kg 的质点上的力是 $F=(3i+5j)\text{ N}$.当质点从原点移动到位矢为 $r=(2i-3j)\text{ m}$ 处时,此力所作的功有多大?它与路径有无关系?如果此力是作用在质点上唯一的力,则质点的动能将变化多少?



习题2-35图

2-35 质量为 2 kg 的物体,在沿 x 方向的变力作用下,在 $x=0$ 处由静止开始运动.设变力与 x 的关系如图所示.试由动能定理求物体在 $x=5, 10, 15\text{ m}$ 处的速率.

混沌和自组织现象

混沌和自组织现象都属于非线性科学范畴。线性和非线性本来是数学名词。所谓线性是指量与量之间成正比关系,用直角坐标形象地画出来,是一根直线。在线性系统中,部分之和等于整体,描述线性系统的方程遵从叠加原理,即方程的不同解相加仍然是个解。非线性则指整体不等于部分之和,叠加原理失效,非线性方程两个解之和不再是方程的解。线性和非线性物理现象的区分一般有三个特征。第一,线性现象一般表现为时空中的平滑运动,并可用性能良好的函数表示;而非线性现象则表现为从规则运动向不规则运动的转化和跃变。第二,线性系统往往表现为对外界的影响成比例地变化;而非线性系统中参量的极微小变化,在一些关节点上,可引起系统运动形式的决定性改变。第三,反映在连续介质中的波动上,线性行为表现为色散引起波包的弥散,导致结构的消失,而非线性作用却可促使空间规整性结构的形成和维持。自然界大量存在的相互作用是非线性的,线性作用只不过是非线性作用在一定条件下的近似。混沌和自组织现象则是非线性科学中最引人注目的两类现象。

1. 混沌

对于同一个自然界,物理科学中有决定性和概率性两种描述。从牛顿创立经典力学以来,决定论长期处于主导地位。基于概率论的统计描述,似乎只能作为在不得已情况下所采用的辅助手段。牛顿的这种机械决定论的观点,因海王星的发现而登峰造极。然而,事情并非尽善尽美。19世纪末叶,已经知道描述三个以上天体运动的方程组,不能解析地求解。由确定性方程描述的简单系统可以出现极为复杂的貌似随机的无规运动,这就是混沌。混沌的出现,进一步动摇了牛顿以来占主导地位的“机械决定论”。

撇开数学上严格的定义不谈,我们把混沌说成是在确定性动

力学系统中出现的一种貌似随机的运动。“确定性”是指描述动力学系统的微分方程中的系数都是确定的,没有概率性因素.对确定的初始值,确定性方程应给出确定的解,描述着系统确定的行为.但在某些非线性系统中,这种过程会因初始值极微小的扰动而产生很大变化.由于系统的这种初值敏感性,从物理上看,这过程似乎是随机的,但这种随机性是确定性系统内部所固有的,所以被叫做内秉随机性.具有内秉随机性的动力学系统,通常兼有规则运动和随机运动的两种不同区域.随着某种参数(例如代表作用力强度的参数)变化,随机区域可能逐渐扩大,甚至吞掉规则运动的区域.我们以湍流的形成为例,进行说明.湍流现象是种混沌,它普遍存在于行星和地球大气、海洋与江河、火箭尾流乃至血液流动等自然现象之中.流体的运动一般用确定性的流体力学方程描述.当流体绕过圆柱体流动时,随着表征流体中外力与粘性力竞争的雷诺数的不断增大,当雷诺数达到某个临界值时,流动中就出现湍流.当

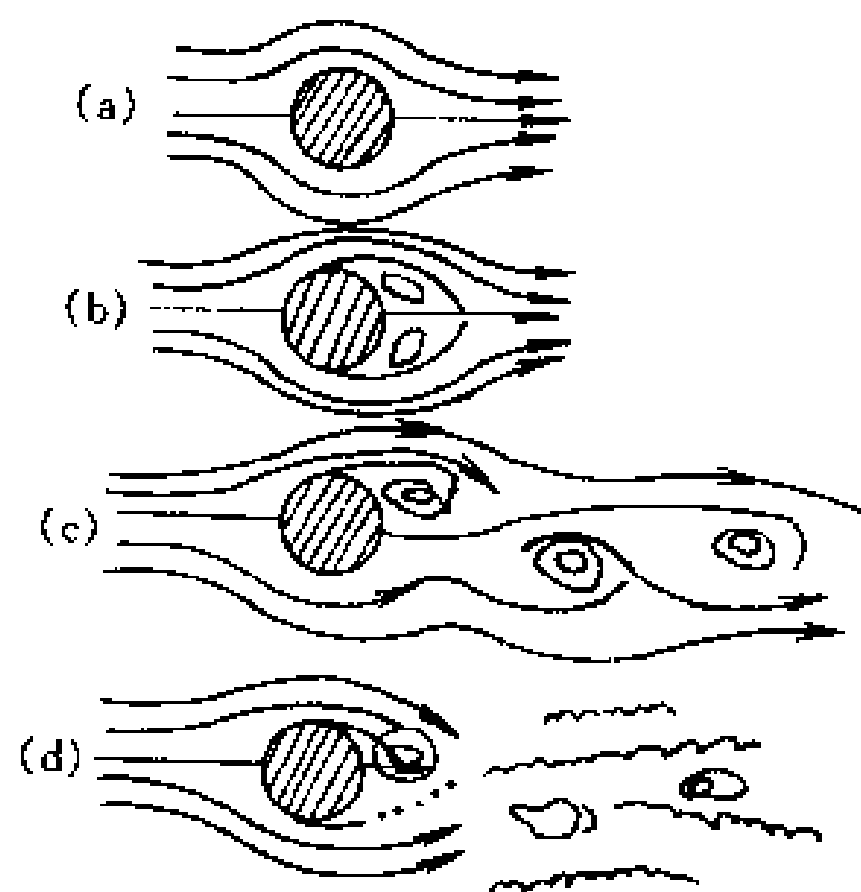


图 A-1 运动的流体

雷诺数 $Re < 1$ 时,流动情形如图 A-1(a)所示.增大流速,使雷诺数 $Re \approx 20$ 时,可看到圆柱体后面出现两个对称的涡旋,如(b)所示.当雷诺数达到40左右,又发生另一次突变:一个涡旋被拉长后摆脱

柱体,漂向下游:柱后另一侧的流体转了一个弯,形成新的涡旋.这些涡旋交替产生、脱落,向下游移去,如(c)所示.当雷诺数 $Re \approx 10^4$, 出现(d)所示的另一次转变,湍流形成了.由边界层里产生的小涡旋中充满着一条条细带,其流动是紊乱无规的,这就是湍流状态.在流体力学中就这么一个没有单位的雷诺数,它的数值的增减竟能引起如此多样的转折,实在令人惊异不止!如果事情只局限于流体宏观运动的能量,经过大、中、小、微等等许多尺度上的旋涡,最后转化成分子尺度上的热运动,那么统计描述仍可能奏效.问题还在于以紊乱无规的湍流为背景,流动中还会出现大尺度的、颇为规则的结构和纹样,出现协调一致的运动,真令人不可思议!后面提到的这种现象就是自组织现象.

2. 自组织现象

自组织现象是非线性科学中又一朵奇葩,所谓自组织是指系统从一种无序状态向有序状态的演变过程.在宇宙演化过程中,从形成轻元素到产生重元素,进而形成某些分子,在一定条件下发展出生物大分子和生命现象,物质的运动和结构越来越复杂,这些都是自组织现象.物理、化学系统中自组织现象很多,现在介绍几个典型的例子.

(1) 贝纳德对流 使一薄层液体上冷下热,当上下温度差较小时,热量以传导的方式通过液层.当继续加热使温度差超过一定限度时,就发生对流现象.当表征温度引起的浮力与液体粘性力竞争的瑞利数达到某一临界值时,一种规则的图案自动出现在浑然一体的液体内,液面呈现出许多六角形对流元胞,如图 A-2所示.液流从每个元胞的中心涌起,从它们的边缘下沉,这对应着一种很高程度的分子组织状态,并

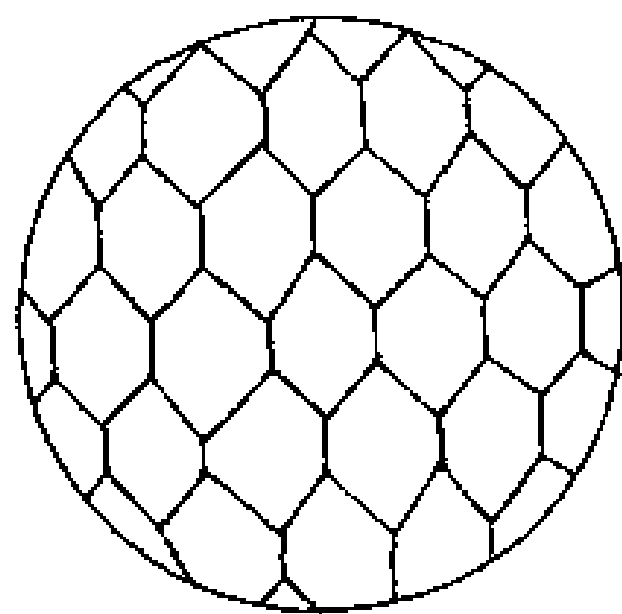


图 A-2 贝纳德对流

且是在一种失稳的背景下出现的,这种图象叫做贝纳德对流,这种从“无序”产生“有序”的现象,在日常生活中也可以看到,如大气中的对流,海洋中的“洋流”,天空中一块块整齐规则的云彩等。

(2) 化学振荡 有一种“化学钟”,它是化学反应失去稳定性之后,以连贯有节奏的方式发生振荡,呈现出周期性变化的时空花样。例如,B-Z反应是硫酸铈 $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ 、丙二酸 $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ 、溴酸钾 KBrO_3 溶于硫酸内,再加适量显色物质混合搅拌,人们将看到溶液的颜色由红变蓝,又由蓝变红,在红色和蓝色之间周期性振荡,颜色的变化相应于离子浓度的变化。

从这些例子中,容易看出自组织现象的共同特征是:(1)通常只有某个系统参量达到一定临界值,新状态才突然出现;(2)新状态具有更丰富的时空结构;(3)只有不断从外界提供能量,这些结构才能继续维持下去;(4)新结构一旦出现,不会因外界条件的微小改变而消失。

非线性科学无疑在人类探索自然的实践中起着开拓眼界、解放思想的作用。混沌研究有可能消除对于统一自然界的确定性和概率论两套对立描述体系之间的鸿沟,自组织现象的研究则为量变引起质变、无序转为有序提供了活生生的丰富事例。

第三章 运动的守恒定律

在上一章,我们介绍了牛顿运动定律的微分形式和积分形式,研究了质点的机械运动,先从问题的瞬时关系入手进而研究问题的过程关系.本章将在上一章的基础上,将研究对象由质点转向质点系统,重点研究系统的过程问题,从而确立和认识运动的守恒定律.一般地说,对于物体系统内发生的各种过程,如果某物理量始终保持不变,该物理量就叫做守恒量.本章将着重讨论能量守恒、动量守恒和角动量守恒.由宏观现象总结出的这几个守恒定律在微观世界已经过严格检验,证明它们同样有效.它们不仅适用于任何物理过程,也适用于化学、生物等其它过程.自然界至今还没有发现违反它们的事例.可以说,守恒定律是自然规律最深刻、最简洁的陈述,它比物理学中其它定律(例如牛顿运动定律)更重要、更基本.

从质点的动能定理发展为机械能守恒定律,中间必须用到功能原理.功能原理反映了功和能的关系.当我们的研究从恒力转向变力,从质点转向系统,情况虽然复杂,但用过程关系代替瞬时关系的研究却使我们有可能不去考虑系统中相互作用具体变化的细节,而把整个过程的某些重要结果确定下来.功能原理指出,机械能有两种形式,即动能和势能.机械能守恒定律则进一步指出,在一定条件下,质点系统的动能和势能可相互转化,但它们的总和保持不变.机械能守恒定律是能量守恒定律的一个特例.作为自然界的一个普遍规律,能量守恒定律指出了物体运动形式可以相互转化或转移,在运动转化中,能量始终是守恒的.动量守恒定律同样是自然界的普遍规律,它揭示了通过物体的相互作用,机械运动发生转移的规律.和动量相似,角动量也是个重要的守恒量.在本章

中,只介绍质点的角动量与角动量守恒定律,有关刚体转动的内容将放在下章介绍.

能量、动量和角动量为什么守恒?这涉及时空对称性问题,即与物质和物质运动的时空属性有关,这方面的内容超出了基础物理学的范围,我们只在§3-8中作一点最基本的介绍.

§3-1 保守力 成对力做功 势能

1. 保守力

当人们对各种力所作的功进行计算时,发现有一类力作的功具有鲜明的特色,功的大小只与物体的始末位置有关,而与所经历的路径无关,这类力叫做保守力.人们所熟悉的重力就是一种常见的保守力.

设质量为 m 的物体在重力作用下从 a 点沿任一曲线 acb 运动到达 b 点, a 点和 b 点对所选取的参考平面来说,高度分别为 h_a 和 h_b ,如图 3-1 所示.在元位移 Δs 中,重力 G 所作的元功是

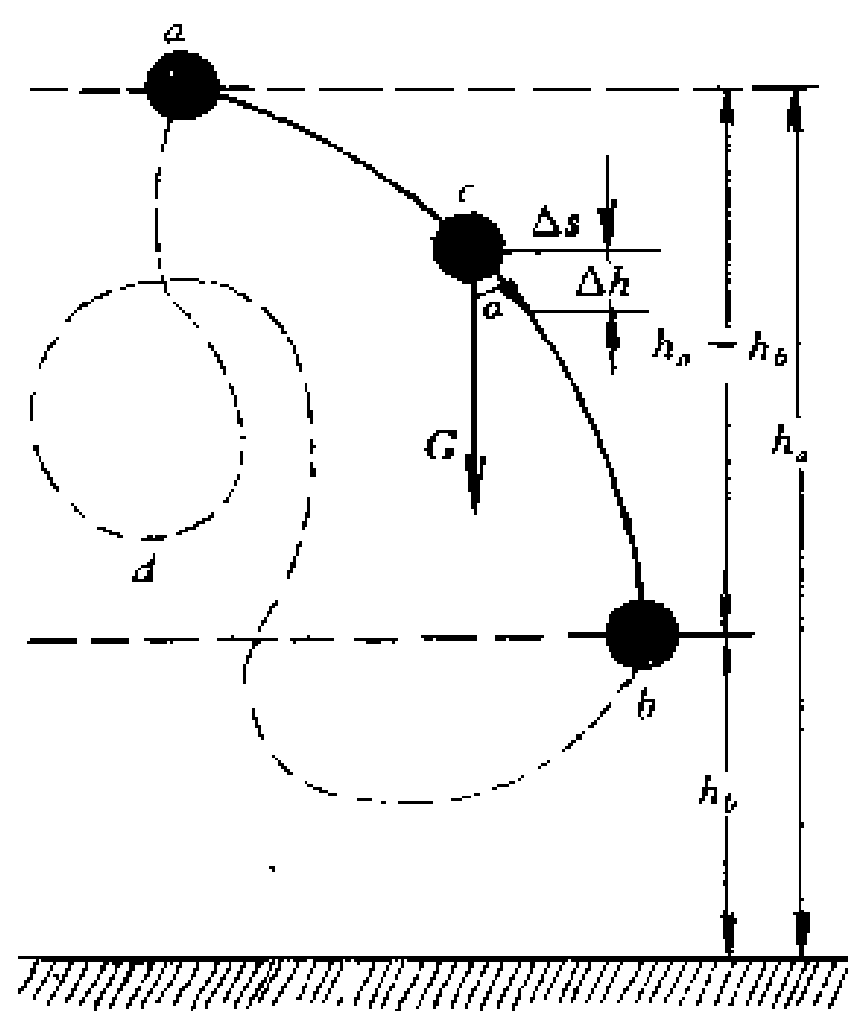


图 3-1 重力的功

$$\Delta A = G \cos \alpha \Delta s = mg \cos \alpha \Delta s = mg \Delta h$$

式中 $\Delta h (= \Delta s \cos \alpha)$ 就是物体在元位移 Δs 中下降的高度. 在离地球表面几百米高度范围内, 物体所受的重力可以看作是常力, $G = mg$. 所以物体从 a 点沿曲线 acb 到达 b 点, 重力对物体所作的功是

$$A = \sum \Delta A = \sum mg \Delta h = mg \sum \Delta h = mgh_a - mgh_b \quad (3-1)$$

从计算中可以看出, 如果物体从 a 点沿另一曲线 adb 运动到 b 点, 所作的功仍如上式. 由此可知, 重力有一特点, 即重力所作的功只与运动物体的始末位置 (h_a 和 h_b) 有关, 而与运动物体所经过的路径无关.

我们再来计算在重力作用下, 物体沿任一闭合路径 $adbca$ 运动一周时, 重力所作的功. 如图 3-1 所示, 我们把路径分为 adb 和 bca 两段来考虑, 在曲线 adb 上, 重力作正功

$$A_{adb} = mgh_a - mgh_b$$

在曲线 bca 上, 重力作负功

$$A_{bca} = - (mgh_a - mgh_b)$$

所以沿闭合路径一周, 重力所作的功是

$$A = A_{adb} + A_{bca} = 0$$

或写成

$$A = \oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

这就是说, 重力做功的特点也可表述如下: 在重力场中物体沿任一闭合路径运动一周时, 重力所作的功为零.

和重力一样, 弹性力也是保守力. 设有一劲度系数为 k 的轻弹簧, 放在水平光滑桌面上, 令它一端固定, 另一端连结一物体, 如图 3-2 所示. O 点为弹簧未伸长时物体的位置, 叫做平衡位置. 设 a 、 b 两点为弹簧伸长后物体的两个位置, x_a 和 x_b 分别表示物体在 a 、 b 两点时距 O 点的距离, 亦即弹簧的伸长量. 当物体由 a 点运动到达 b 点, 弹性力 F 将对物体作正功 (力与位移同向). 因弹性力是一变力, 所以计算弹性力的功时, 须用积分法.

由式 (2-18), 因力和位移同向, 所以式中 $\cos \varphi = 1$. 于是弹性力

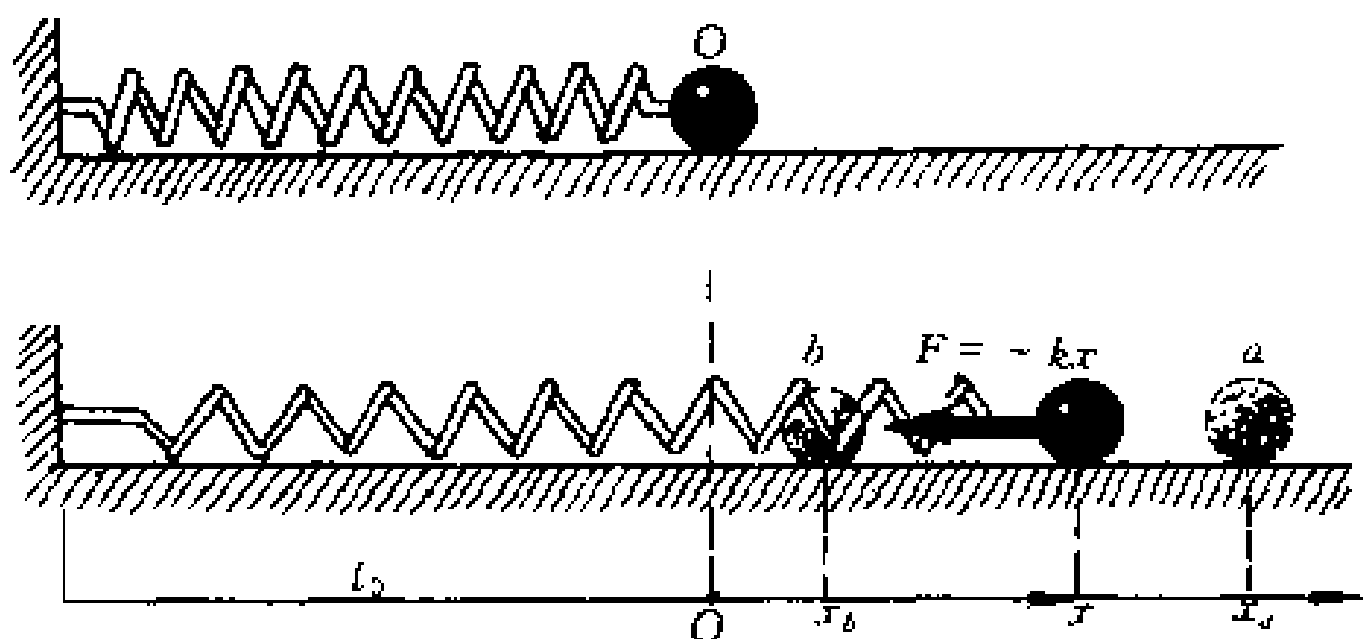


图 3-2 弹性力的功

对物体所作的功是

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F dx = - \int_{x_a}^{x_b} kx dx = \frac{1}{2} kx_a^2 - \frac{1}{2} kx_b^2 \quad (3-2)$$

由此可见,弹性力的功和重力的功具有共同的特点,即所作的功也只与运动物体始末位置 (x_a, x_b) 有关.同样,如果物体由某一位置出发使弹簧经过任意的伸长和压缩(在弹性限度内),再回到原处,则在整个过程中,弹性力所作的功为零.

现在计算万有引力的功.设一质量为 m 的物体,在另一质量为 M 的静止物体的引力场中^①,沿某路径由 a 运动到 b ,如图 3-3 所示.以 M 的中心为原点, m 在某时刻的位矢为 r ,它在完成元位移 $d\mathbf{r}$ 时,引力所作元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G_0 \frac{mM}{r^2} \cos\alpha |d\mathbf{r}|$$

由图可见, $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$, 等于位矢大小的增量 dr , 所以上式可改写为

$$dA = -G_0 \frac{mM}{r^2} dr$$

这样,此质点由 a 运动到 b 引力所作的总功为

① 一般说来,两个物体在相互作用下都要发生运动,但当 M 比 m 大很多时, M 就可认为始终不动.

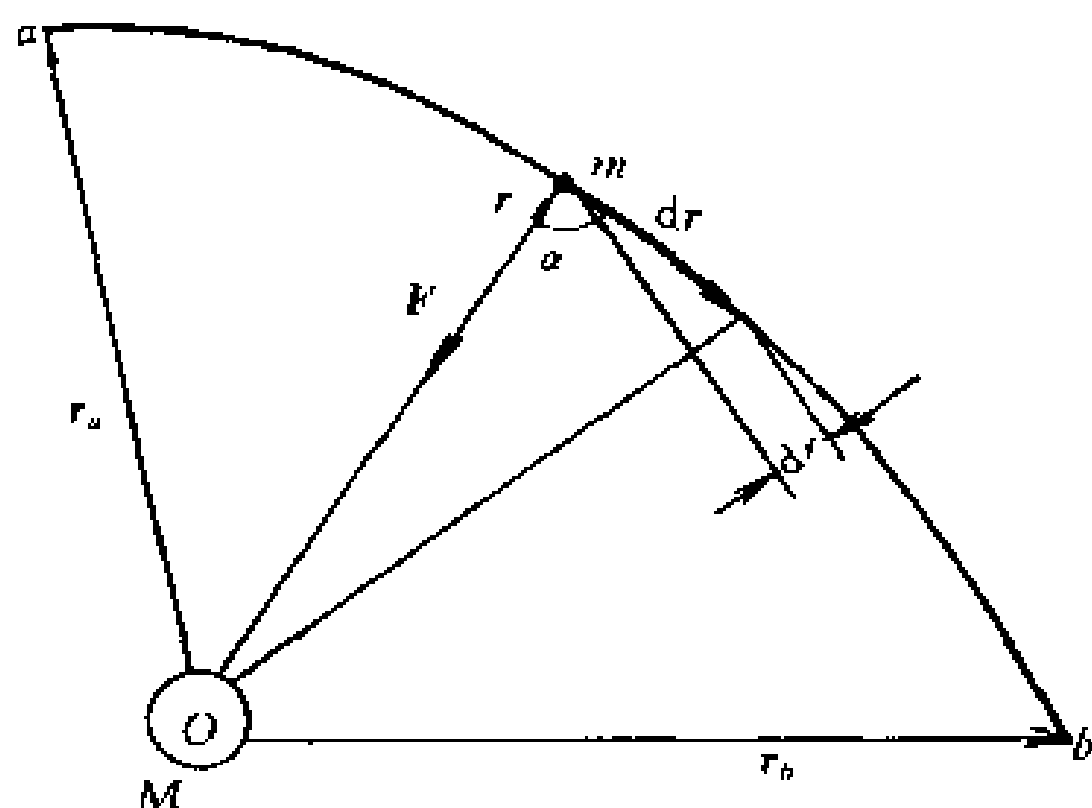


图 3 3 万有引力的功

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b dA = \int_{r_a}^{r_b} -G_0 \frac{mM}{r^2} dr \\
 &= -G_0 mM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (3-3)
 \end{aligned}$$

因此,引力的功也只和始末位置有关,引力也是保守力.在物理学中,除了这些力之外,以后要讲到的静电力也具有这种做功与路径无关,只与始末位置有关的特性,它也是保守力.我们把没有这种特性的力,叫做非保守力.人们熟知的摩擦力就是非保守力,它作的功是与路径有关的.当我们把放在地面上的物体从一处拉到另一处时,如果所经过的路径不同,摩擦力所作的功是不相同的.

2. 成对力的功

根据力的相互作用的性质,我们知道,不管是保守力还是非保守力,力总是成对的.现在,通过成对力作功的讨论,将加深我们对保守力的理解和认识.

设有两个质点 1 和 2,质量分别为 m_1 和 m_2 , F_1 为质点 1 受到质点 2 的作用力, F_2 为质点 2 受到质点 1 的作用力,它们是一对作用力与反作用力.由牛顿第三定律可知, $F_1 = -F_2$. 如果在某参

考系内,质点 1 在 dt 时间内完成了位移 $d\mathbf{r}_1$,质点 2 在这段时间内完成的位移是 $d\mathbf{r}_2$. 根据矢量合成的法则,不难看出 $d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}'$, 此处 $d\mathbf{r}'$ 表示质点 2 相对于质点 1 的相对位移,如图 3-4 所示. 我

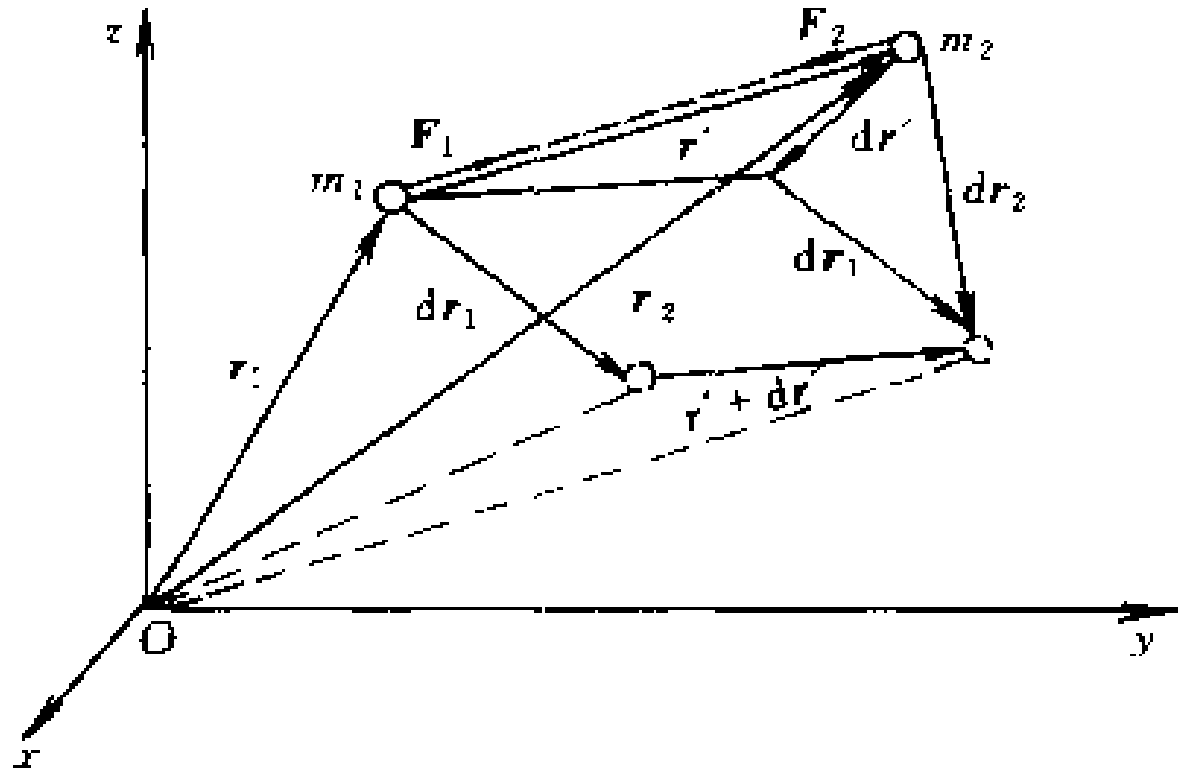


图 3-4 成对力的功

们分别用 dA_1 与 dA_2 表示 F_1 与 F_2 所作的元功,则有

$$dA_1 = F_1 \cdot d\mathbf{r}_1 \qquad dA_2 = F_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

这一对作用与反作用力所作元功之和 dA 为

$$\begin{aligned} dA &= F_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + F_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = F_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + F_2 \cdot (d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}') \\ &= (-F_2 + F_2) \cdot d\mathbf{r}_1 + F_2 \cdot d\mathbf{r}' = F_2 \cdot d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

由此可见,成对作用力与反作用力所作的总功只与作用力 F_2 及相对位移 $d\mathbf{r}'$ 有关,而与每个质点各自的运动无关. 虽然每个质点的位移以及作用力所作的功都是和参考系有关的(设想换用质点 1 为参考系,则 $d\mathbf{r}_1 = 0, dA_1 = 0$),但是质点间的相对位移 $d\mathbf{r}'$ 和 F_2 却都是不随参考系而变化的,所以上面结果表明:任何一对作用力和反作用力所作的总功具有与参考系选择无关的不变性质. 只要牛顿第三定律成立,无论从什么参考系去计算,成对力所作的功的结果都一样,这是很重要的性质. 利用这一特点我们可以方便地由相对位移来分析系统中成对内力的功. 例如,两块叠放在一起的物体,由于它们上下表面之间存在静摩擦力,所以在外力作用下一起

沿水平面加速运动. 从两者没有相对位移就可断定这对静摩擦力所作的总功为零.

通过上述讨论, 现在回顾一下前面的保守力作功问题. 不难看出, 当时在相互作用质点中的一个质点不动的情形下讨论了保守力, 既然作用在不动的质点上的力的功为零, 那么, 实际上前面讨论的就是成对保守力所作的总功, 运动质点的始末位置也就是两个质点的始末相对位置. 所以, 保守力的普遍定义应该是这样的: 在任意的参考系中, 成对保守力的功只取决于相互作用质点的始末相对位置, 而与各质点的运动路径无关.

3. 势能

在机械运动范围内的能量, 除了动能外, 还有势能. 在生活和生产的实践中我们知道, 从高处落下的重物能够作功. 例如, 筑路时为了把地面打结实, 总是把夯高高举起, 举得越高, 落下时所能作出的功就越大; 又如, 高山上的瀑布能带动发电机, 使它发电. 这些都说明位于高处的重物具有能量, 所以它能够作功. 我们把这种能量叫做重力势能. 因为重力是地球对物体的作用, 同时一般物体所处的高度总是相对于地面来说的, 所以重力势能既和物体与地球间的相互作用有关, 又和这二者的相对位置有关. 并非所有力作功都能引入势能的概念. 势能的引入是以保守力作功为前提的. 非保守力作功与路径有关, 这时就不能引入势能的概念. 从重力是保守力的特点来看, 重力作功导致了作为位置函数的 mgh 项的出现. 因为式(3-1)中的功 A 是能量变化的量度, 所以应把 mgh 理解为和位置有关的能量, 而这就是我们所说的重力势能. 用 E_p 表示势能, 即有

$$\text{重力系统:} \quad E_p = mgh \quad (3-4)$$

对处于弹性形变状态的物体, 我们发现它也具有能量. 被拉伸或压缩的弹簧, 在恢复原状的过程中, 是能够作功的. 钟表里卷紧的发条, 在逐渐放松的过程中, 能带动钟表机件而作功. 我们把这

种能量叫做弹性势能。和重力势能相似，弹性势能和物体各部分之间相互作用有关，又和这些部分的相对位置有关。从弹性力作功的特点来看，作为位置函数的 $\frac{1}{2}kx^2$ 项应该是所说的弹性势能，即

$$\text{弹性系统:} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3-5)$$

对引力做功，我们同样可引入引力势能的概念，亦即

$$\text{引力系统:} \quad E_p = -G_0 \frac{mM}{r} \quad (3-6)$$

在此处，我们选择 $r=\infty$ 处为引力势能的零点。

保守力的功与路径无关的性质，大大简化了保守力作功的计算。引入势能概念以后，保守力的功可简单地写成

$$\boxed{A_c = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p} \quad (3-7)$$

上式的意思是，系统在由位置 a 改变到位置 b 的过程中，成对保守内力的功等于系统势能的减少（或势能增量的负值）。

应当强调，势能既取决于系统内物体之间相互作用的形式，又取决于物体之间的相对位置，所以势能是属于物体系统的，不为单个物体所具有。通常有人讲“物体的势能”这句话，只是为了叙述的简便，但是不严格的。

此外，还要注意，式(3-7)表明，物体系统在两个不同位置的势能差具有一定的量值，它可用成对保守力作的功来量度。鉴于成对保守力作的功与参考系的选择无关，所以这个势能差是有其绝对意义的，而这正是我们在处理问题时所感兴趣的内容。至于系统的势能的量值，却只有相对意义。如果我们选定在某个位置，系统的势能为零，则它在其他位置的势能才有具体的量值，此值等于从该位置移动到势能零点时保守力所做的功。势能零点可根据问题的需要来选择。而作为两个位置的势能差，其值是一定的，与势能零点的选择无关。

4. 势能曲线

如果把势能和相对位置的关系绘成曲线,用来讨论物体在保守力作用下的运动是很方便的.前面提到的三种势能的势能曲线如图 3-5 所示.

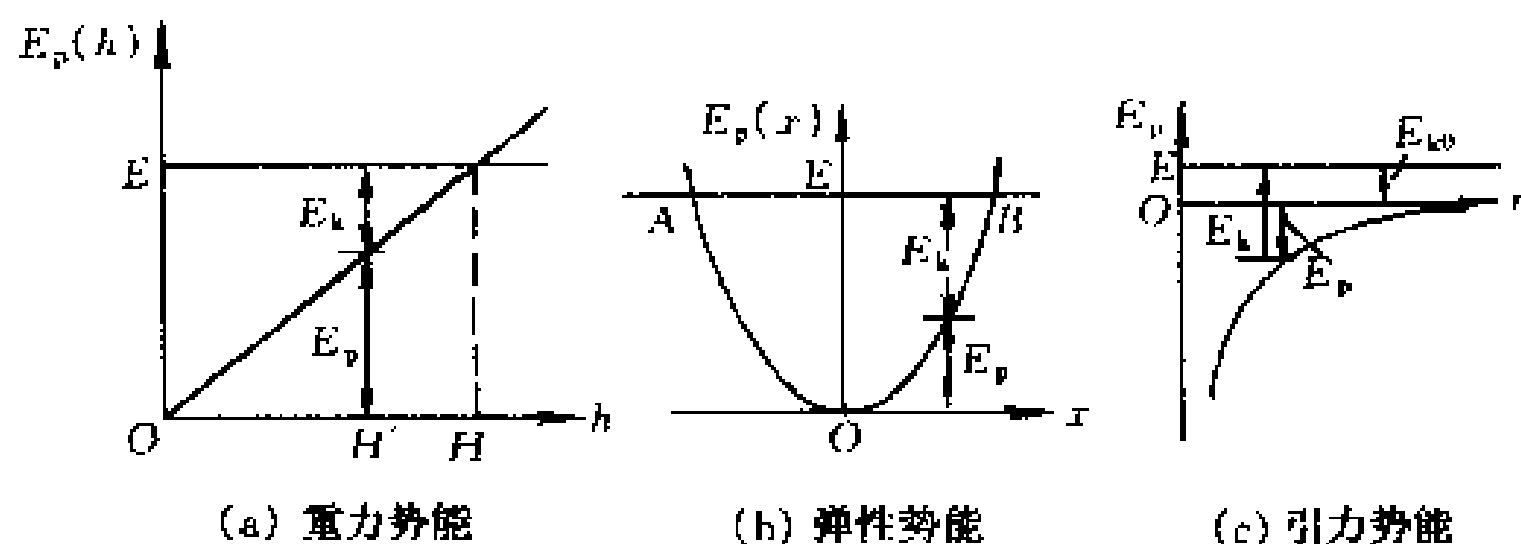


图 3-5 势能曲线

在系统的总能量 $E = E_k + E_p$ 保持不变的条件下,在势能曲线图上,可用一平行于横坐标轴的直线来表示它.系统在每一位置时的动能的大小($E_k = E - E_p$)就可方便地在图上显示出来.因为动能不可能为负值,只有符合 $E_k \geq 0$ 的运动才可能发生,所以,根据势能曲线的形状可以讨论物体的运动.例如,在图 3-5(b)中,表示总能量的直线与势能曲线相交于 A、B 两点,这表明质点只能在 AB 的范围内运动,而且在 A、B 两点,质点的动能为零,速度也为零.在图 3-5(a)中,当质点的 $h = H$ 时,其动能为零;而当 $h = H'$ 时,其动能为图中所示的 E_k .

利用势能曲线,还可判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向.我们知道,保守力的功等于势能增量的负值,即

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

写成微分形式就是

$$dA = -dE_p$$

当系统内的物体在保守力 F 作用下,沿 x 轴发生位移 dx 时,保守

力所作的功为

$$dA = F \cos \varphi dx = \int_L dx$$

式中 φ 为 F 与 x 轴正向的夹角. 比较上面两个式子, 得

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx} \quad (3-8)$$

上式表明, 保守力沿某坐标轴的分量等于势能对此坐标的导数的负值. 读者不难验证上式对重力、弹性力和万有引力图 3-5(c) 都是正确的.

例题 3-1 一质量为 $m=1 \text{ kg}$ 的物体, 在保守力 $F(x)$ 的作用下, 沿 x 轴正向运动 ($x>0$). 与该保守力相应的势能是

$$E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} \quad (x > 0)$$

式中 a 以 m 为单位, 势能以 J 为单位, $a=1 \text{ J} \cdot \text{m}^2$, $b=2 \text{ J} \cdot \text{m}$. (a) 画出物体的势能曲线; (b) 设物体的总能量 $E=-0.50 \text{ J}$ 保持不变, 这表明物体的运动被引力束缚在一定范围之内. 试分别用作图和计算的方法求物体的运动范围.

解 (a) 根据 $E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$ ($x>0$) 取下列数据来画出势能曲线:

x/m	0.2	0.5	1	2	3	4
$E_p(x)/\text{J}$	1.5	0	-1.0	-0.75	-0.55	-0.44

现在, 用式(3-8)求物体的平衡位置,

$$F = - \frac{dE_p}{dx} = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2}$$

令 $F=0$, 解得

$$x = 1 \text{ m}$$

这就是物体的平衡位置, 在该点, 势能有极小值, 如图 3-6 所示.

(b) 当物体的总能量 $E=-0.50 \text{ J}$ 保持不变时, 令 $E_p(x)=E$, 就可求得物体的 $E_k=E-E_p$ 为 0 的位置. 因此, 令

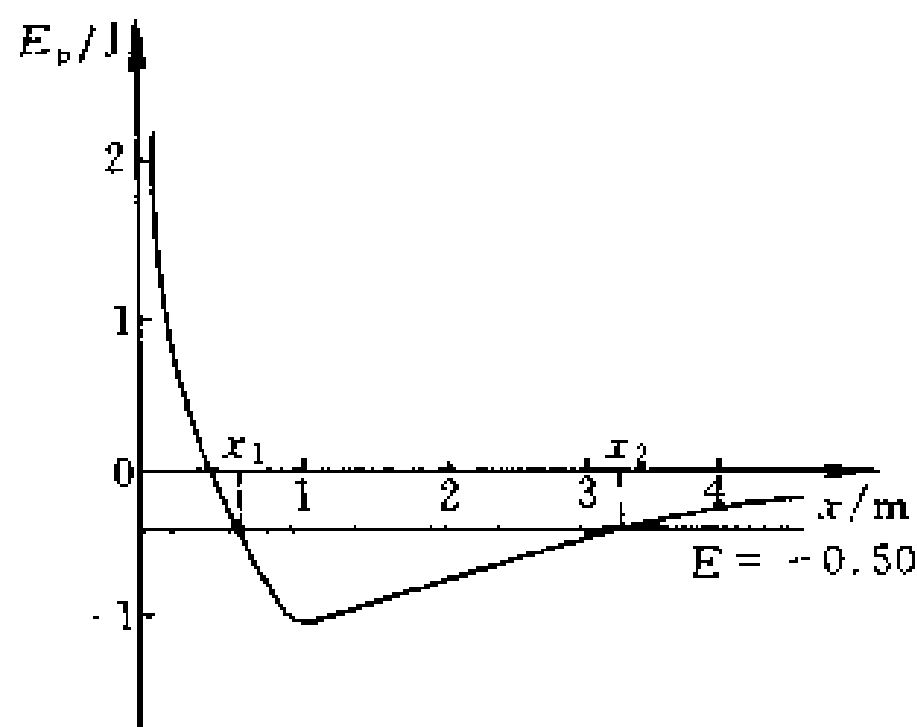


图 3-6 一种势能曲线

$$\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} = -0.50 \text{ J}$$

由此解得

$$x = (2 \pm \sqrt{2}) \text{ m} \approx \begin{cases} 0.59 \text{ m} \\ 3.14 \text{ m} \end{cases}$$

亦即物体的运动范围在 $x_1 = 0.59 \text{ m}$ 与 $x_2 = 3.14 \text{ m}$ 之间. 如果我们在图上画出 $E = -0.50 \text{ J}$ 的直线, 它将与势能曲线相交在上述两点.

§ 3-2 功 能 原 理

1. 质点系统动能定理

现在, 我们着手把单个物体(质点)的动能定理推广到由若干物体(质点)组成的系统. 为方便计, 设系统由两个质点 1 和 2 组成, 它们的质量分别为 m_1 和 m_2 , 如图 3-7 所示. 系统的外力 F_1 和 F_2 分别作用在质点 1 和质点 2 上, 两个质点的相互作用力, 对系统来说是内力, 用 f_{12} 和 f_{21} 表示. 作为系统的内力, 其特点是作用力与反作用力成对地出现在系统内. 在这些力的作用下, 质点 1 和

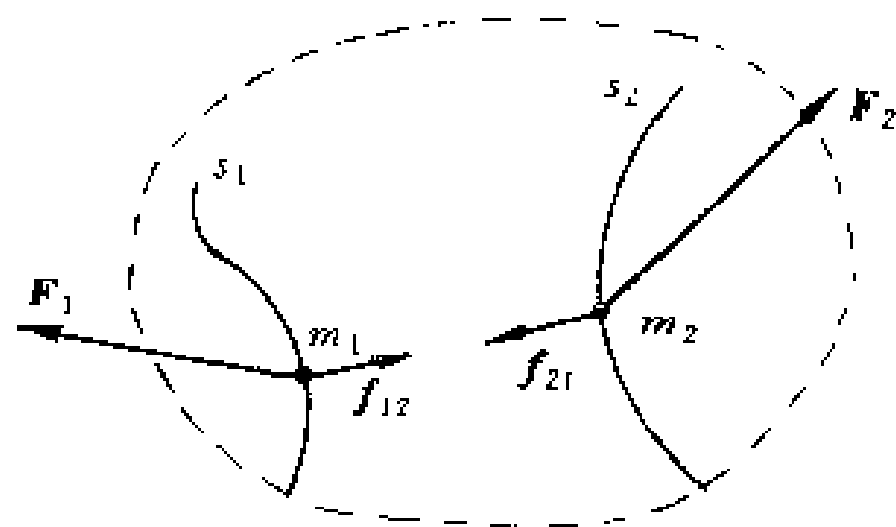


图 3-7 系统的外力和内力

质点 2 沿各自的路径 s_1 、 s_2 运动, 对质点 1 应用动能定理有

$$\int \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \int \boldsymbol{f}_{12} \cdot d\boldsymbol{r}_1 = \Delta E_{k1}$$

同样对质点 2 有

$$\int \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 + \int \boldsymbol{f}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_2 = \Delta E_{k2}$$

上两式相加, 即得

$$\int \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \int \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 + \int \boldsymbol{f}_{12} \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \int \boldsymbol{f}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_2 = \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2}$$

上式右边是系统动能的增量, 用 ΔE_k 表示; 左边前两项之和为系统外力的功, 用 A_e 表示; 后两项之和为系统内力的功, 用 A_i 表示. 这样, 上式可写成

$$\boxed{A_e + A_i = \Delta E_k} \quad (3-9)$$

上式就是质点系统的动能定理, 它说明系统的外力和内力做功的总和等于系统动能的增量.

2. 系统的功能原理

对系统的内力来说, 它们有保守力和非保守力之分, 所以, 内力的功应分成两部分, 即保守内力的功 A_{ic} 和非保守内力的功 A_{id} :

$$A_i = A_{ic} + A_{id}$$

其中保守内力的功 A_{ic} 总可用系统势能增量的负值来表示,

$$A_{ic} = -\Delta E_p$$

这样,式(3-9)就成为

$$A_e + A_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E \quad (3-10)$$

式中 ΔE 为系统机械能的增量. 上式表明, 当系统从状态 1 变化到状态 2 时, 它的机械能的增量等于外力的功与非保守内力的功的总和. 这个结论叫做系统的功能原理.

从上面的讨论中, 我们注意到: (1) 当我们取物体作为研究对象时, 使用的是单个物体的动能定理, 其中外力所作的功, 指的是作用在物体上的所有外力所作的总功, 所以必须计算包括重力、弹性力的一切外力所作的功. 物体动能的变化是由外力所作的总功来决定的. (2) 当我们取系统作为研究对象时, 由于应用了系统的势能这个概念, 关于保守内力所作的功, 例如重力的功和弹性力的功等, 在算式(3-10)中不再出现, 已为系统势能的变化所代替. 因此, 在演算问题时, 如果计算了保守内力所作的功[用式(3-9)], 那么, 就不必再去考虑势能的变化; 反之, 考虑了势能的变化[即用式(3-10)], 就不必再计算保守内力的功.

在机械运动范围内, 我们所讨论的能量只是动能和势能. 由于物质运动形式的多样化, 我们还将遇到其它形式的能量, 如热能、电能、原子能等等. 一般系统内除机械能外, 还可能产生其他形式的能量, 系统的能量应是机械能及其他形式能量的总和, 如果不考虑系统和外界热交换的情形, 并假定对系统的作用, 只是作用在这系统上的外力的功, 则外力对系统所作的总功, 就等于系统总能量的增量. 当外力对系统的总功为正时, 系统的总能量增加; 当外力对系统的总功为负时, 系统的总能量减少.

在式(3-10)中, 令 $A_e = 0$, 即有

$$A_{id} = \Delta E$$

就是说, 这时非保守内力作的总功将引起系统机械能的变化. 如果 $A_{id} > 0$, 系统内部将有其他形式的能量转换成机械能. 例如, 在射击时, 火药的化学能转变成子弹和枪身的机械能. 如果 $A_{id} < 0$, 系

统内机械能通过内力做功转变成其他形式的非保守内能. 例如, 在内部有摩擦时, 机械能将转变成热能. 图 3-8 是人们所熟知的撑竿跳高运动. 当运动员手持撑竿全速前进时, 他具有动能(A 处). 但当撑竿前端着地, 他用力使撑竿弯曲时, 除动能外, 还在撑竿中贮藏了弹性势能(B 处). 直到他腾空而起, 绕撑竿支点转动时, 他的

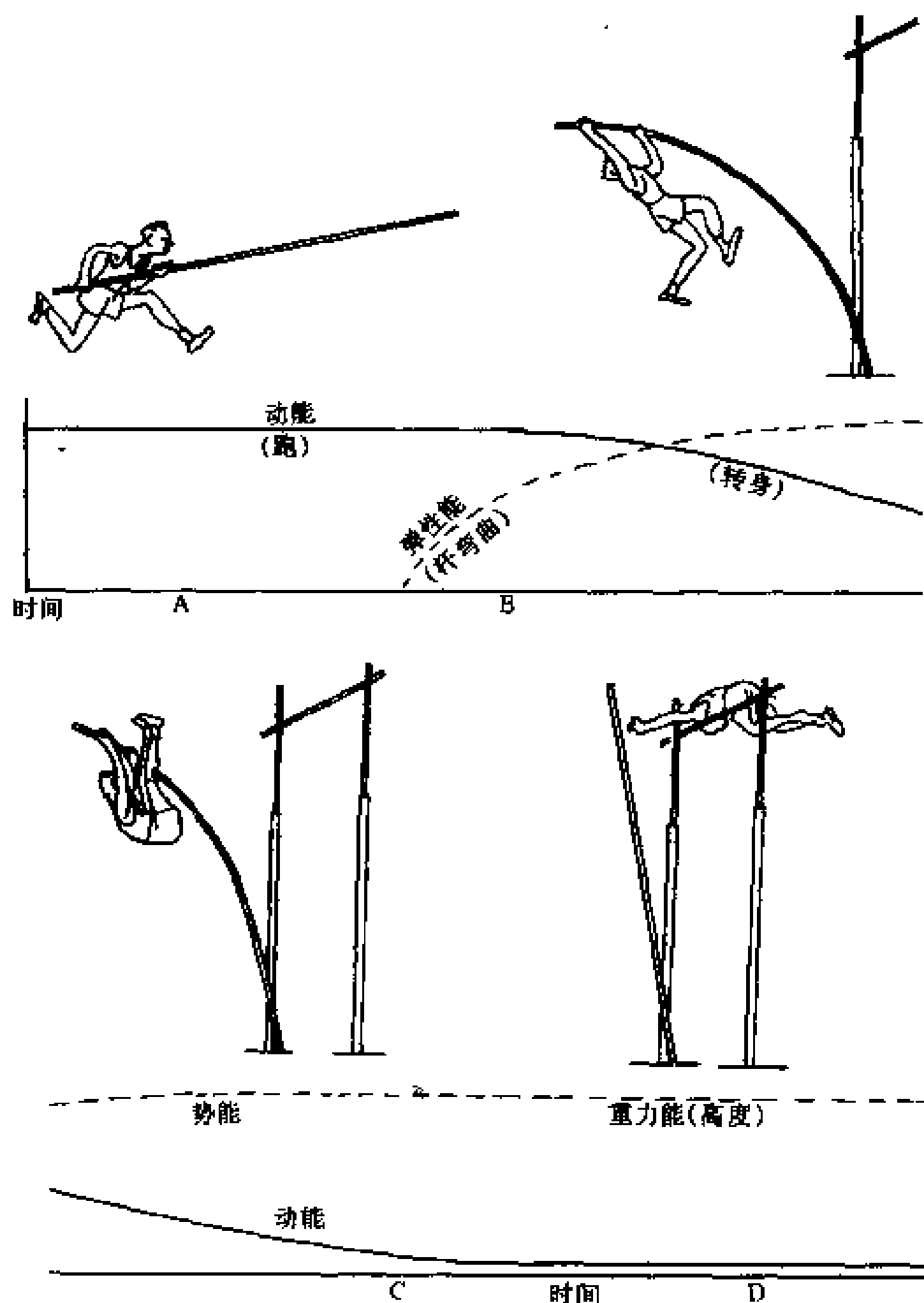


图 3-8 撑竿跳高中的能量转换

动能还相当大,但撑竿的弹性势能却在变小(C处).随着重力势能的变大,使动能逐渐变小.最后,在他将越过标杆时,动能变得很小,重力势能达到最大值(D处).由于在运动过程中,既要克服摩擦力做功,又有人体内部非保守力做功,所以撑竿跳高时机械能不是恒量.

例题 3-2 一汽车的速度 $v_0 = 36 \text{ km/h}$, 驶至一斜率为 0.010 的斜坡时, 关闭油门. 设车与路面间的摩擦阻力为车重 G 的 0.05 倍, 问汽车能冲上斜坡多远?

解 解法一: 取汽车为研究对象. 汽车上坡时, 受到三个力的作用: 一是沿斜坡方向向下的摩擦力 f_r , 二是重力 G , 方向竖直向下, 三是斜坡对物体的支持力 N , 如图 3-9 所示. 设汽车能冲上斜

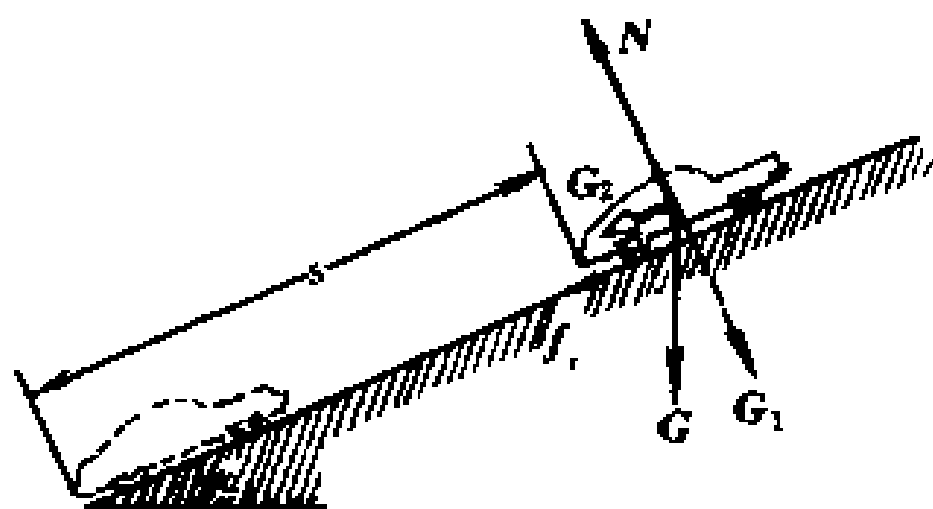


图 3-9 汽车沿斜坡上冲

坡的距离为 s , 此时汽车的末速度为零. 根据动能定理, 并考虑到 N 不作功, 则

$$-f_r \cdot s - Gs \sin \alpha = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

上式说明, 汽车上坡时, 动能一部分消耗于反抗摩擦力做功, 一部分消耗于反抗重力做功. 因 $f_r = \mu N = \mu G_1$, 所以

$$\mu G_1 s + Gs \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2)$$

按题意, $\tan \alpha = 0.010$, 表示斜坡与水平面的夹角很小, 所以 $\sin \alpha \approx \tan \alpha$, $G_1 \approx G$, 并因 $G = mg$, 上式可化成

$$\mu gs + g s \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} v_0^2 \quad (3)$$

或
$$s = \frac{v_0^2}{2g(\mu + \operatorname{tg} \alpha)}$$

代入已知数字得

$$s = \frac{10^2}{2 \times 9.81(0.05 + 0.010)} \text{ m} = 85 \text{ m}$$

解法二：取汽车和地球这一系统为研究对象，则系统内只有汽车受到 f_r 和 N 两个外力的作用，运用系统的功能原理，有

$$-f_r s = (0 + Gs \sin \alpha) - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 \right)$$

即
$$\mu Gs = \frac{1}{2} m v_0^2 - Gs \sin \alpha \quad (4)$$

上式说明，汽车在上坡前动能和势能（设为零）的总和大于上坡后动能（为零）和势能的总和，汽车在上坡中机械能减少了，它所减小的能量等于反抗摩擦力所作的功。代入已知数字，同样解得 $s = 85 \text{ m}$ 。

从这个例子中我们看到，在应用动能定理时，必须计算一切外力（包括重力）所作的功，但如果考虑了系统的重力势能而应用系统的功能原理，那么就不能再把重力看作外力，也不必再计算重力作的功。

例题 3-3 在图 3-10 中，一个质量 $m = 2 \text{ kg}$ 的物体从静止开始，沿四分之一的圆周从 A 滑到 B 。已知圆的半径 $R = 4 \text{ m}$ ，设物体在 B 处的速度 $v = 6 \text{ m/s}$ ，求在下滑过程中，摩擦力所作的功。

解 在物体从 A 到 B 的下滑过程中，不仅有重力 G 的作用，而且还有摩擦力 f_r 和正压力 N 的作用， f_r 与 N 两者都是变力。 N 处处和物体运动方

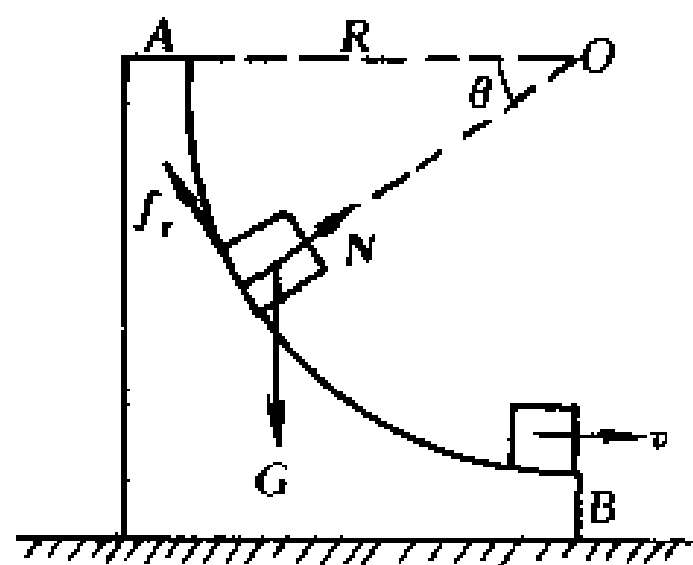


图 3-10 物体沿圆轨道下滑

向相垂直,所以它是不作功的,但摩擦力所作的功却因它是变力而使计算复杂起来^①,不能直接用 $A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 来计算. 这时,比较方便的方法是采用功能原理进行计算. 把物体和地球作为系统,则物体在 A 点时系统的能量 E_A 是系统的势能 mgR ,而在 B 点时系统的能量 E_B 则是动能 $\frac{1}{2}mv^2$,它们的差值就是摩擦力所作的功,因此

$$A = E_B - E_A = \frac{1}{2}mv^2 - mgR = \frac{1}{2} \times 2 \times (6)^2 \text{ J} \\ - 2 \times 9.8 \times 4 \text{ J} = -42.4 \text{ J}$$

负号表示摩擦力对物体作负功,即物体反抗摩擦力做功 42.4 J.

例题 3-4 伯努利(D. Bernoulli)方程是流体力学的基本定律,它说明了理想流体(不可压缩的没有粘性的流体)在管道中作稳定流动时,流体中某点的压强 p 、流速 v 和高度 h 三个量之间的关系为

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{常量}$$

式中 ρ 是流体的密度, g 是重力加速度. 试由功能原理导出伯努利方程.

① 即使用动能定理,也不能直接计算 f_r 的功. 这时按牛顿定律:

$$\text{径向} \quad N - mg \sin \theta = mv^2/R$$

$$\text{切向} \quad mg \cos \theta - f_r = mg \cos \theta - \mu N = mg \left(\cos \theta - \mu \sin \theta - \frac{\mu v^2}{gR} \right) = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

对沿轨道的元位移 $ds = R d\theta$, 用动能定理得

$$mg(\cos \theta - \mu \sin \theta - \mu v^2/gR) R d\theta = d \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \quad (2)$$

消去 m , 并令 $u = v^2$, 由(2)得

$$\frac{du}{d\theta} + 2\mu u = 2gR(\cos \theta - \mu \sin \theta) \quad (3)$$

解微分方程(3), 因在 $t=0$ 时, $u = v_0^2 = 0$, 可得

$$u = v^2 = \frac{(1 - 2\mu^2) \sin \theta + 3\mu(\cos \theta - e^{-2\mu\theta})}{1 + 4\mu^2} 2g \quad (4)$$

令 $\theta = \pi/2$, 即得物体在 B 点的速度. 由此可见, 这种计算很复杂.

解 如图 3-11 所示,我们研究管道中一段流体的运动.设在某一时刻,这段流体在 a_1a_2 位置,经过极短时间 Δt 后,这段流体到达 b_1b_2 位置.

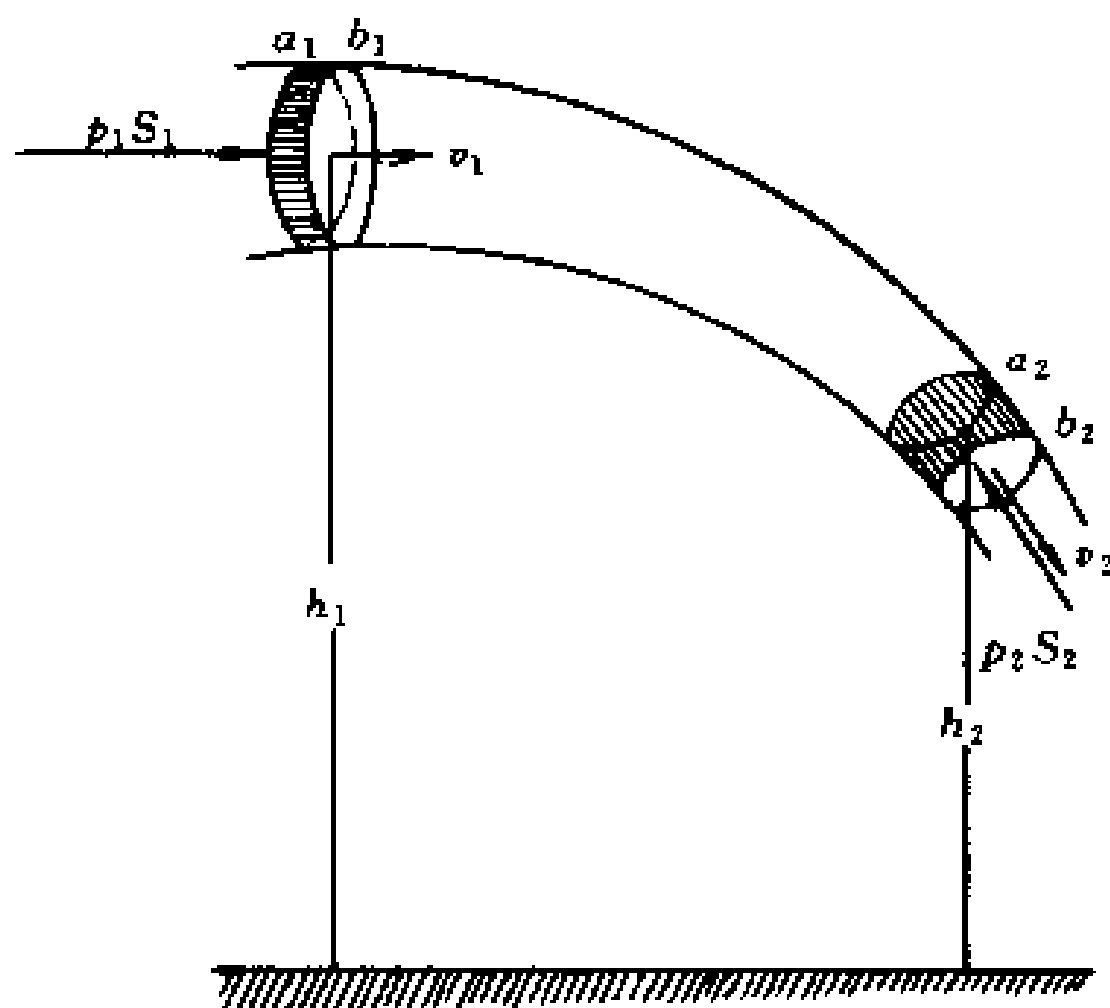


图 3-11 管道中流体的运动

现在计算在流动过程中,外力对这段流体所作的功.假设流体没有粘性,管壁对它也没有摩擦力,那么,管壁对这段流体的作用力垂直于它的流动方向,因而不做功.所以,在流动过程中,除了重力以外,只有在它前后的流体对它所作用的力做功.在它后面的流体推它前进,这个作用力作正功;在它前面的流体阻碍它前进,这个作用力作负功.

因为时间 Δt 极短,所以 a_1b_1 和 a_2b_2 是两段极短的位移,在每段极短的位移中,压强 p 、截面积 S 和流速 v 都可看作不变.设 p_1 、 S_1 、 v_1 和 p_2 、 S_2 、 v_2 分别是 a_1b_1 与 a_2b_2 处流体的压强、截面积和流速,则后面流体的作用力是 p_1S_1 ,位移是 $v_1\Delta t$,所作的正功是 $p_1S_1v_1\Delta t$,面前面流体作用力作的负功是 $-p_2S_2v_2\Delta t$,因此,外力的总功是

$$A = (p_1S_1v_1 - p_2S_2v_2)\Delta t$$

因为流体被认为不可压缩,所以 a_1b_1 和 a_2b_2 两小段流体的体积 $S_1v_1\Delta t$ 和 $S_2v_2\Delta t$ 必然相等,用 ΔV 表示,则上式可写成

$$A = (p_1 - p_2)\Delta V$$

其次,计算这段流体在流动中能量的变化.对于稳定流动来说,在 b_1a_2 间的流体的动能和势能是不改变的.因此,就能量的变化来说,可以看作是原先在 a_1b_1 处的流体,在时间 Δt 内移到了 a_2b_2 处,由此而引起的能量增量是

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \right) \\ &= \rho\Delta V \left[\left(\frac{1}{2}v_2^2 + gh_2 \right) - \left(\frac{1}{2}v_1^2 + gh_1 \right) \right] \end{aligned}$$

从功能原理得

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \rho\Delta V \left[\left(\frac{1}{2}v_2^2 + gh_2 \right) - \left(\frac{1}{2}v_1^2 + gh_1 \right) \right]$$

整理后得到

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 \quad (1)$$

这就是伯努利方程.它表明在同一管道中任何一点处,流体每单位体积的动能和势能以及该处压强之和是个常量.在工程上,上式常写成

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{常量} \quad (2)$$

$\frac{p}{\rho g}$ 、 $\frac{v^2}{2g}$ 、 h 三项都相当于长度,分别叫做压力头、速度头、水头,所以伯努利方程表明在同一管道的任一点处,压力头、速度头、水头之和是一常量,对作稳定流动的理想流体,用这个方程对确定流体内部压力和流速有很大的实际意义,在水利、造船、航空等工程部门有广泛的应用.

§ 3-3 机械能守恒定律 能量守恒定律

1. 机械能守恒定律

上面分别讨论了机械能——动能和势能,以及它们和外力的功之间的关系.在本节中我们将讨论机械能之间相互转换的情况,并由此说明机械能守恒的条件.

为使问题具体化,我们讨论图 3-2 所示的弹簧振子的振动过程.设这个弹簧振子是在无摩擦的水平面上振动,它在振动中,距离平衡位置的最大位移为 A ,通常把 A 叫做振幅.振子在振幅处,弹性势能有最大值,等于 $\frac{1}{2}kA^2$,但动能为零;当振子在弹性恢复力作用下运动到平衡位置,弹性势能变为零,而动能达到最大值.由于振子惯性的作用,它经过平衡位置,又运动到振幅处,弹性势能再次变为最大值,而动能又等于零.如此周而复始地来回振动,振幅始终保持不变.这种振动叫无阻尼自由振动,因振幅不变,所以无阻尼自由振动是个等幅振动.显然,在弹簧振子的无阻尼自由振动中,动能和势能相互转换,但它们的总和保持不变,机械能是守恒的.

如果上述弹簧振子在粗糙的水平面上振动,情况就大不一样,振动系统的机械能由于摩擦的阻尼作用,将不断地减少.虽然在振动中,动能和势能仍在不断地相互转换,但振幅却愈变愈小.这种振动叫做阻尼振动,阻尼振动是个减幅振动.这时,机械能因摩擦力存在而不再守恒.

为了克服阻力作用,可以对弹簧振子施加一个周期性的外力,使系统作受迫振动.受迫振动开始时情形比较复杂,振幅在不断地增大,但经过一段时间后,会进入一种稳定状态.从能量角度来看,最初,系统因外力的功大于阻尼损耗的能量,导致系统能量的增

大. 其后, 由于阻尼力一般随速度的增加而增大, 随着振动的加强, 阻尼损耗的能量也多起来了. 当外力作的功恰好补偿系统所损耗的能量时, 系统的机械能才保持不变, 振动也稳定下来, 成为等幅振动.

以上的讨论表明, 当没有外力和非保守内力所作的功时, 振动系统的动能和势能可以相互转换, 但它们的总和即机械能保持不变, 这是无阻尼自由振动的情况. 当有非保守力存在时, 不管它是外力还是内力, 机械能不再守恒, 这是阻尼振动的情况. 当既有非保守力又有周期性外力做功时, 一般来说, 机械能也不守恒. 这是受迫振动的不稳定状态. 只有当非保守力的负功和外力的正功恰好相等时, 机械能才会守恒, 这才是稳定的受迫振动. 由此可见, 机械能在转换过程中保持不变是有条件的. 下面, 通过理论分析, 把机械能守恒的条件找出来.

根据系统的功能原理式(3-10), 容易看出系统机械能守恒需要什么条件. 因 $A_e + A_d = \Delta E$, 所以, 当

$$A_e + A_d = 0 \text{ 时 } \Delta E = 0 \quad (3-11)$$

这就是说, 如果一个系统内只有保守力作功, 其他内力和一切外力都不做功, 或者它们的总功为零, 则系统内各物体的动能和势能可以互相转换, 但机械能的总值不变. 这个结论叫做机械能守恒定律.

在机械运动范围内, 我们所讨论的能量只是动能和势能. 由于物质运动形式的多样化, 我们还将遇到其他形式的能量, 如热能、电能、原子能等等. 如果系统内除保守力外, 还有非保守力在做功, 则系统的机械能必将发生变化, 这时机械能不再守恒. 但是, 人们发现, 系统的机械能减少或增加的同时, 必然有等值的其他形式的能量在增加或减少, 而使系统的机械能和其他形式的能量的总和保持不变. 由此可见, 机械能守恒定律仅是上述情况的一个特例, 自然界还存在着比它更为普遍的定律.

2. 能量守恒定律

一个不受外界作用的系统叫做孤立系统。对于孤立系统，外力的功当然为零。如果系统状态变化时，有非保守内力做功，它的机械能当然就不守恒了。但大量实验证明，一个孤立系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的，能量只能从一种形式变化为另一种形式，或从系统内一个物体传给另一个物体，这就是能量守恒定律。它是物理学中具有最大普遍性的定律之一。

因为能量是各种运动的一般量度，所以能量守恒定律所阐明的实质就是各种物质运动可以相互转换。但是，就物质或运动本身来说，却是既不能创造，也不会消灭的。在历史上有不少具有物质不灭与运动守恒思想的人。我国明末清初的王夫之就是其中的一个。他在《周易外传·系辞下传》中说：“太虚者，本动者也。动以入动，不滞不息”。太虚指的是物质，把物质的本性说成是动的，而且能从一种运动转入另一种运动，这是可贵的运动守恒思想的萌芽。不仅如此，他还以实验观察为基础，列举了烧柴、炼汞等事例^①，阐明物体虽有生成有毁坏，但不过是变成别的东西而已，物质并没有消灭。我们的祖先很早就有物质不灭思想方面有这样的认识，不能不使我们感到骄傲。到了19世纪，经过迈耶(J. L. Meyer)、焦耳(J. P. Joule)和亥姆霍兹(H. Von Helmholtz)等人的努力，建立了普遍的能量守恒定律。恩格斯把能量守恒定律同生物的进化、细胞的发现相提并论，誉为19世纪三个最伟大的科学发现^②。

守恒定律之所以重要是因为有下面的原因。一方面，自然界一切已经实现的过程无一例外遵守着这些守恒定律。如果发现有所违反，那常常因为过程中孕含着还未被认识的新事物。于是人们就

① 王夫之，《张子正蒙注》：“丰薪之火，一烈而尽，而为焰，为烟，为烬，木者仍归木，水者仍归水，土者仍归土，特希微而人不见尔”。“汞见火则飞，不知何往，而究归于地”。

② 恩格斯，自然辩证法，北京：人民出版社，1971，203

按守恒定律要求去寻找和发现新事物. 20 世纪物理学的发展过程中有不少这样的事例. 在 β 衰变的研究中, 一些物理学家曾主张依据当时的实验结果放弃能量守恒, 但是, 年轻的泡利 (W. Pauli) 坚信能量必须守恒, 实验上的差别在于人们当时未能捕捉到一个中性的、穿透力太强、质量又太小的幽灵, 这就是泡利的中微子假说. 20 多年以后, 科学家终于找到了中微子, 支持了泡利的假说, 捍卫了守恒定律. 另一方面, 凡违背守恒定律的过程就是不能实现的, 因此可根据守恒定律判断哪些过程不可能发生, 哪些构想不可能实现. 历史上曾有许多人企图发明一种“永动机”, 它不消耗能量而能连续不断地对外做功, 或消耗少量能量而作大量的功. 这种设想违反能量守恒定律, 这类永动机只能以失败而告终. 此外, 利用守恒定律研究物体系统, 可不管系统内各物体的相互作用如何复杂, 也不问过程的细节如何, 而直截了当地对系统的始末状态的某些特征下结论, 为解决问题另辟新路子, 这也是守恒定律的特点和优点. 在某种意义上说, 物理学家所追求的就是想方设法找寻所研究的现象中存在哪些守恒定律.

例题 3-5 起重机用钢丝绳吊运一质量为 m 的物体, 以速度 v_0 作匀速下降, 如图 3-12 所示. 当起重机突然刹车时, 物体因惯性继续下降, 问使钢丝绳再有多少微小的伸长? (设钢丝绳的劲度系数为 k , 钢丝绳的重量忽略不计). 这样突然刹车后, 钢丝绳所受的最大拉力将有多大?

解 我们考察由物体、地球和钢丝绳所组成的系统. 除重力和钢丝绳中的弹性力外, 其它的外力和内力都不做功, 所以系统的机械能守恒.

现在研究两个位置的机械能.

在起重机突然停止的那个瞬时位置, 物体的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

设这时钢丝绳的伸长量为 x_0 , 系统的弹性势能为

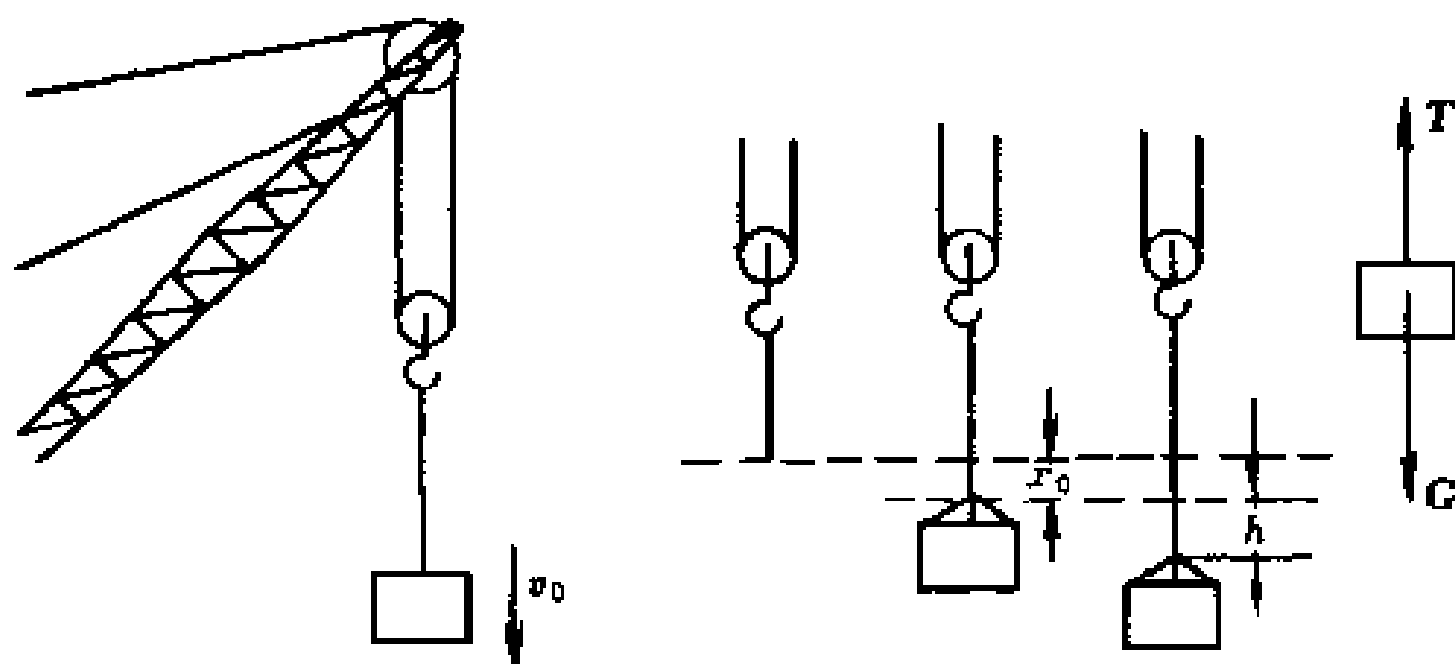


图 3-12 起重机吊运物体

$$E_{p1}^{\#} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

如果物体因惯性继续下降的微小距离为 h , 并且以这最低位置作为重力势能的零位置, 那么, 系统这时的重力势能为

$$E_{p1}^{\blacksquare} = mgh$$

所以, 系统在这位置的总机械能为

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{k1} + E_{p1}^{\#} + E_{p1}^{\blacksquare} \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 + mgh \end{aligned}$$

在物体下降到最低位置时, 物体的动能 $E_{k2} = 0$, 系统的弹性势能应为

$$E_{p2}^{\#} = \frac{1}{2} k (x_0 + h)^2$$

而此时的重力势能 $E_{p2}^{\blacksquare} = 0$. 所以, 在最低位置时, 系统的总机械能为

$$E_2 = E_{k2} + E_{p2}^{\#} + E_{p2}^{\blacksquare} = \frac{1}{2} k (x_0 + h)^2$$

按机械能守恒定律, 应有 $E_1 = E_2$, 于是

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 + mgh = \frac{1}{2} k (x_0 + h)^2$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{2}kh^2 + (kx_0 - mg)h - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

由于物体作匀速运动时, 钢丝绳的伸长量 x_0 满足 $x_0 = \frac{G}{k} = \frac{mg}{k}$, 代入上式后得

$$kh^2 - mv_0^2 = 0$$

$$\text{即} \quad h = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

钢丝绳对物体的拉力 T 和物体对钢丝绳的拉力 T' 是一对作用力和反作用力. T' 和 T 的大小决定于钢丝绳的伸长量 x , $T' = kx$. 现在, 当物体在起重机突然刹车后因惯性而下降, 在最低位置时相应的伸长量 $x = x_0 + h$ 是钢丝绳的最大伸长量, 所以钢丝绳所受的最大拉力

$$T'_m = k(x_0 + h) = k\left(\frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\right) = mg + \sqrt{km}v_0$$

由此式可见, 如果 v_0 较大, T'_m 也较大. 所以对于一定的钢丝绳来说, 应规定吊运速度 v_0 不得超过某一限值.

例题 3-6 用一弹簧将质量分别为 m_1 和 m_2 的上下两水平木板连接如图 3-13 所示, 下板放在地面上.

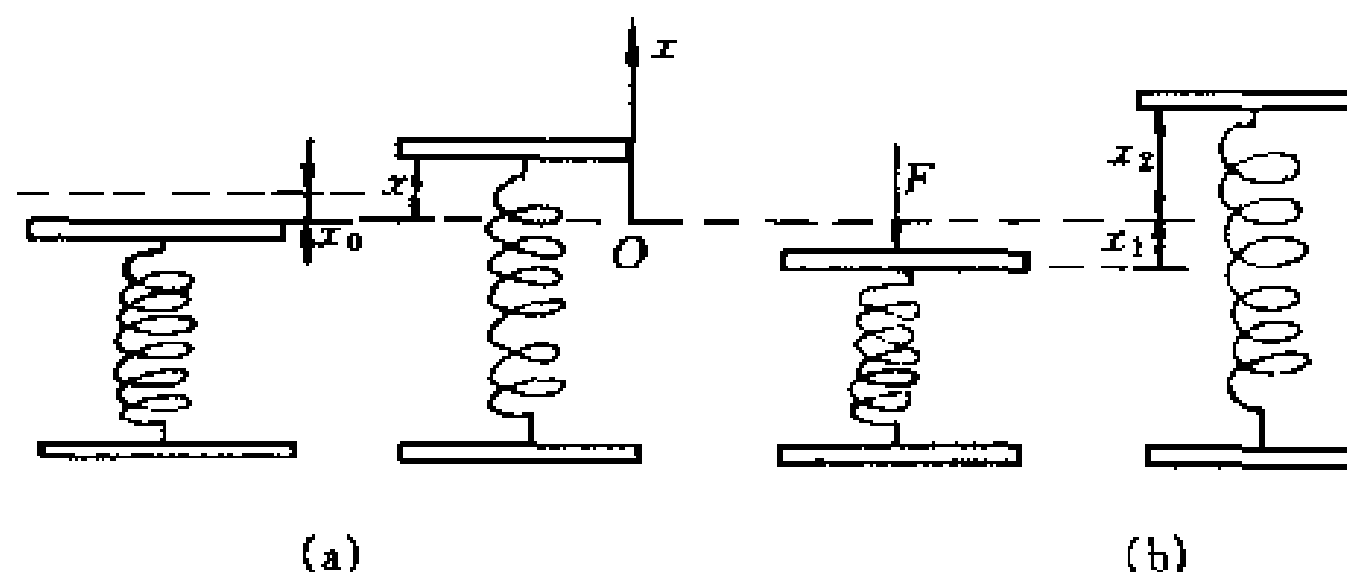


图 3-13 例题 3-6 图

(1) 如以上板在弹簧上的平衡静止位置为重力势能和弹性势能的零点, 试写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能.

(2) 对上板加多大的向下压力 F , 才能因突然撤去它, 使上板向上跳而把下板拉起来?

解 (1) 参看图(a), 取上板的平衡位置为 x 轴的原点, 并设弹簧为原长时上板处在 x_0 位置. 系统的弹性势能

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= \frac{1}{2}kx^2 - kx_0x \end{aligned}$$

系统的重力势能

$$E_{pg} = m_1gx$$

所以, 总势能为

$$E_p = E_{pe} + E_{pg} = \frac{1}{2}kx^2 - kx_0x + m_1gx$$

考虑到上板在弹簧上的平衡条件, 得 $kx_0 = m_1g$, 代入上式得

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

可见, 如选上板在弹簧上静止的平衡位置为原点和势能零点, 则系统的总势能将只以弹性势能的单一形式出现.

(2) 参看图(b), 以加力 F 时为初态, 撤去力 F 而弹簧伸长最大时为末态, 则

$$\text{初态:} \quad E_{k1} = 0, \quad E_{p1} = \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$\text{末态:} \quad E_{k2} = 0, \quad E_{p2} = \frac{1}{2}kx_2^2$$

根据机械能守恒定律, 应有

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2$$

又因恰好提起 m_2 时, $k(x_2 - x_0) = m_2g$, 而 $kx_1 = F$, $kx_0 = m_1g$, 代入解得

$$F = (m_1 + m_2)g$$

这是说, 当 $F \geq (m_1 + m_2)g$ 时, 下板就能被拉起.

有趣的是题中弹簧系统的上跳和人体上跳有其相似之处. 弹簧系统通过力 F 的压缩, 把力 F 作的功转变为弹性势能, 撤去外力后, 弹性势能释放出来转变为动能, 随后动能又转变为重力势能的增量, 而使两板的位置被提高. 撤去外力后, 上跳过程中是保守内力(弹性力)在作功. 人体上跳, 总是先蹲下身去, 然后再向上伸直身体, 这实际上是通过腿关节的非保守内力对人体上部作功, 使之获得向上的动能, 随后动能转变为人体上部向上腾空时增加的势能, 并同时把下肢带离地面. 虽然, 一个是保守内力, 一个是非保守内力, 但二者的动作过程是很相似的.

§ 3-4 质心 质心运动定理 动量守恒定律 火箭飞行

1. 质心

在研究多个物体组成的系统时, 质心是个很重要的概念. 现在, 考虑由一刚性轻杆相连的两个质点组成的简单系统. 当我们将它斜向抛出时(如图 3-14 所示), 它在空间的运动是很复杂的, 每

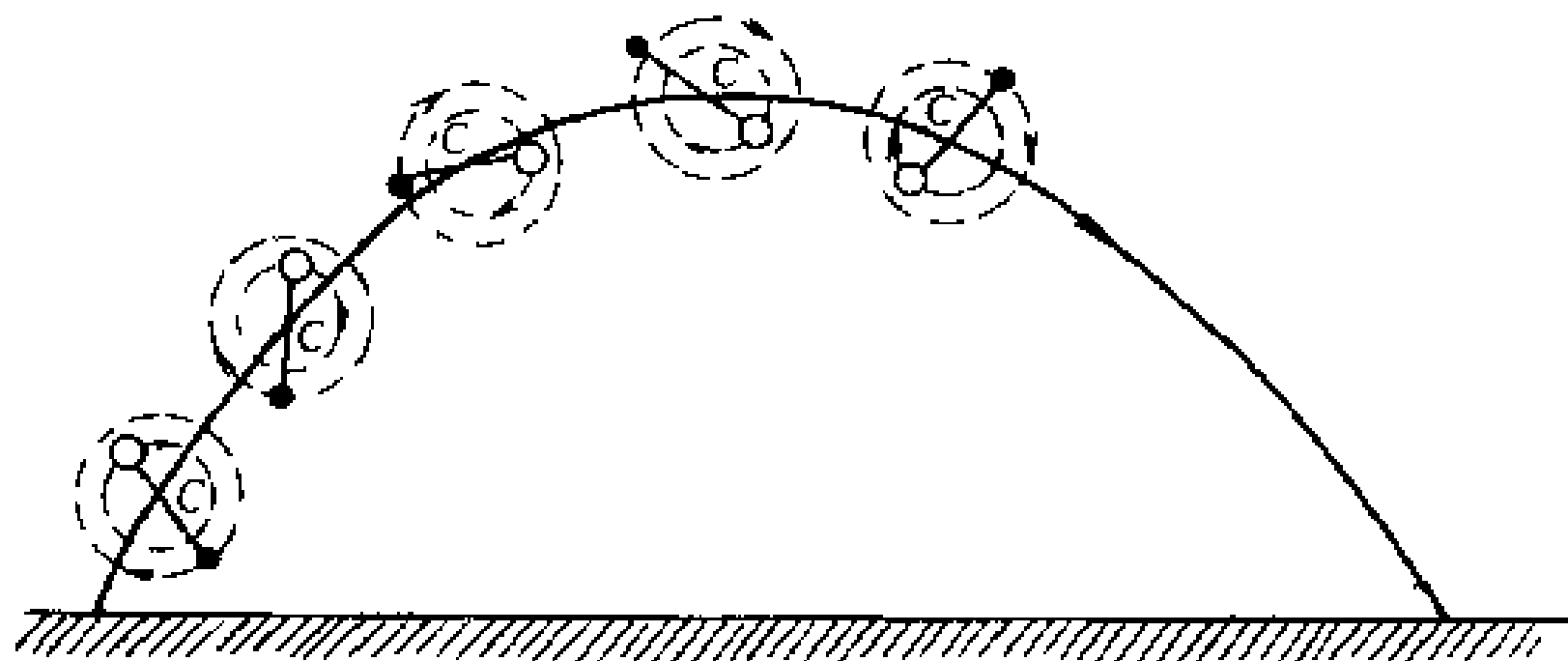


图 3-14 质心的运动轨迹

个质点的轨道都不是抛物线形状. 但实践和理论都证明两质点连线中的某点 C 却仍然作抛物线的运动. C 点的运动规律就象两质

点的质量都集中在 C 点, 全部外力也象是作用在 C 点一样. 这个特殊点 C 就是质点系统的质心.

所谓质心实际上是与质点系统质量分布有关的一个代表点, 它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心. 如果用 m_i 和 r_i 表示系统中第 i 个质点的质量和位矢, 用 r_C 表示质心的位矢, 则质心位置的三个直角坐标被定义为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \sum m_i x_i / M \\ y_C &= \sum m_i y_i / M \\ z_C &= \sum m_i z_i / M \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

式中 $M = \sum m_i$ 为质点系统的总质量. 以上三式为计算平均值的普遍公式, 也可写成矢量式:

$$\boxed{r_C = \sum m_i r_i / M} \quad (3-13)$$

如果把质量连续分布的物体当作质点系统, 求质心时就要把求和改为积分:

$$r_C = \int r dm / M \quad (3-14)$$

则质心位置的三个直角坐标应为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \int x dm / M \\ y_C &= \int y dm / M \\ z_C &= \int z dm / M \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

例题 3-7 求腰长为 a 的等腰直角三角形均匀薄板的质心位置.

解 因为等腰直角三角形对于直角的平分线对称, 所以质心位于此分角线上. 以此分角线为 x 轴, 作坐标轴如图 3-15 所示.

在离原点 x 处, 取宽度为 dx 的面积元, 由于面积元的高度为

$2y$, 所以其面积为 $2ydx = 2xdx$. 设薄板每单位面积的质量为 σ , 则此面积元的质量为

$$dm = 2\sigma x dx$$

应用式(3-15), 求出此三角形质心坐标 x_c 是

$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x^2 dx}{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x dx} = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$

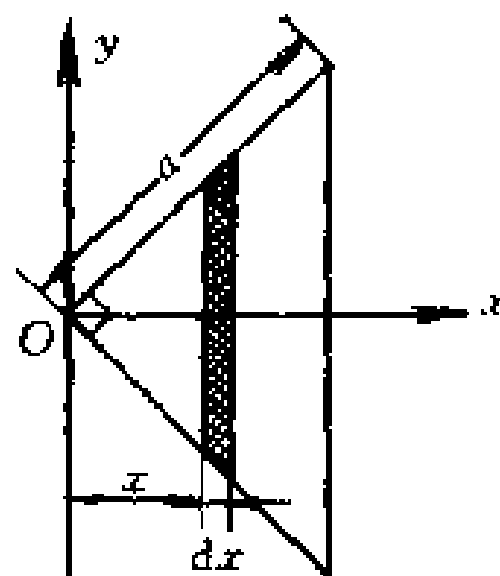


图 3-15 计算等腰
直角三角形均匀
薄板的质心位置

这个结果和熟知的三角形重心位置一致.

必须注意, 重心和质心是两个不同的概念, 不能混为一谈. 一个物体的质心, 是物体运动中由其质量分布所决定的一个特殊的点. 对于一个有一定形状和大小的自由物体来说, 如原为静止, 当外力的作用线通过其质心时, 物体将只作平动, 而没有转动. 就这一情形而言, 物体的质量好象集中在质心上. 重心则是地球对物体各部分引力的合力(即重力)的作用点, 两者的定义是不同的. 当物体远离地球, 不受重力的作用, 重心这个概念便失去意义, 而质心却依然是存在的. 如物体的体积不太大, 可认为物体处于均匀重力场中, 亦即在物体体积内各处的重力加速度 g 大小相等、方向平行时, 物体的重心与质心的位置是重合的.

2. 质心运动定理

当系统中每个质点都在运动时, 系统质心的位置也要发生变化. 现在, 我们从牛顿第二定律和第三定律直接推导出质心的运动定理.

设有一个质点系, 由 n 个质点组成, 它的质心的位矢是

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

由此求得质心的速度为

$$\boxed{\boldsymbol{v}_C = \frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum m_i}} \quad (3-16)$$

而质心的加速度为

$$\boxed{\boldsymbol{a}_C = \frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{a}_i}{\sum m_i}} \quad (3-17)$$

根据牛顿第二定律,系统中各个质点的运动方程为

$$m_1 \boldsymbol{a}_1 = m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{13} + \cdots + \boldsymbol{f}_{1i} + \cdots + \boldsymbol{f}_{1n}$$

$$m_2 \boldsymbol{a}_2 = m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{f}_{23} + \cdots + \boldsymbol{f}_{2i} + \cdots + \boldsymbol{f}_{2n}$$

$$m_i \boldsymbol{a}_i = m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_{i1} + \boldsymbol{f}_{i2} + \cdots + \boldsymbol{f}_{in}$$

.....

$$m_n \boldsymbol{a}_n = m_n \frac{d\boldsymbol{v}_n}{dt} = \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{f}_{n1} + \boldsymbol{f}_{n2} + \cdots + \boldsymbol{f}_{nn-1}$$

在上列各式中, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \cdots, \boldsymbol{F}_i, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 表示系统外的物体对各个质点的作用力, 即为系统所受的外力; 而 $\boldsymbol{f}_{12}, \boldsymbol{f}_{21}, \cdots, \boldsymbol{f}_{in}, \cdots$ 表示系统内各个质点之间的相互作用力, 这些力即为系统的内力. 根据牛顿第三定律, 内力在系统内总是成对地出现的, 它们之间满足关系式 $\boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{21} = 0, \cdots, \boldsymbol{f}_{in} + \boldsymbol{f}_{ni} = 0, \cdots$. 因此, 把上列各式相加后, 即得

$$\begin{aligned} & m_1 \boldsymbol{a}_1 + m_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + m_i \boldsymbol{a}_i + \cdots + m_n \boldsymbol{a}_n \\ &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_i + \cdots + \boldsymbol{F}_n \end{aligned}$$

或者写成

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{F}_i$$

把上式代入式(3-17), 并令 $M = \sum m_i$ 表示系统的总质量, 即得

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{\sum \boldsymbol{F}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \boldsymbol{F}_i}{M}$$

或写成

$$\boxed{\sum F_i = Ma_c} \quad (3-18)$$

这就是质心运动定理。它告诉我们：不管物体的质量如何分布，也不管外力作用在物体的什么位置上，质心的运动就象是物体的全部质量都集中于此，而且所有外力也都集中作用其上的一个质点的运动一样。

例如一颗炮弹在其飞行轨道上爆炸时，它的碎片向四面八方飞散，但如果把这颗炮弹看作一个质点系，由于炮弹的爆炸力是内力，而内力是不能改变质心运动的，所以全部碎片的质心仍继续按原来的弹道曲线运动。对于一个物体，在引入质心的概念之后，对解决比较复杂的机械运动问题会很便利。

3. 动量守恒定律

动量守恒定律和能量守恒定律一样，都是自然界的普遍规律。我们根据系统质心运动定律，可以容易地导出系统动量守恒所必需满足的条件。在式(3-18)中，如果 $\sum F_i = 0$ ，那么系统质心的加速度 a_c 就等于零。按式(3-17)，这意味着质心的速度 v_c 保持不变，亦即质心将以速度 v_c 作匀速直线运动。这时，由式(3-16)可知

$$v_c = \frac{\sum m_i v_i}{M} = \text{常矢量}$$

或者

$$\sum F_i = 0 \text{ 时} \quad \sum m_i v_i = M v_c = \text{常矢量} \quad (3-19)$$

这就是说，如果系统所受到的外力之和为零（即 $\sum F_i = 0$ ），则系统的总动量保持不变。这个结论叫做动量守恒定律。不难看出，系统的动量不变与质心保持匀速直线运动状态是等效的。

动量守恒定律的适用条件，是系统内各物体不受外力或所受的外力之和为零。为此，在应用时，首先要分析系统内各物体所受

的外力,如果系统内所受的外力满足条件 $\sum F_i=0$;或在极短促的时间内,系统所受的外力远比系统内相互作用的内力为小(例如碰撞过程)而可以忽略不计时,就可以应用动量守恒定律来处理问题.

动量守恒定律的数学表达式是一个矢量式.在实际计算时,可用它按各坐标轴分解的分量式,即

$$\left. \begin{aligned} m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \cdots + m_nv_{nx} &= \text{常量} && (\text{若 } \sum F_{ix} = 0) \\ m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + \cdots + m_nv_{ny} &= \text{常量} && (\text{若 } \sum F_{iy} = 0) \\ m_1v_{1z} + m_2v_{2z} + \cdots + m_nv_{nz} &= \text{常量} && (\text{若 } \sum F_{iz} = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

有时,当我们分析系统所受的外力时,得出系统的外力之和并不等于零,但外力在某一方向的分量之和却为零.在这种情形下,尽管系统的总动量不守恒,但总动量在该方向的分量却是守恒的.这一结论也具有普遍性,它在很多实际问题中要用到.

动量守恒定律表明,在物体机械运动转移过程中,系统中一物体获得动量的同时,必然是别的物体失去了一份与之相等的动量;所以,动量这个物理量的深刻意义在于它正是物体机械运动的一种量度,物体动量的转移反映了物体机械运动的转移.

物体的动量 mv 是物体机械运动的一种量度.物体的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 也是物体机械运动的一种量度.一个是矢量,一个是标量.动量反映了机械运动的矢量属性,能量反映了机械运动的标量属性.运动是复杂的,只有动量和能量一起,才能作为运动的全面量度.

4. 火箭飞行

我国是发明火箭最早的国家.随着火药的出现,约在公元九、十世纪,我国就开始把火药用到军事上.公元1232年,已在战争中

使用了真正的火箭. 当时甚至有人利用47枚大火箭, 作推动座椅飞行的试验. 火箭在飞行时, 它在背着飞行的方向上不断地喷出大量速度很大的气体, 使火箭在飞行方向上获得很大的动量, 从而获得巨大的前进速度. 因为这一切并不依赖于空气的作用, 所以它可在空气稀薄的高空或宇宙空间飞行.

一枚火箭在外层高空飞行, 那里空气的阻力和重力的影响都可以忽略不计. 设在某一瞬时 t , 火箭的质量为 m , 速度为 v (图3-16), 在其后 t 到 $t+dt$ 时间内, 火箭喷出了质量为 $|dm|$ 的气体 (这



图3-16 火箭飞行原理

里, dm 是质量 m 在 dt 时间内的增量, 由于质量 m 是随 t 的增加而减小, 所以 dm 本身具有负值), 喷出的气体相对于火箭的速度为 u , 使火箭的速度增加了 dv , 对于火箭和燃气所组成的系统来说, 在喷气前, 它们的总动量为 mv ; 喷气后, 火箭的动量为 $(m+dm)(v+dv)$, 所喷出燃气的动量为 $(-dm)(v-u)$ (这里, $v-u$ 是燃气相对于描述火箭运动的惯性系的速度). 由于火箭不受外力的作用, 系统的总动量保持不变. 因此, 根据动量守恒定律, 得到

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u)$$

将上式化简, 略去二阶无穷小项 $dm dv$, 可得

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$

上式表示火箭每喷出质量为 $-dm$ 的气体时, 它的速度就增加了 dv . 设燃气相对于火箭的喷气速度 u 是一常量, 将上式积分后可得

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{m_1}^{m_2} -u \frac{dm}{m}$$

或

$$v_2 - v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2} \quad (3-21)$$

此式表示火箭质量从 m_1 减至 m_2 时,火箭速度相应地从 v_1 增加到 v_2 . 设火箭开始飞行时速度为零,质量为 M_0 ,燃料烧尽时,火箭剩下的质量为 M ,此时火箭能够达到的速度是

$$v = \int_{M_0}^M -u \frac{dm}{m} = u \ln \frac{M_0}{M} \quad (3-22)$$

式中 M_0/M 称为火箭的质量比.

由上式(3-22)可以看出,在同样的条件下,如果火箭的喷气速度越大,火箭所能达到的速度也就越大;如果火箭的质量比越大,火箭所能达到的速度也就越大. 因此,要提高火箭的速度,可采用提高喷气速度和质量比的办法. 但这两种办法目前在技术上都有困难,所以,一般都采用多级火箭来达到提高速度.

所谓多级火箭是由几个火箭连接而成的系统,图3-17是三级火箭示意图. 火箭起飞时,第一级火箭的发动机开始工作,推动系统前进. 当第一级的燃料烧尽后,第二级火箭的发动机就开始工作,并自动脱落第一级火箭的外壳,因此第二级火箭在第一级火箭的基础上进一步加速. 依此类推,达到所需要的最终速度.

前一级火箭外壳的脱落,使下一级火箭减轻负担,实际上也就是提高了质量比,因此比携带同样多燃料的单级火箭来说,多级火箭能达到更高的最终速度.

例题3-8 如图3-18所示,设炮车以仰角 θ 发射一炮弹,炮车和炮弹的质量分别为 M 和 m ,炮弹的出口速度的大小为 v ,求炮车的反冲速度 V . 炮车与地面之间的摩擦力略去不计.

解 把炮车和炮弹看成一个系统. 发炮前,该系统在竖直方向

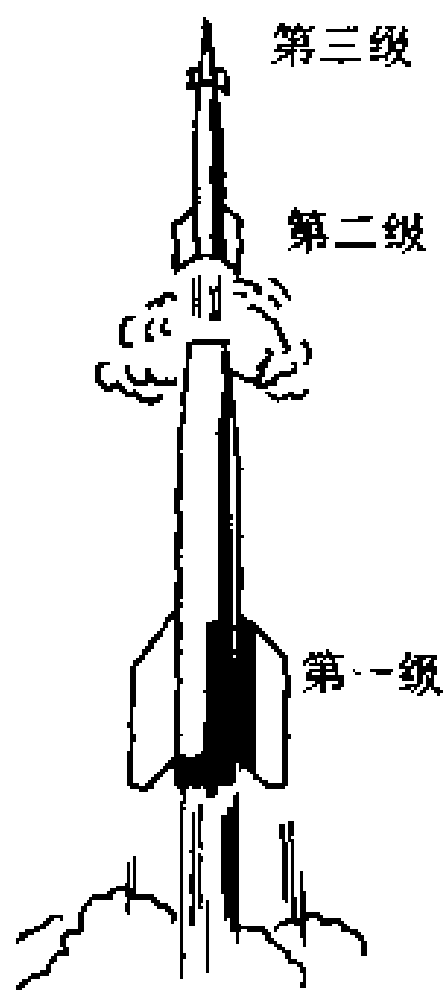


图3-17 三级火箭示意图

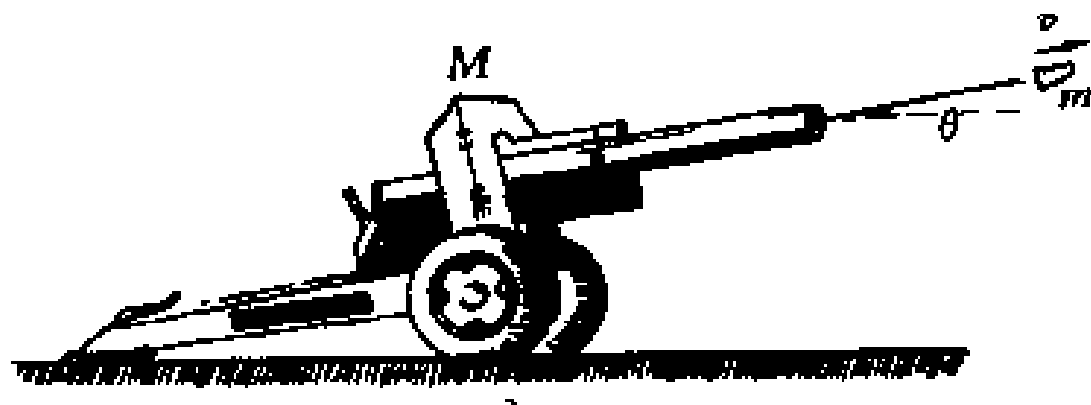


图3-18 炮车的反冲

所受的外力有重力 G 和地面的支持力 N , 而且 $G = -N$. 在发射过程中, 上述关系 $G = -N$ 并不成立 (想一想, 为什么?), 系统所受的外力的矢量和不为零, 所以这一系统的总动量不守恒.

按假设忽略炮车与地面之间的摩擦力, 则系统所受外力在水平方向的分量之和为零, 因而系统沿水平方向的总动量守恒. 在发射炮弹前, 系统的总动量等于零, 系统沿水平方向的总动量也为零, 所以在炮弹出口的一瞬间, 系统沿水平方向的总动量也应等于零. 取炮弹前进时的水平方向为 x 轴正方向, 那么炮弹出口速度 (即炮弹相对于炮车的速度) 沿 x 轴的分量是 $v \cos \theta$, 炮车沿 x 轴的速度分量就是一 V . 在应用动量守恒定律的表达式 (3-19) 时, 应该注意式中各个动量必须是对同一参考系而言的. 因此, 对地面参考系而言, 炮弹相对于地面的速度 u , 按速度变换定理为

$$u = v + V$$

它的水平分量为

$$u_x = v \cos \theta - V$$

于是, 炮弹在水平方向的动量为 $m(v \cos \theta - V)$, 而炮车在水平方向的动量为 $-MV$. 根据动量守恒定律有

$$-MV + m(v \cos \theta - V) = 0$$

由此得炮车的反冲速度为

$$V = \frac{m}{m + M} v \cos \theta$$

例题3-9 一个静止的物体炸裂成三块. 其中两块具有相等的

质量,且以相同的速率 30 m/s 沿相互垂直的方向飞开,第三块的质量恰好等于这两块质量的总和,试求第三块的速度(大小和方向)。

解 物体的动量原等于零.炸裂时,爆炸力是物体内力,它远大于重力,所以在爆炸过程中,可认为动量是守恒的.由此知道,物体分裂为三块后,这三块碎片的动量之和仍然等于零,即

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 = 0$$

所以,这三个动量必处于同一平面内,且第三块的动量必和第一、二块的合动量大小相等而方向相反,如图3-19所示.因为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 相互垂直,所以

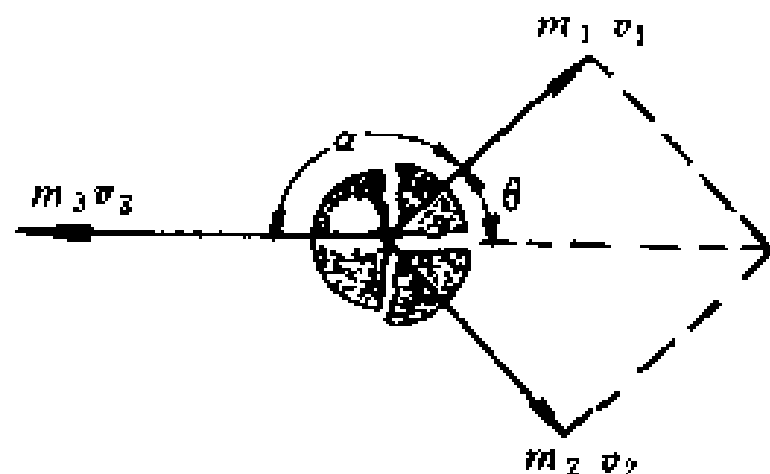


图3-19 一物体炸裂成三块

$$(m_3v_3)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2$$

由于 $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 2m$, 所以 v_3 的大小为

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{30^2 + 30^2} \text{ m/s} \\ &= 15\sqrt{2} \text{ m/s} = 21.2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

v_3 和 v_1 所成之角 α 由下式决定,

$$\alpha = 180^\circ - \theta$$

因 $\text{tg}\theta = \frac{v_2}{v_1} = 1$, $\theta = 45^\circ$, 所以

$$\alpha = 135^\circ$$

即 v_3 和 v_1 及 v_2 都成 135° 角,且三者在同一平面内.

例题3-10 质量为 m_1 和 m_2 的两个小孩,在光滑水平冰面上用绳彼此拉对方.开始时静止,相距为 l .问他们将在何处相遇?

解 把两个小孩和绳看作一个系统,水平方向不受外力,此方向动量守恒.

建立如图3-20的坐标系,以两个小孩距离的中点为原点,向右

为 x 轴正方向. 设开始时质量为 m_1 的小孩坐标为 x_{10} , 质量为 m_2 的小孩坐标为 x_{20} , 他们在任一时刻的速度分别为 v_1 和 v_2 , 相应坐标为 x_1 和 x_2 .

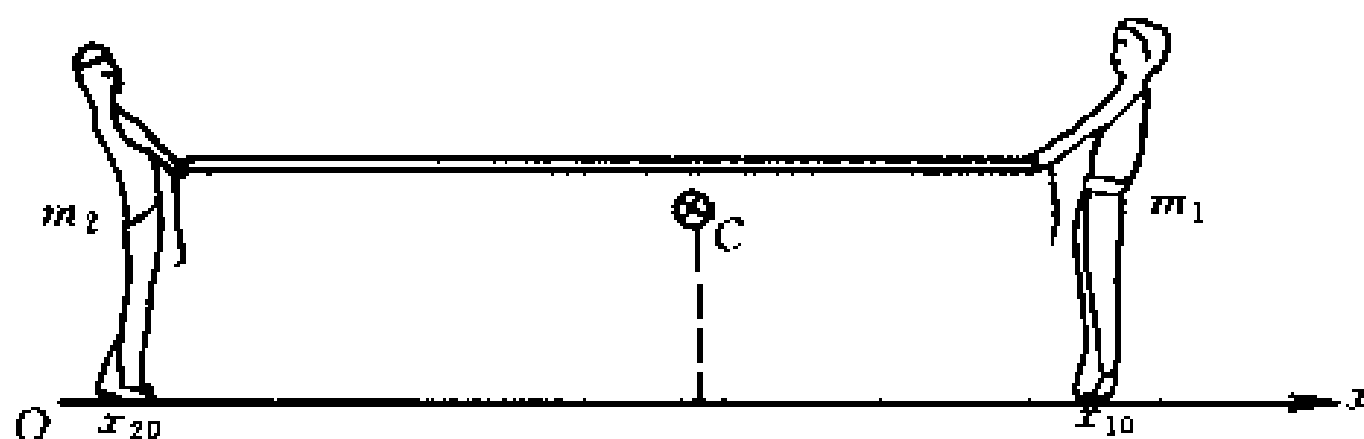


图3-20 两个小孩在冰面上对拉

由运动学公式得

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt \quad (1)$$

$$x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt \quad (2)$$

在相遇时, $x_1 = x_2 = x_C$, 于是有

$$x_{10} + \int_0^t v_1 dt = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

即

$$x_{10} - x_{20} = \int_0^t (v_2 - v_1) dt \quad (3)$$

因动量守恒, 所以

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

代入式(3), 得

$$x_{10} - x_{20} = \int_0^t - \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) v_1 dt = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \int_0^t -v_1 dt$$

即

$$\int_0^t v_1 dt = \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2}$$

代入式(1), 并令 $x_1 = x_C$, 即得

$$x_C = x_{10} + \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

上述结果表明,两小孩在纯内力作用下,将在他们共同的质心相遇.上述结果也可直接由质心运动定律求出.

§ 3-5 碰 撞

如果两个或几个物体在相遇中,物体之间的相互作用仅持续一个极为短暂的时间,这些现象就是碰撞,所以,“碰撞”的含义比较广泛,除了球的撞击、打桩、锻铁外,分子、原子、原子核等微观粒子的相互作用过程等也都是碰撞过程,甚至如人从车上跳下、子弹打入墙壁等现象,在一定条件下也可看作是碰撞过程.在碰撞过程中,由于相互作用的时间极短,相互作用的冲力又极大,碰撞物体所受的其他作用力相对说来都很小,可以忽略不计,因此,在处理碰撞问题时,常将相互碰撞的物体作为一系统来考虑,就可以认为系统内仅有内力的相互作用,所以这一系统应该遵从动量守恒定律.下面我们以两球碰撞为例进行讨论.

如果两球在碰撞前的速度在两球的中心连线上,那么,碰撞后的速度也都在这一连线上,这种碰撞称为对心碰撞(或称正碰撞).我们用 v_{10} 和 v_{20} 分别表示两球在碰撞前的速度, v_1 和 v_2 分别表示在碰撞后的速度, m_1 和 m_2 分别为两球的质量(图3-21).应用动量守恒定律得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{3-20a}$$

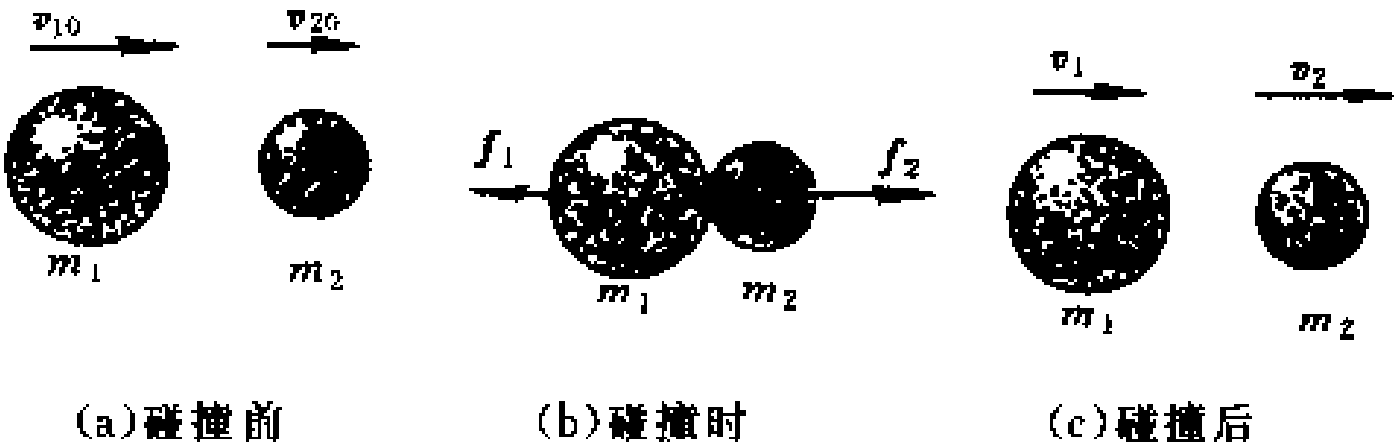


图3-21 两球的对心碰撞

在上式中,假定碰撞前后各个速度都沿着同一方向(在图3-21中速度都向右,均取正值).

牛顿从实验结果总结出一个碰撞定律:碰撞后两球的分离速度 ($v_2 - v_1$), 与碰撞前两球的接近速度 ($v_{10} - v_{20}$) 成正比, 比值由两球的材料性质决定, 即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad (3-23)$$

通常把 e 叫做恢复系数 (在斜碰的情况下, 式中的分离速度与接近速度都是指沿碰撞接触处法线方向上的相对速度). 如果 $e=0$, 则 $v_2 = v_1$, 亦即两球碰撞后以同一速度运动, 并不分开, 这叫做完全非弹性碰撞. 如果 $e=1$, 则分离速度等于接近速度, 它叫做完全弹性碰撞, 这是一种理想的情形. 可以证明, 在完全弹性碰撞中, 两球的机械能完全没有损失, 而在一般情况下, 两球在碰撞过程中, 机械能并不守恒, 总有一部分机械能损失掉, 转变为其他形式的能量, 例如放出热量等. 我们把这种机械能有损失的碰撞叫做非弹性碰撞.

由式(3-20a)和(3-23)可得

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= v_{20} + \frac{(1+e)m_1(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3-24)$$

利用上式, 我们讨论如下两类极端情形.

1. 完全弹性碰撞

这时, 令 $e=1$, 由式(3-24)得

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3-25)$$

下面, 分析两种特例.

(1) 设两球质量相等, 即 $m_2 = m_1$, 代入式(3-25), 得

$$v_1 = v_{20}, \quad v_2 = v_{10}$$

这时,两球经过碰撞将交换彼此的速度.例如,如果第二小球原为静止,则当第一小球与它相撞时,第一小球就停下来,并把速度传递给它.

如设两球的质量相近,则 m_1 与 m_2 愈相近时,就愈接近上述情况.在原子核反应堆中,常用石墨或重水作为中子的减速剂,就是考虑到中子和这些轻原子核(碳原子核或重氢原子核)碰撞时易于减速的缘故.

(2) 设 $m_1 \neq m_2$, 质量为 m_2 的物体在碰撞前静止不动,即 $v_{20} = 0$, 则从式(3-25)可得

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{2m_1v_{10}}{m_1 + m_2}$$

如果 $m_2 \gg m_1$, 那么

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \approx -1, \quad \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \approx 0$$

所以

$$v_1 \approx -v_{10}, \quad v_2 \approx 0$$

即质量极大并且静止的物体,经碰撞后,几乎仍静止不动,而质量极小的物体,在碰撞前后的速度方向相反,大小几乎不变.皮球和地面的碰撞近似地就是这种情形.皮球竖直地落到地面上,以相反方向跳回,而且几乎达到原有的高度.气体分子与器壁垂直地相撞时也是这种情形.

2. 完全非弹性碰撞

在完全非弹性碰撞中, $e = 0$, 由式(3-25)得

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1v_{10} + m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (3-26)$$

3. 碰撞中的力和能

恩格斯在《自然辩证法》中指出:“力——它以运动的转移为前

提”。他在此处指的是机械运动的转移。我们通过碰撞中力的分析，就可认识到这一点。在两个动量相等而速度不同的物体相遇时，动量要发生转移，亦即出现机械运动的转移，因而出现碰撞中的力；而动量不等，速度相同的两物体一起运动，却没有动量的转移，亦即不发生机械运动的转移，因而也不出现力。所以，碰撞中力的大小应和碰撞中转移的动量有关，由此，我们可以计算碰撞中平均冲力的大小。让我们仍就两球碰撞为例予以说明。设碰撞接触时间极短，用 Δt 表示，把动量定理应用于质量为 m_2 的小球，即得

$$\bar{f} = \frac{m_2 v_2 - m_2 v_{20}}{\Delta t}$$

式中 $\bar{f}$ 是变力在 Δt 时间内的平均值。将式(3-24)代入上式，最后得

$$\bar{f} = \frac{m_1 m_2 (1 + e)(v_{10} - v_{20})}{(m_1 + m_2) \Delta t} \quad (3-27)$$

上式告诉我们：力的大小和两物体相遇前的接近速度成正比，而和接触时间成反比。式中的恢复系数和物体的质量还说明，力的大小与接触物体的质量和材料有关。

现在，我们用式(3-24)计算碰撞中损失的机械能，得

$$\Delta E = \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \quad (3-28)$$

上式是个有用的式子。

在工程中，例如打铁、打桩这类问题，经常碰到其中一个物体是静止的，设 $v_{20} = 0$ ，此时损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{10}^2$$

而 $\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2$ 为碰撞前的机械能，以 E_0 表示，于是

$$\Delta E = (1 - e^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0 = (1 - e^2) \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} E_0$$

由此可知，在此情况下，损失的机械能是它原有的机械能的一部

分,而这部分机械能的大小完全取决于两给定碰撞物体的恢复系数和质量比. $\left(\frac{m_1}{m_2} \text{ 越小, } \Delta E \text{ 越大, } \frac{m_1}{m_2} \text{ 越大, } \Delta E \text{ 越小.} \right)$ 在实际问题中,往往根据不同的能量要求,来选择不同的条件.例如,在打铁时,使铁锤和锻件(连同铁砧)碰撞,要锻件在碰撞过程中发生变形,这时尽量使碰撞中的机械能用于锻件变形,这就要求铁砧的质量比铁锤的质量大得多,即 $m_2 \gg m_1$. 打桩的情况就恰好相反,锤和桩碰撞时,锤把机械能传递给桩,使桩尽可能具有较大的动能克服地面的阻力下沉,因此,希望机械能损失得越小越好,这就要求用质量较大的锤撞击质量较小的桩,即 $m_2 \ll m_1$.

例题3-11 在碰撞实验中,常用如图3-22所示的仪器. A 为一小球, B 为蹄状物,质量分别为 m_1 和 m_2 . 开始时,将 A 球从张角 θ 处落下,然后与静止的 B 物相碰撞,嵌入 B 中一起运动,求两物到达最高处的张角 φ .

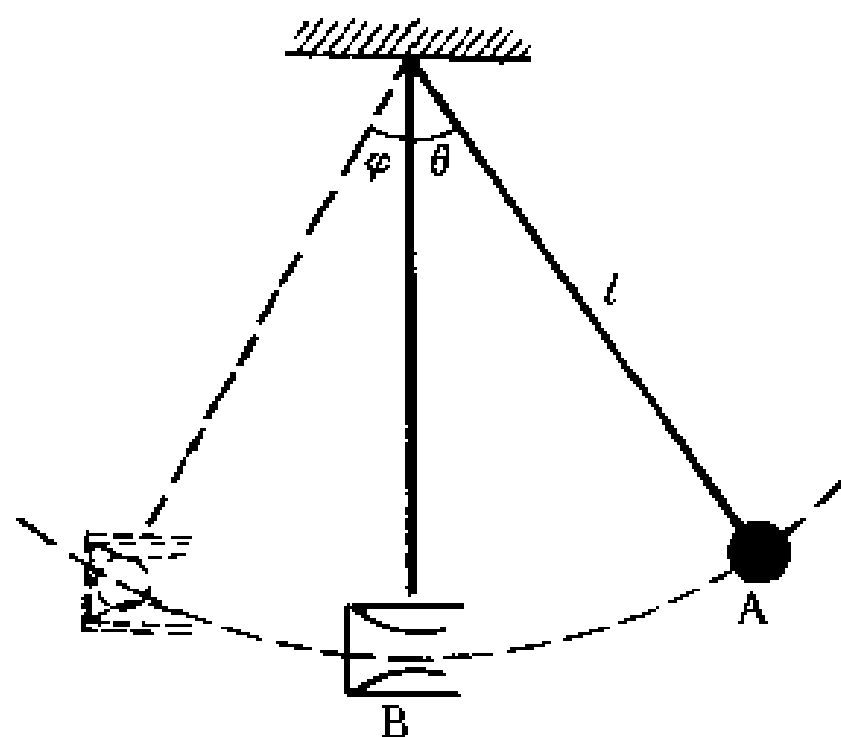


图3-22 碰撞演示仪器

解 首先我们来考虑一个问题,小球在开始位置时的机械能是否等于两物在最终位置的机械能呢?回答是,两者并不相等.为了弄清楚这个问题,并求得本题的解答,我们最好把运动过程分成几个阶段来讨论.

(一) 小球 A 从开始位置下落 h_1 而到最低位置,这是小球与蹄状物 B 碰撞前的过程,小球除受重力外,还受到悬线的拉力,但

拉力不作功,因此机械能守恒.取小球在最低位置时的势能为零,小球在开始位置时的动能为零,只有势能,总机械能为

$$E_1 = m_1gh_1 = m_1gl(1 - \cos\theta)$$

当小球在最低位置时,势能为零,只有动能,设小球的速度为 v ,总机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1v^2$$

根据机械能守恒定律得到

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = m_1gl(1 - \cos\theta)$$

或

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} \quad (1)$$

(二) 当小球与蹄状物碰撞时,两物作完全非弹性碰撞,所以机械能守恒定律不能适用.在两物碰撞中,相互作用的时间极短,我们可以认为它们是在该处完成碰撞后,再一起运动的.由于小球与蹄状物间的冲力是内力,所以可以应用动量守恒定律,即

$$m_1v = (m_1 + m_2)v' \quad (2)$$

式中 v' 就是小球与蹄状物开始一起运动的速度.

(三) 小球与蹄状物开始运动后,在悬线的约束下,沿圆弧运动,最后上升到张角为 φ 处.在这过程中,悬线的拉力不作功,因此也可应用机械能守恒定律,即

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\varphi)$$

或

$$v' = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} \quad (3)$$

从(1)、(2)和(3)三式消去 v 和 v' ,可得 φ 与 θ 之间关系为

$$\cos\varphi = 1 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 (1 - \cos\theta)$$

利用这种碰撞实验,可以验证动量守恒与机械能守恒定律.

例题3-12 一质量为 m 的光滑球 A, 竖直下落, 以速度 u 与质量为 M 的球 B 碰撞. 球 B 由一根细绳悬挂着, 绳长被看作一定. 设碰撞时两球的连心线与竖直方向 (y 方向) 成 θ 角, 如图3-23所示. 已知恢复系数为 e , 求碰撞后球 A 的速度.

解 这是个斜碰问题. 按题意, 我们设 A 在碰撞后的分速度为 v_x 与 v_y ; B 只能沿水平方向运动, 其速度为 v' . 在碰撞中, 因两球在 x 方向所受外力为零, 所以, 由动量守恒定律得

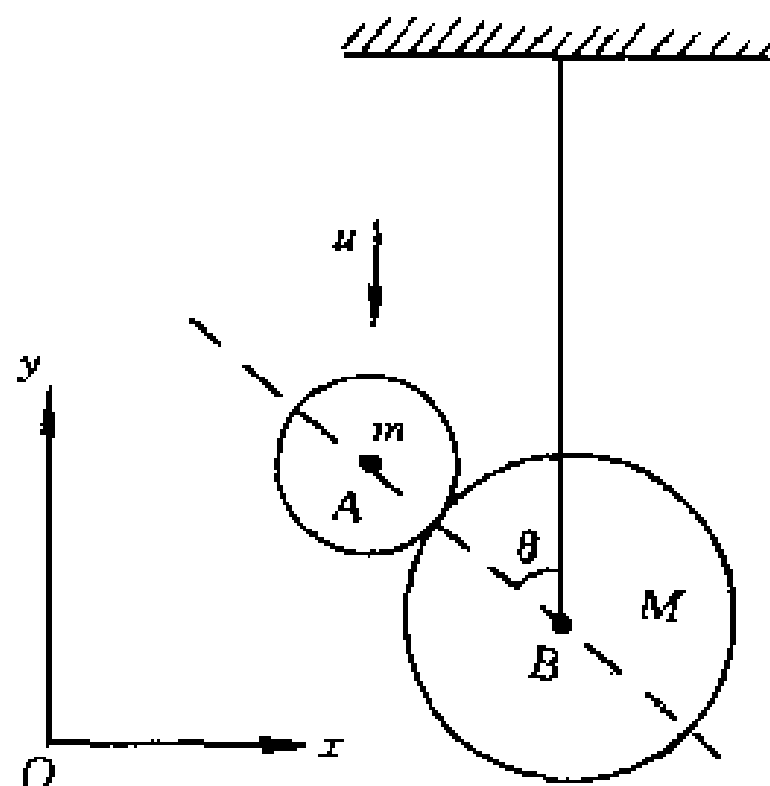


图3-23 两球的斜碰

$$mv_x + Mv' = 0 \quad (1)$$

设在碰撞中相互作用力为 F . 因接触是光滑的, 所以 F 在连心线方向上. 应用动量定理有

$$mv_x = -F \sin \theta \Delta t$$

$$mv_y - (-mu) = F \cos \theta \Delta t$$

由此求得

$$\frac{v_y + u}{v_x} = -\operatorname{ctg} \theta \quad (2)$$

又因在斜碰中, 沿接触处法线方向上的分离速度与接近速度分别为 $-(v' - v_x) \sin \theta - v_y \cos \theta$ 与 $-u \cos \theta$, 因此, 由式(3-23)得

$$e = \frac{-(v' - v_x) \sin \theta - v_y \cos \theta}{-u \cos \theta} \quad (3)$$

由式(1)、(2)与(3)联立求解, 最后得

$$v_x = -u \frac{M(1+e) \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

$$v_y = -u \left[1 - \frac{M(1+e) \cos^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right]$$

当 $\theta = 0$ 时, $v_x = 0$, $v_y = eu$, 这说明球 A 将以速率 eu 反弹. 这是对心

碰撞的结果. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $v_x = 0, v_y = -u$, 这说明球 A 将以速率 u 竖直下落. 因为接触是光滑的, 这后一结果就在意料之中.

§ 3-6 质点的角动量和角动量守恒定律

1. 角动量

在讨论质点运动时, 我们用动量来描述机械运动的状态, 并讨论了在机械运动的转移过程中所遵循的动量守恒定律. 同样, 在讨论质点相对于空间某一定点的运动时, 我们也可以用角动量来描述物体的运动状态. 角动量是一个很重要的概念, 在转动问题中, 它所起的作用和(线)动量所起的作用相类似. 在刚体转动动力学中的角动量定理与角动量守恒定律, 将在第四章中讨论. 本节将只阐述质点的角动量概念和质点角动量守恒定律.

在自然界中经常会遇到质点围绕着一一定的中心运转的情况. 例如, 行星围绕太阳公转、人造卫星围绕地球运转、原子中的电子围绕着原子核运转等等. 为简单计, 我们以质量为 m 的质点所作的圆周运动为例, 引入角动量的概念. 设圆的半径是 r , 则质点对圆心的位矢 $\boldsymbol{r}$ 的量值便是 r . 质点的速度是 $\boldsymbol{v}$, 方向沿着圆的切线方向. 从图 3-24 可以看出, 质点的动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 处处和它的位矢 $\boldsymbol{r}$ 相垂直. 我们把质点动量 $\boldsymbol{p}$ 的量值 p 和位矢 $\boldsymbol{r}$ 的量值 r 的乘积定义为作圆周运动的质点对圆心 O 的角动量的量值, 用 L 表示,

$$L = pr = mvr \quad (3-29)$$

在一般情况下, 质点的动量和它对于给定点的位矢不一定垂直, 例如, 行星绕太阳在椭圆轨道上运动时(图 3-25), 除几个特殊位置外, 行星的动量 $\boldsymbol{p}$ 和它对于太阳的位矢 $\boldsymbol{r}$ 并不互相垂直. 在这种情形中, 质点对某一给定点 O 的角动量的量值应为质点的动量和点 O 到动量 $\boldsymbol{p}$ 的垂直距离 d 的乘积, 即

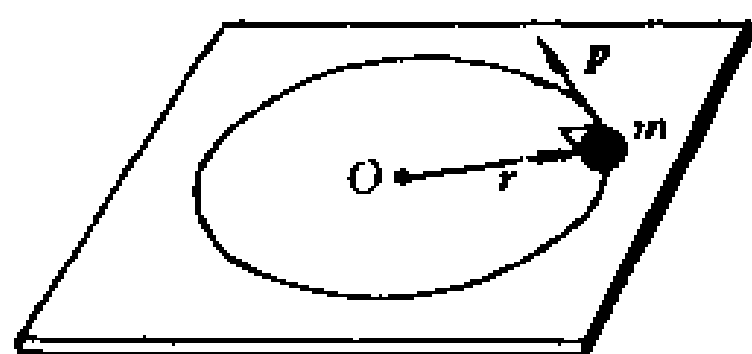


图3-24 质点对圆心的角动量

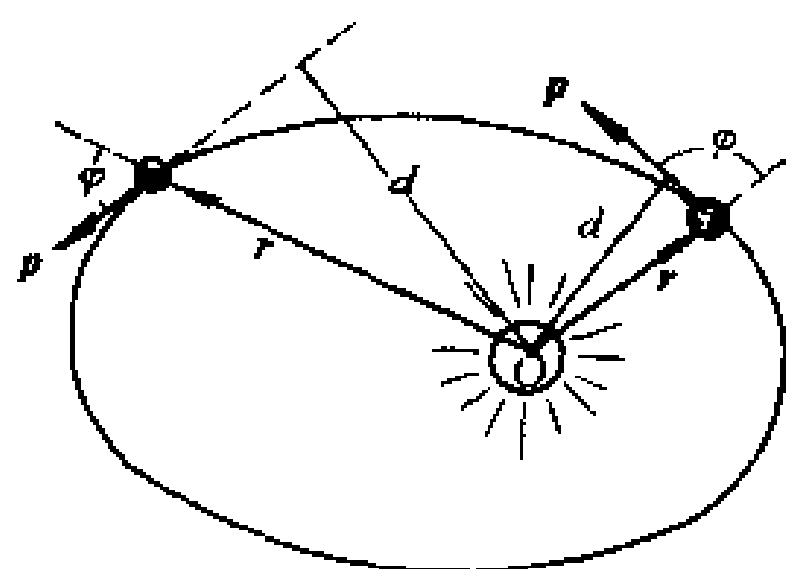


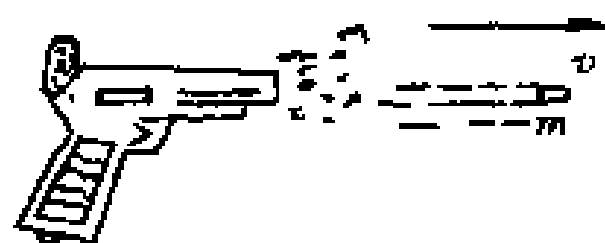
图3-25 行星在公转轨道上的角动量

$$L = pd$$

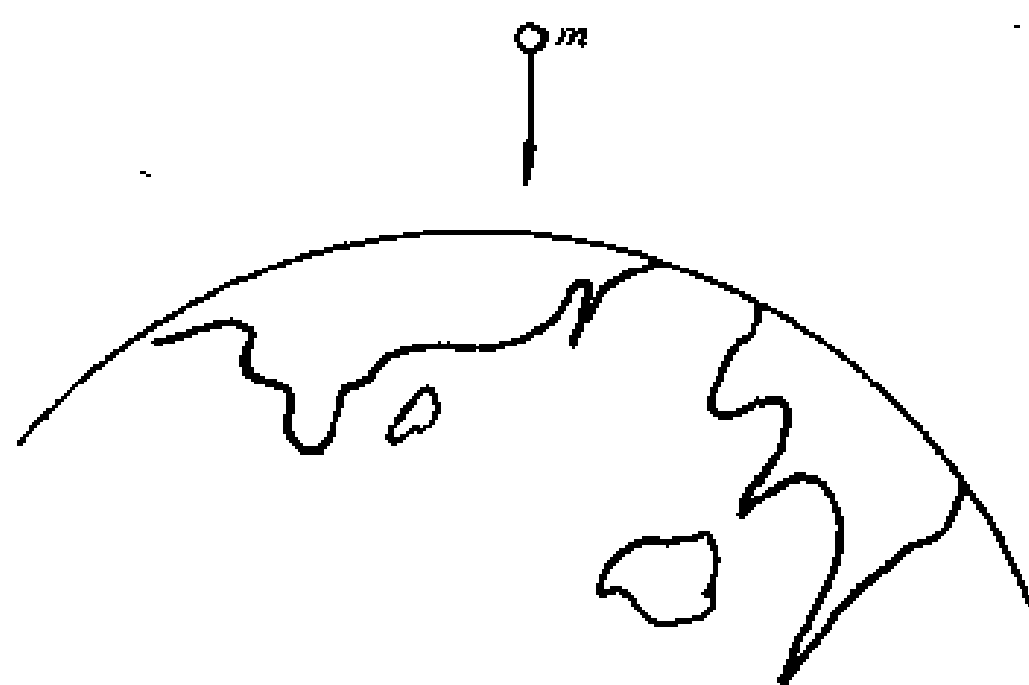
因为 $d = r \sin \varphi$, φ 是 r 和 p 之间的夹角, 于是

$$L = pr \sin \varphi \quad (3-30)$$

质点作直线运动时, 对空间某给定点也可能有角动量. 如果速度 v 的方向正好指向或离开给定点 O , $\sin \varphi = 0$, 质点的角动量就是零. 图3-26(a)中枪弹对于枪口的角动量为零, 图3-26(b)中自由落



(a)



(b)

图3 26 角动量为零的运动

体对于地心的角动量为零. 这些作直线运动的质点, 只有对不在此直线上的给定点才有角动量. 所以, 并非质点作周期性曲线运动才有角动量.

角动量也是矢量, 它可用位矢 r 和动量 p 的矢积^①来表示, 即

$$\boxed{L = r \times p} \quad (3-31)$$

上式表明角动量 L 的大小为 $L = rpsin\varphi$, 方向垂直于位矢 r 和动量 p 所组成的平面, 指向是由 r 经小于 180° 的角转到 p 的右手螺旋前进的方向, 如图3-27所示.

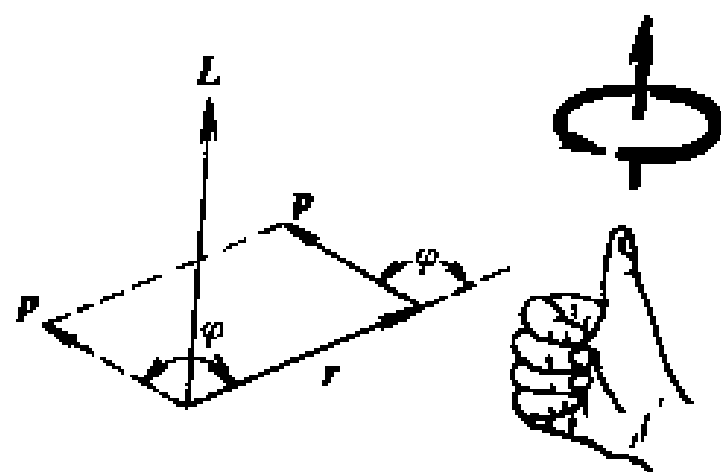


图3-27 角动量方向的确定

角动量的表达式 $L = rpsin\varphi$ 和力矩的表达式^② $M = rFsin\varphi$ 非常相似, 因此, 角动量也可看作动

量对给定点的矩, 所以有时也把角动量叫做动量矩, 角动量的单位由动量和位矢的单位决定, 在国际单位制中, 它的单位是 $kg \cdot m^2/s$.

角动量的概念, 在大到天体的运动, 小到质子、电子的运动的描述中, 都要应用到. 例如, 电子绕核运动, 具有轨道角动量, 电子本身还有自旋运动, 具有自旋角动量等等. 原子、分子和原子核系统的基本性质之一, 是它们的角动量仅具有一定的不连续的量值. 这叫做角动量的量子化. 因此, 在这种系统的性质的描述中, 角动量起着主要的作用.

例题3-13 按经典原子理论, 认为氢原子中的电子在圆形轨道上绕核运动. 电子与氢原子核之间的静电力为 $F = k \frac{e^2}{r^2}$, 其中 e 为电子或氢原子核的电荷量, r 为轨道半径, k 为常数. 因为电子的

① 关于矢积的定义, 参看本书附录 I.

② 例如, 参看本节中式(3-33).

角动量具有量子化的特征,所以电子绕核运动的角动量只能等于 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数(n)倍 [h 是一常数,叫做普朗克(M. Planck)常量],问电子运动容许的轨道半径等于多少?

解 设电子的质量为 m , 绕原子核运动的圆轨道半径为 r , 速度为 v , 那么电子的向心加速度 $a_n = \frac{v^2}{r}$. 由于作用在电子上的向心力就是原子核对电子的静电引力, 于是由牛顿第二定律得

$$F = k \frac{e^2}{r^2} = ma_n = m \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

由于电子绕核运动时,角动量具有量子化的特征,即

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

由式(1)和式(2)两式,得

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 k m e^2} \quad (3)$$

由上式可知,电子绕核运动容许的轨道半径与 n 平方成正比. 这就是说,只有半径等于一些特定值的轨道才是容许的,轨道半径的量值是不连续的.

将各常量的值 ($k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$) 代入式(3), 并取 $n = 1$, 得最小的 r 值:

$$r_1 = 0.530 \times 10^{-10} \text{ m}$$

从原子物理学中知道,这一量值与用其他方法估计得到的量值符合得很好.

2. 角动量守恒定律

角动量守恒定律是物理学的另一基本规律. 在研究天体运动和微观粒子运动时,角动量守恒定律都起着重要作用. 下面通过某些实例的讨论,考察质点的角动量守恒要满足什么条件.

如图3-28所示,把一个质量为 m 的小球系在轻绳的一端,绳穿过一竖直的管子;一手握管,另一手执绳,先使小球以速度 v_1 在水平面内沿半径为 r_1 的圆周运动,然后向下拉绳,使小球的半径减小到 r_2 . 实验发现,这时小球的速度 v_2 就增大. v_1 和 v_2 之间存在下列关系:

$$v_2 r_2 = v_1 r_1$$

用小球的质量乘上式两边,得

$$mv_2 r_2 = mv_1 r_1$$

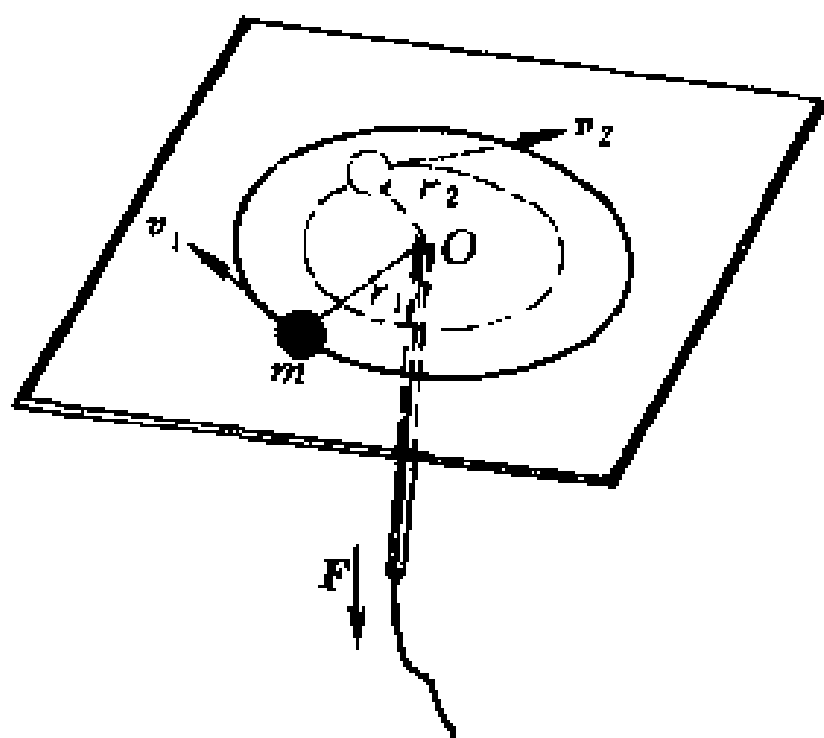


图3-28 质点角动量守恒的演示

即小球对圆心 O 的角动量保持不变. 在这个例子中,小球的动量是时时刻刻在改变的,但小球的角动量却能维持不变. 因此,在研究物体的转动时,角动量将代替动量而起重要的作用.

对于行星绕太阳运动的规律,人们经过长期的观测和研究发现,行星动量的变化与上述小球动量的变化存在着类似的情况. 如果用 d 表示从太阳到行星动量 p 的垂直距离(图3-25),那么发现当 d 较小时,动量 p 较大;当 d 较大时,则 p 又较小,而 p 与 d 的乘积恰保持不变,即

$$pd = \text{常量}$$

或记作

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{常矢量}$$

这表示行星在运动过程中,对太阳的角动量保持不变.

在上面两个例子中,我们看到,小球所受的绳子拉力和行星所受的太阳引力具有共同的特点,绳子的拉力始终指向圆心,太阳的引力始终指向太阳. 这些力对给定点(圆心或太阳)的力矩总是等于零的. 由此可知,质点对给定点角动量守恒所必须满足的条件是质点所受外力对给定点的力矩等于零.

以上所说的事实具有普遍意义. 我们可以由牛顿第二定律推

导出上述结论来. 为此将式(3-31)对 t 求导数得

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

在上式中, 右端第一项的 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, 因此, 矢积 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = 0^{①}$. 这样, 上式就成为

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3-32)$$

由牛顿第二定律, 知道 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, 把上式改写成

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \quad (3-33)$$

式中的 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 是力矩的定义, 因此, 在外力矩 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 的作用下, 质点的角动量将随着时间而变化. 如果作用在质点上的外力对某给定点 O 的力矩 $(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ 为零, 则质点对 O 的角动量在运动过程中保持不变. 这就叫做质点的角动量守恒定律.

例题3-14 我国第一颗人造卫星绕地球沿椭圆轨道运动, 地球的中心 O 为该椭圆的一个焦点(图3-29). 已知地球的平均半径 $R = 6378 \text{ km}$, 人造卫星距地面最近距离 $l_1 = 439 \text{ km}$, 最远距离 $l_2 = 2384 \text{ km}$. 若人造卫星在近地点 A_1 的速度 $v_1 = 8.10 \text{ km/s}$, 求人造卫星在远地点 A_2 的速度.

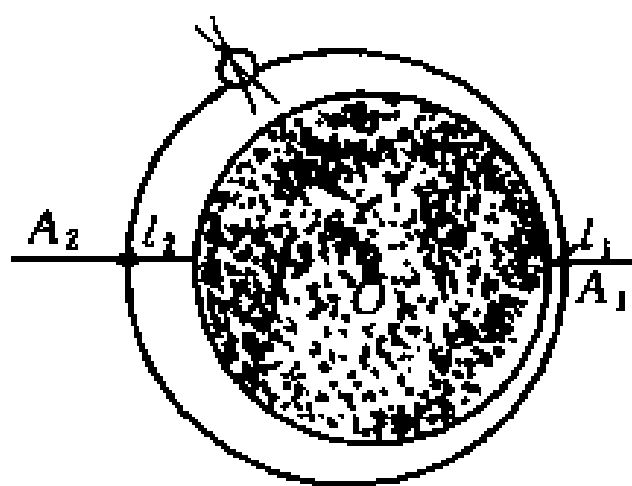


图3-29 地球卫星运行时的椭圆轨道

解 如认为人造卫星在运动时仅受到地球对它的引力, 由于这引力始终指向地球中心 O , 因而对 O 点来说没有外力矩作用在卫星上, 所以人造卫星在运动过程中对 O 点的角动量守恒.

人造卫星在近地点 A_1 的角动量

① 矢量 $\mathbf{v}$ 与 $m\mathbf{v}$ 同向, 它们的夹角 $\varphi = 0$, 因此, 两者的矢积的模 $|\mathbf{v} \times (m\mathbf{v})| = mv^2 \sin \varphi = 0$, 亦即矢积等于零.

$$L_1 = mv_1(R + l_1)$$

人造卫星在远地点 A_2 的角动量

$$L_2 = mv_2(R + l_2)$$

因为角动量守恒,所以

$$mv_1(R + l_1) = mv_2(R + l_2)$$

于是

$$v_2 = v_1 \frac{R + l_1}{R + l_2}$$

将 R, l_1, l_2 和 v_1 各值代入,得

$$v_2 = 6.30 \text{ km/s}$$

* § 3-7 质点在有心力场中的运动

1. 有心力

在上节所举的例子中,我们看到,小球所受的绳子拉力和行星所受的太阳引力具有一个共同的特征,即运动质点所受的力的作用线始终通过某个给定点,而且力的大小也只依赖于质点对该给定点的距离,我们把这种力叫做有心力,而把这个给定点叫做力心.

现在,我们讨论只在有心力作用下质点运动的性质.因有心力的作用线始终通过力心,所以有心力对力心的力矩总是等于零的.按式(3-33)可知,质点的角动量应该守恒.于是,我们得到在有心力场中质点运动的第一个性质是,质点在有心力作用下,它的角动量守恒.由式(3-31)我们知道,角动量 L 的方向垂直于质点位矢 r 和它的动量 p 所组成的平面.角动量守恒意味着角动量不仅大小不变,而且方向也是不变的.因此,质点在运动中,虽然动量 p 经常在变化,但它与位矢 r 所组成的平面却始终不变,这就是说,在有心力作用下质点只在通过力心的平面内运动,这是角动量守恒的必然结果.其实,要看出这点,并不困难.在某起始时刻,质点以

一定的初速度运动,在有心力作用下,质心的加速度指向力心,因加速度是表示速度变化的,所以下一瞬时质点的速度必然在初速度与加速度所共同决定的平面内,而这个平面就是通过力心和初速度的平面.因这一瞬时的加速度也在这个平面内,所以下一瞬时的速度必然仍在这平面,依此类推,就可得出上述结论.

在常见的有心力场中质点运动的第二个性质是机械能守恒.例如,我们以前介绍的引力场就是个有心力场.质点在引力场中运动时,下列关系成立,

$$\frac{1}{2}mv^2 - G_0 \frac{mM}{r} = \text{常量}$$

因为引力是保守力,质点在它的作用下所作的功只与起点和终点的位置有关,而与所经历的路径无关.于是,我们引入了势能的概念,而且证明在保守力作用下,势能与动能可以相互转换,但机械能的总和保持不变.现在,我们要说明引力不过是有心力的一个例子.常见的有心力都是保守力,下面证明这个结论.由变力作功的表示式(2-18)

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F \cos \varphi |d\mathbf{r}|$$

考虑到有心力的方向总是沿着位矢的方向,而且它的大小一般只是位矢 r 的大小的函数,与方位角无关,我们可将上式写成

$$A = \int_a^b F(r) dr$$

式中 $dr = |d\mathbf{r}| \cos \varphi$. 如果质点在 a 处的 $r=r_1$, 在 b 处的 $r=r_2$, 则从 $r=r_1$ 到 $r=r_2$ 对上式积分,就得出质点从 a 到 b 沿曲线轨道运动时,力 F 对质点所作的功为

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$

这个定积分的值显然只取决于起点和终点的位矢,而与中间所经历的路程无关.因此,我们断言有心力是保守力.

2. 轨迹方程

质点在有心力场中作平面运动, 因为有心力的作用线始终通过力心, 所以选用以力心为极点的极坐标是很自然的, 这将有助于问题的解决. 为了求得质点的轨迹方程, 我们可从角动量守恒与机械能守恒这两个定律入手, 但必须把它们写成极坐标中的表示式. 由此可求得质点在与距离平方成反比的引力作用下的轨迹方程为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

这是圆锥曲线方程. 式中 p 是个决定图形尺寸的常量, 称为半正焦弦, ϵ 是偏心率. 如果 $\epsilon < 1$, 曲线轨迹是圆或椭圆; $\epsilon = 1$ 是抛物线; $\epsilon > 1$ 是双曲线. 在圆锥曲线中离力心最近的点叫近日点 (图3-30中 A_1), 离力心最远的点叫远日点 (图中 A_2). 对双曲线与抛物

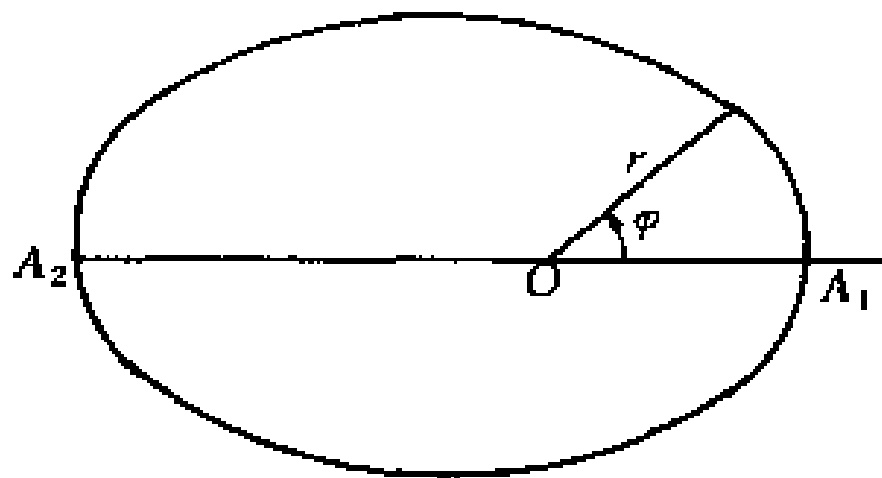


图3-30

线来说, 只有近日点而无远日点. 为了求得轨迹方程, 并看出偏心率 ϵ 与能量的关系, 我们将从椭圆轨迹的特殊情况入手. 这时, 质点在近日点与远日点的角动量都可写成

$$L = mvr \quad (L \text{ 为常量}) \quad (1)$$

而机械能守恒定律则可表示为

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = E \quad (E \text{ 为常量}) \quad (2)$$

如有心力为万有引力, 则 $E_p(r) = -G_0 \frac{mM}{r}$, 代入上式得

$$\frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2} - G_0 \frac{mM}{r} - E = 0 \quad (3)$$

式(3)的解是

$$\frac{1}{r} = \frac{G_0 m^2 M}{L^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G_0^2 m^3 M^2}} \right) \quad (4)$$

这就是质点在近日点与远日点时位矢大小的倒数. 考虑到质点的这两个位置在极坐标系中分别相当于 $\cos\varphi = +1$ 与 $\cos\varphi = -1$ (参看图3-30), 可把式中括号内的士号改写成更普遍的形式, 即

$$\frac{1}{r} = \frac{G_0 m^2 M}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G_0^2 m^3 M^2}} \cos\varphi \right) \quad (3-34)$$

把上式与圆锥曲线的标准方程作比较, 可见

$$\begin{aligned} p &= \frac{L^2}{G_0 m^2 M} \\ \epsilon &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G_0^2 m^3 M^2}} \end{aligned} \quad (3-35)$$

由上式可知: 当 $E < 0$ 时, $0 < \epsilon < 1$, 轨迹为椭圆; 这时质点的动能小于势能的绝对值, 因此不足以克服引力势能而到无穷远去, 它只能在有限范围内运动. 当 $E = -\frac{G_0^2 m^3 M^2}{2L^2}$ 时, $\epsilon = 0$, 质点作圆周运动. 当 $E = 0$ 时, $\epsilon = 1$; 这时质点因其动能恰好克服引力势能而到无穷远处, 但到了无穷远处, 质点的速度也等于零了, 它的运动轨迹是抛物线. 当 $E > 0$ 时 $\epsilon > 1$, 质点的动能大于势能的绝对值, 总能量是正的, 它不仅能达到无穷远处, 而且在无穷远处还有速度, 它的轨迹是双曲线的一支, 如图3-31所示.

3. 宇宙速度

现在我们讨论宇宙航行所需要的三种宇宙速度.

设在地球表面外某一高度的 P 点发射飞行器, 发射速度为 v_1 , 方向和地面平行. 当 v_1 的值使 $E < 0$ 时, 飞行器将作椭圆运动. 但

v_1 不能太小,否则它将沿一较小的椭圆 I 运动(如图3-32所示),经过一段距离,就遇上了地面,而无法继续运行.当 v_1 足够大,使它能沿圆周 II 运行,这个速度就是第一宇宙速度,也叫环绕速度.

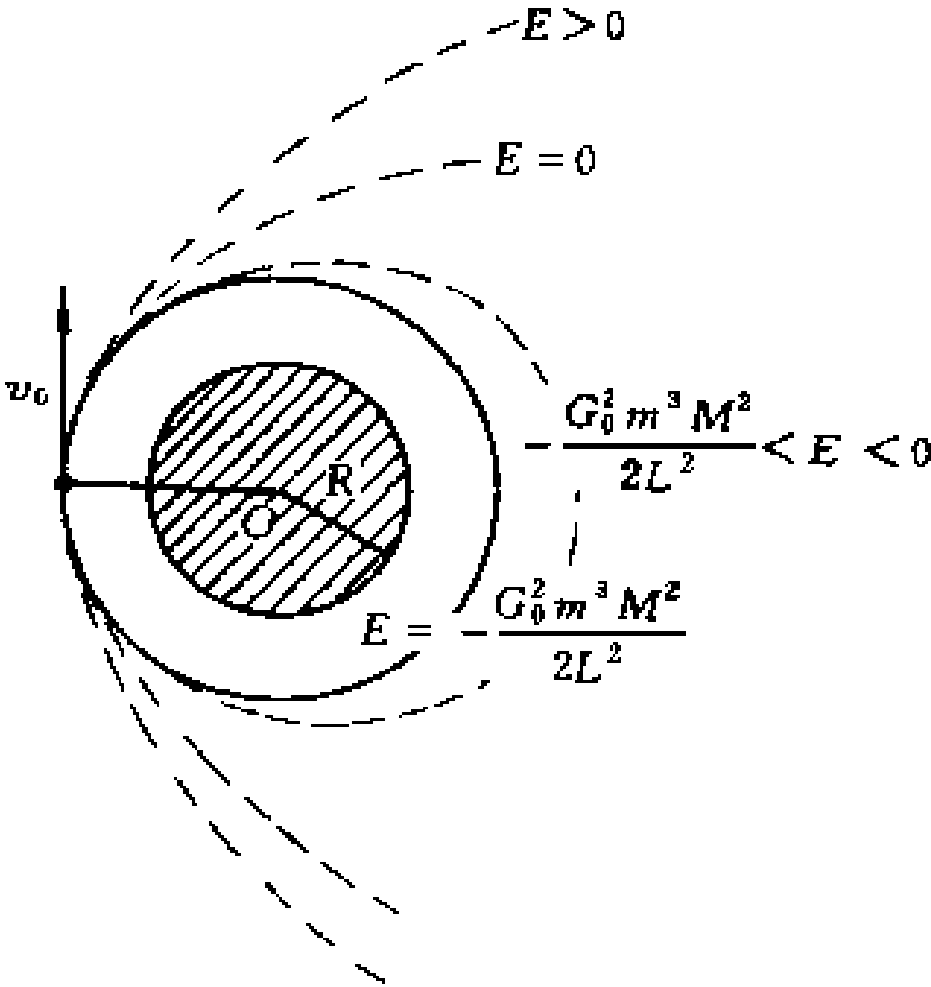


图3-31 对应不同能量的轨迹

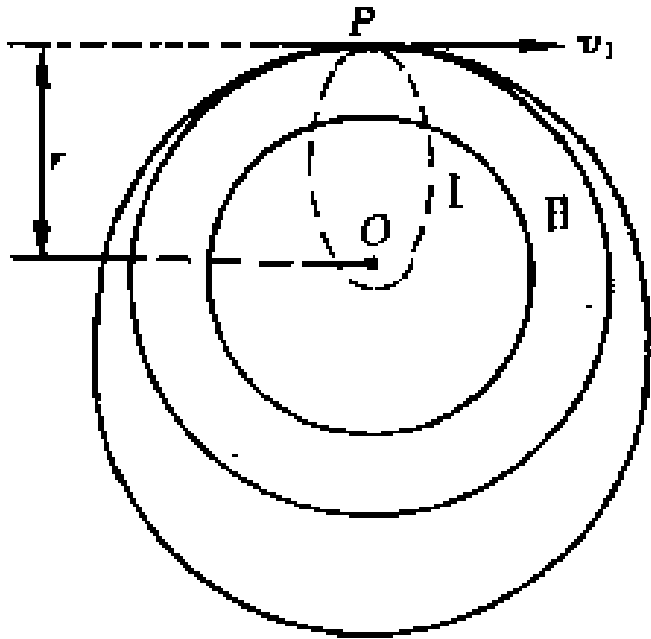


图3-32 宇宙速度

飞行器以 v_1 环绕地球运动,所需向心力由万有引力提供,亦即

$$G_0 \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r}$$

由此得

$$v_1 = \frac{G_0 M}{r}$$

设地面上飞行器的重量为 mg ,地球的半径为 R ,则飞行器所受地球的引力 $G_0 m M / R^2 = mg$,由此求得 $g = G_0 M / R^2$,把它代入 v_1 的式子中,则得

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}$$

它告诉我们,飞行器离地面越远,所需环绕速度越小.当飞行器在

地面附近时,令上式中 $r=R$,则有

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7.91 \times 10^3 \text{ m/s}$$

这就是第一宇宙速度.

当飞行器发射速度从 $7.91 \times 10^3 \text{ m/s}$ 增大时,椭圆逐渐拉长变大;当速度达到某一程度,椭圆终于不再闭合而成为抛物线,这个飞行器也就挣脱地球的束缚而一去不复返.能使物体挣脱地球束缚的速度叫逃逸速度,用 v_2 表示它.

前面提到,当物体的机械能 $E=0$ 时,其轨迹为抛物线.据此,由能量关系式(2)得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = G_0 \frac{mM}{r}$$

亦即
$$v_2 = \sqrt{\frac{2G_0M}{r}} = \sqrt{2gR} = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

这就是逃逸速度,又叫第二宇宙速度.

使物体脱离太阳系所需最小速度叫做第三宇宙速度.如用 M_s 表示太阳质量,用 r' 表示地球至太阳的距离,则物体挣脱太阳引力所需速度 v'_3 应满足

$$\frac{1}{2}m v_3'^2 = G_0 \frac{mM_s}{r'}$$

由此得

$$v_3' = \sqrt{\frac{2G_0M_s}{r'}} = 42.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

但 v_3' 是物体相对太阳的速度.物体位于地球上,而地球相对太阳已具有 $29.8 \times 10^3 \text{ m/s}$ 的公转速度,如使发射物体的方向和地球公转运行方向一致,则发射速度对地球而言只需

$$v_3'' = (42.2 - 29.8) \times 10^3 \text{ m/s} = 12.4 \times 10^3 \text{ m/s}$$

在以上计算中,忽略了地球的引力,物体在脱离太阳引力的同时必须脱离地球引力,所以发射能量应满足

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3'^2$$

由此得第三宇宙速度为

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_3'^2} = 16.7 \times 10^3 \text{ m/s}$$

例题3-15 当质子以初速 v_0 通过质量较大的原子核时,原子核可看作不动,质子受到原子核斥力的作用,它运行的轨迹将是一双曲线,如图3-33所示.试求质子和原子核最接近的距离 r_s .

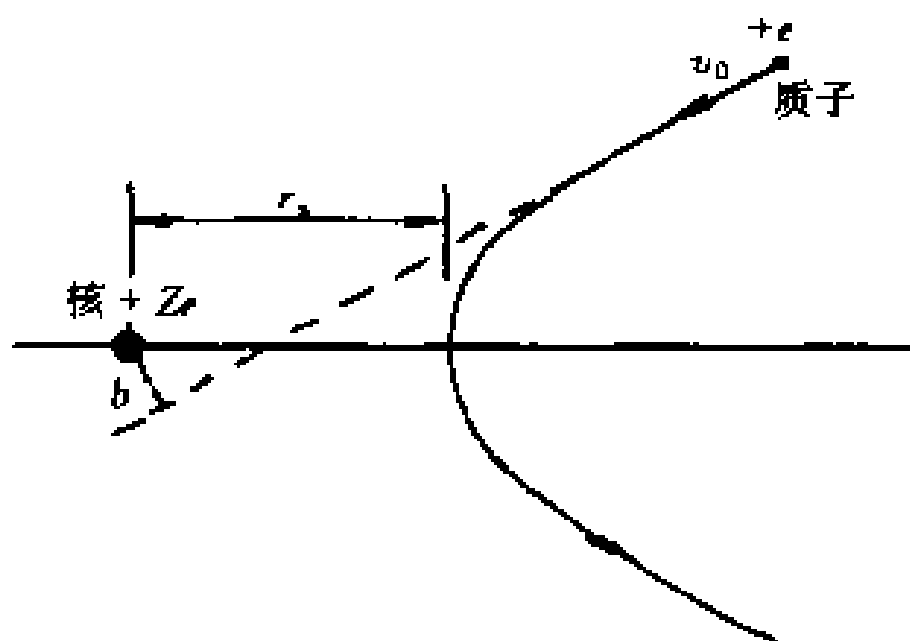


图3-33 质子通过原子核时的轨迹

解 将质量比质子大得多的原子核看作不动,并取原子核所在处为坐标的原点 O . 设原子核所带的电荷量为 Ze ,这时作用在质子上的力可以认为只有原子核对它的静电斥力 $k \frac{Ze^2}{r^2}$, k 是一常量. 因这个力始终通过 O 点,也就是说,质子所受的力是有心力,所以质子在运动中对 O 点的角动量守恒,即

$$mv_0 b = mv_s r_s \quad (1)$$

式中 m 是质子的质量; v_0 是质子未进入原子核斥力范围时的速度,也就是在无限远处的初速; v_s 是质子在离原子核最近处的速度; b 是初速度的方向线与原子核间的垂直距离.

在无限远处,质子的动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$,而电势能取为零,所以,这时的总能量为

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

在离原子核最近处,质子的动能为 $\frac{1}{2}mv_s^2$,而电势能^①为 $k\frac{Ze^2}{r_s}$.

所以,这时的总能量为

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + k\frac{Ze^2}{r_s}$$

由于质子在飞行过程中没有能量损失,因此总能量也守恒,即

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + k\frac{Ze^2}{r_s} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2)$$

从式(1)和式(2)中消去 v_s ,得

$$k\frac{Ze^2}{r_s} = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - \left(\frac{b}{r_s}\right)^2\right]$$

由此可求得

$$r_s = 2k\frac{Ze^2}{mv_0^2} + \sqrt{\left(2k\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2}$$

* § 3-8 对称性和守恒定律

上面介绍的动量、能量和角动量守恒定律,基本上都是从牛顿定律“推导”出来的,但是这些守恒定律比之牛顿定律有着更广泛的适用范围,在一些牛顿定律不再适用的物理现象中,它们仍然保持正确.这说明这些守恒定律有着更普遍更深刻的基础.现代物理学已经确认这些基本量是和自然界的普遍属性——时空对称性联系在一起的.在本课程内,我们不能对此作严格的证明和深刻的论述,只能作一些简单的介绍.

对称性又叫不变性.外尔(H. Weyl)对此所作的定义是,如果

① 对于质子和原子核组成的系统来说,当它们相距 r_s 时,电势能为 $k\frac{Ze^2}{r_s}$.

我们对一件东西可以做某些事情,使得事情过后这件东西仍旧和以前一样,我们就叫这件东西是对称的.例如一本书,我们把它平移一下,它不会发生什么变化,于是我们就叫这本书对平移操作来说是对称的,或者说是不变的.任何物质运动都在时空中进行,对称性对物理学的影响,可以从人们平凡的生活经验中来认识它.人们发现,任一给定的物理实验或物理现象的发展变化过程,是和此实验所在的空间位置无关的,亦即换一个地方做实验,其进展过程也完全一样.这个事实叫做空间均匀性,也叫空间平移对称性.动量守恒定律就是这种对称性的表现.又如任一给定的物理实验的发展过程和此实验装置在空间的取向无关,亦即把实验装置转换一个方向,并不影响实验的进展过程.这个事实叫做空间转动对称性,也叫空间的各向同性.角动量守恒定律就是这种对称性的表现.又如任一给定的物理实验的进展过程和此实验开始的时间无关,亦即早些开始做,还是迟些开始做,甚至现在开始做,此实验的进展过程也是完全一样的.这个事实叫做时间均匀性,也叫时间平移对称性.能量守恒定律就是时间均匀性的表现.对应于每一种对称性,都存在一个守恒定律,自然规律是何等的美妙!由于物理定律具有某种对称性,就以相应的方式限制了物理定律.例如,物理定律在时间平移、空间平移和转动下的不变性要求对物质系统的运动作出限制,这些限制就是系统在运动中必须遵从的能量守恒、动量守恒和角动量守恒等定律.

思 考 题

3-1 非保守力作的功总是负的.对吗?举例说明之.

3-2 为什么重力势能有正负,弹性势能只有正值,而引力势能只有负值?

3-3 回答下列问题:

(1) 重力势能是怎样认识的?又是怎样计算的?重力势能的量值是绝对的吗?

(2) 引力势能是怎样认识的? 又是怎样计算的? 引力势能的量值是绝对的吗?

(3) 重力是引力的一个特例, 你能从引力势能公式推算出重力势能的公式吗?

(4) 物体在高空中时, 势能到底是正值呢还是负值?

3-4 两个质量相等的小球, 分别从两个高度相同、倾角不同的光滑斜面的顶端由静止滑到底部, 它们的动量和动能是否相同?

3-5 能否利用装在小船上的风扇煽动空气使小船前进?

3-6 在地面的上空停着一气球, 气球下面吊着软梯, 梯上站着一个人, 当这人沿软梯上爬时, 气球是否运动?

3-7 在匀速圆周运动中, 质点的动量是否守恒? 角动量呢?

3-8 有人说: 质心是质量集中之处, 因此在质心处必定要有质量, 这话对吗?

3-9 物体 m 被放在斜面 M 上, 如把 m 与 M 看成一个系统, 问在下列何种情形下, 系统的水平方向分动量是守恒的?

(1) m 与 M 间无摩擦, 而 M 与地面间有摩擦;

(2) m 与 M 间有摩擦, 而 M 与地面间无摩擦;

(3) 两处都没有摩擦;

(4) 两处都有摩擦.

3-10 质点的动量守恒与角动量守恒的条件各是什么? 质点动量与角动量能否同时守恒? 试说明之.

3-11 对于变质量系统, 能否应用 $F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$, 为什么?

3-12 质点在有心力场中的运动具有什么性质?

习 题

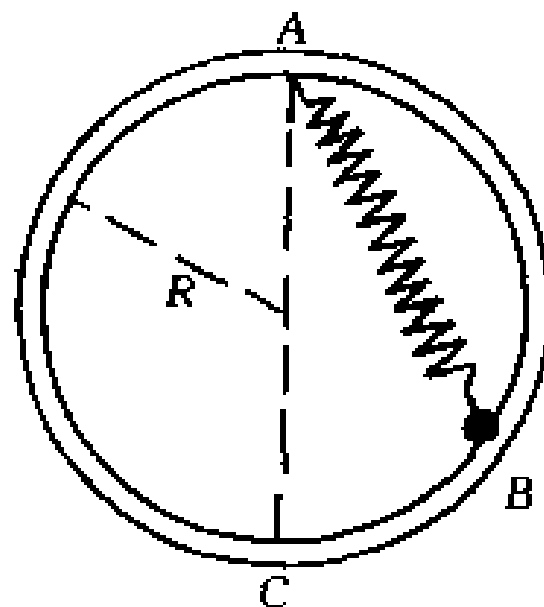
3-1 有一保守力 $F = (-Ax + Bx^2)i$, 沿 x 轴作用于质点上, 式中 A 、 B 为常量, x 以 m 计, F 以 N 计. (1) 取 $x=0$ 时 $E_p=0$, 试计算与此力相应的势能; (2) 求质点从 $x=2$ m 运动到 $x=3$ m 时势能的变化.

3-2 一质量为 m 的质点作平面运动, 其位矢为 $\mathbf{r} = a\cos\omega t \mathbf{i} + b\sin\omega t \mathbf{j}$, 式中 a 、 b 为正值常量, 且 $a > b$. 问: (1) 此质点作的是什么运动? 其轨迹方程怎样? (2) 质点在 A 点 $(a, 0)$ 和 B 点 $(0, b)$ 时的动能有多大? (3) 质点所受作用力

F 是怎样的?当质点从 A 点运动到 B 点时,求 F 的分力 $F_x i$ 和 $F_y j$ 所作的功;

(4) F 是保守力吗?为什么?

3-3 一根原长 l_0 的弹簧,当下端悬挂质量为 m 的重物时,弹簧长 $l=2l_0$. 现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端 A 点. 设环的半径 $R=l_0$, 把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的 B 点, 如图所示. 已知 AB 长为 $1.6R$. 当重物在 B 点无初速地沿圆环滑动时, 试求: (1) 重物在 B 点的加速度和对圆环的正压力; (2) 重物滑到最低点 C 时的加速度和对圆环的正压力.



习题3-3图

3-4 一根特殊弹簧, 在伸长 x m 时, 沿它伸长的反方向的作用力为 $(52.8x + 38.4x^2)$ N.

(1) 试求把弹簧从 $x=0.50$ 拉长到 $x=1.00$ 时, 外力克服弹簧力所需作的总功.

(2) 将弹簧的一端固定, 在其另一端拴一质量为 2.17 kg 的物体. 然后把弹簧拉到 $x=1.00$, 开始无初速地释放物体, 试求弹簧缩回到 $x=0.50$ 时物体的速率.

3-5 一质点沿 x 轴运动, 势能为 $E_p^{(x)}$, 总能量为 E 恒定不变, 开始时静止于原点, 试证明当质点到达坐标 x 处所经历的时间为

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{(x)})}}$$

3-6 一双原子分子的势能函数为

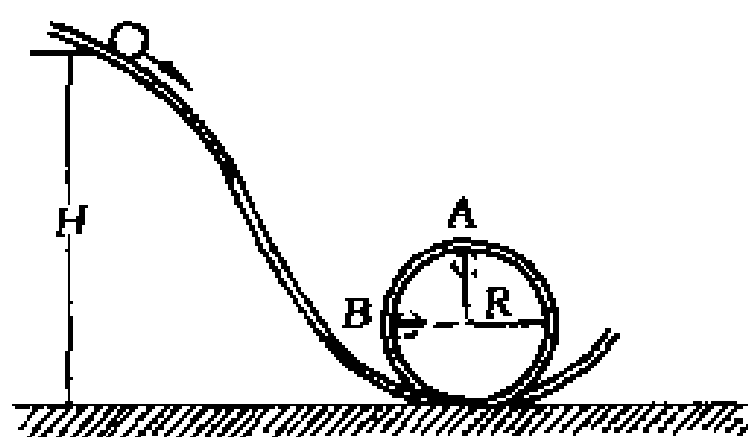
$$E_p(r) = E_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$

式中 r 为二原子间的距离, 试证明:

- (1) r_0 为分子势能极小时的原子间距;
- (2) 分子势能的极小值为 $-E_0$;
- (3) 当 $E_p(r)=0$ 时, 原子间距为 $r_0/\sqrt[6]{2}$;
- (4) 画出势能曲线简图.

3-7 小球的质量为 m , 沿着光滑的弯曲轨道滑下, 轨道的形状如图.

(1) 要使小球沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道, 问小球至少应从多高



习题3-7图

的地方 H 滑下?

(2) 小球在圆圈的最高点 A 受到哪几个力的作用.

(3) 如果小球由 $H=2R$ 的高处滑下, 小球的运动将如何?

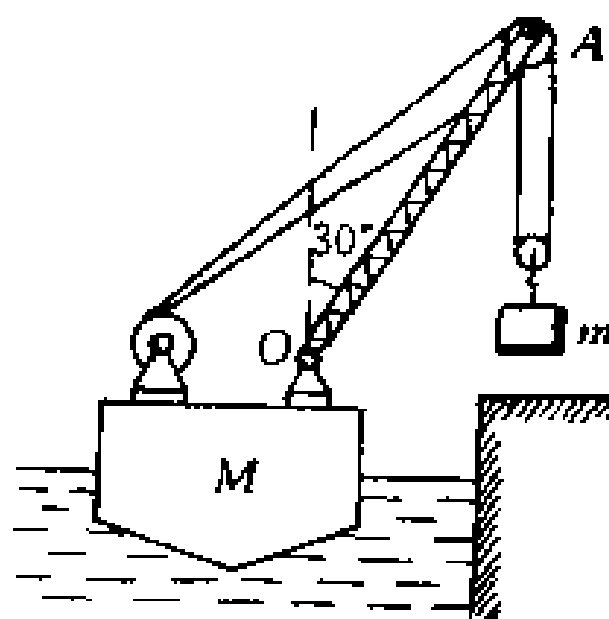
3-8 一弹簧, 原长为 l_0 , 劲度系数为 k , 上端固定, 下端挂一质量为 m 的物体, 先用手托住, 使弹簧不伸长.

(1) 如将物体托住慢慢放下, 达静止(平衡位置)时, 弹簧的最大伸长和弹性力是多少?

(2) 如将物体突然放手, 物体到达最低位置时, 弹簧的伸长和弹性力各是多少? 物体经过平衡位置时的速度是多少?

3-9 一小船质量为 100 kg , 船头到船尾共长 3.6 m . 现有一质量为 50 kg 的人从船尾走到船头时, 船头将移动多少距离? 假定水的阻力不计.

3-10 如图, 一浮吊, 质量 $M=20\text{ t}$, 由岸上吊起 $m=2\text{ t}$ 的重物后, 再将吊杆 OA 与竖直方向间的夹角 θ 由 60° 转到 30° . 设杆长 $l=OA=8\text{ m}$, 水的阻力与杆重忽略不计, 求浮吊在水平方向移动的距离, 并指明朝那边移动.



习题3-10图

3-11 一炮弹, 竖直向上发射, 初速度为 v_0 , 在发射后经 $t\text{ s}$ 在空中自动爆炸, 假定分成质量相同的 A 、 B 、 C 三块碎片. 其中 A 块的速度为零; B 、 C 二块的速度大小相同, 且 B 块速度方向与水平成 α 角, 求 B 、 C 两碎块的速度(大小和方向).

3-12 质量为 $7.2 \times 10^{-23}\text{ kg}$ 、速度为 $6.0 \times 10^7\text{ m/s}$ 的粒子 A , 与另一个

质量为其一半而静止的粒子 B 相碰,假定这碰撞是弹性碰撞,碰撞后粒子 A 的速率为 $5 \times 10^7 \text{ m/s}$,求:

- (1) 粒子 B 的速率及偏转角;
- (2) 粒子 A 的偏转角.

3-13 一质量为 m 的中子与一质量为 M 的原子核作弹性碰撞,如中子的初始动能为 E_0 ,试证明在碰撞过程中中子动能损失的最大值为 $4mME_0/(M+m)^2$.

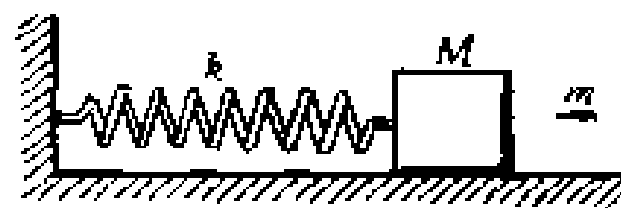
3-14 地面上竖直安放着一个劲度系数为 k 的弹簧,其顶端连接一静止的质量 M . 有个质量为 m 的物体,从距离顶端为 h 处自由落下,与 M 作完全非弹性碰撞. 求证弹簧对地面的最大压力 $f_{\max} = (M+m)g + mg\sqrt{1 + \frac{kh}{(M+m)g}}$.

3-15 一个球从 h 高处自由落下,掉在地板上. 设球与地板碰撞的恢复系数为 e . 试证:

- (1) 该球停止回跳需经过的时间为 $t = \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}$;
- (2) 在上述时间内,球经过的路程是 $s = \frac{1+e}{1-e^2}h$.

3-16 一电梯以 1.5 m/s 匀速上升,一静止于地上的观察者自某点将球自由释放. 释放处比电梯的底板高 6.4 m . 球和地板间的恢复系数为 0.5 . 问球第一次回跳的最高点离释放处有多少距离?

3-17 如图是一种测定子弹速度的方法. 子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内,由弹簧压缩的距离求出子弹的速度. 已知子弹质量是 0.02 kg ,木块质量是 8.98 kg . 弹簧的劲度系数是 100 N/m ,子弹射入木块后,弹簧被压缩 10 cm . 设木块与平面间的动摩擦系数为 0.2 ,求子弹的速度.



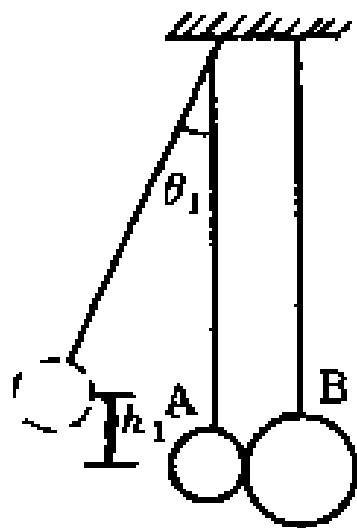
习题3-17图

3-18 一质量为 m 的铁块静止在质量为 m 的劈尖上,劈尖本身又静止在水平桌面上. 设所有接触都是光滑的. 当铁块位于高出桌面 h 处时,这个铁块-劈尖系统由静止开始运动. 当铁块落到桌面上时,劈尖的速度有多大? 劈尖与地面的夹角为 α .

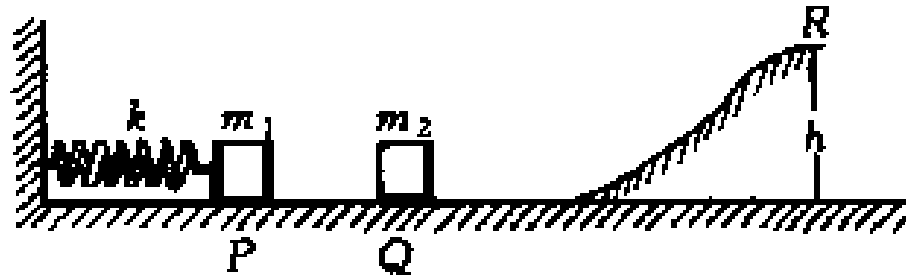
3-19 在图示系统中,两个摆球并列悬挂,其中摆球 A 质量为 $m_1 = 0.4$

kg, 摆球 B 质量为 $m_2 = 0.5 \text{ kg}$. 摆线竖直时, A 和 B 刚好相接触. 现将 A 拉过 $\theta_1 = 40^\circ$ 后释放, 当它和 B 碰撞后恰好静止. 求: (1) 当 B 再次与 A 相碰后, A 能摆升的最高位置 θ_2 ; (2) 碰撞的恢复系数.

$\triangle 3-20$ 质量为 m_1 与 m_2 的两个物体 1 和 2 可沿光滑表面 PQR 滑动 (如图). 开始, 将物体 1 压紧弹簧 (它与弹簧未联接), 然后放手, 让物体 1 与静止放在 Q 处的物体 2 作弹性碰撞, 假定弹簧的劲度系数为 k , 开始压缩的距离为 x_0 .



习题3-19图



习题3-20图

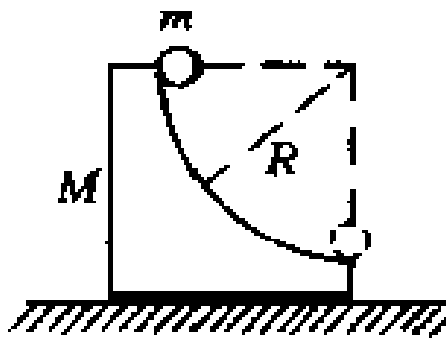
- (1) 如 $m_1 < m_2$, 问碰撞后物体 1 能再将弹簧压缩多大距离 x ?
- (2) 如 $m_1 = m_2$, x 又为多少?
- (3) 如仍为 $m_1 < m_2$, 而物体 2 到达 R 时恰好停止, 问原来压缩弹簧的距离 x_0 为多少?

3-21 如图所示, A、B 两木块, 质量各为 m_A 与 m_B , 由弹簧联接, 开始静止于水平光滑的桌面上, 现将两木块拉开 (弹簧被拉长), 然后由静止释放, 求两木块的动能之比.

$\triangle 3-22$ 一质量为 m 的球, 从质量为 M 的圆弧形槽中自静止滑下, 设圆弧形槽的半径为 R (如图). 若所有摩擦都可忽略, 求小球刚离开圆弧形槽时, 小球和木块的速度各是多少?

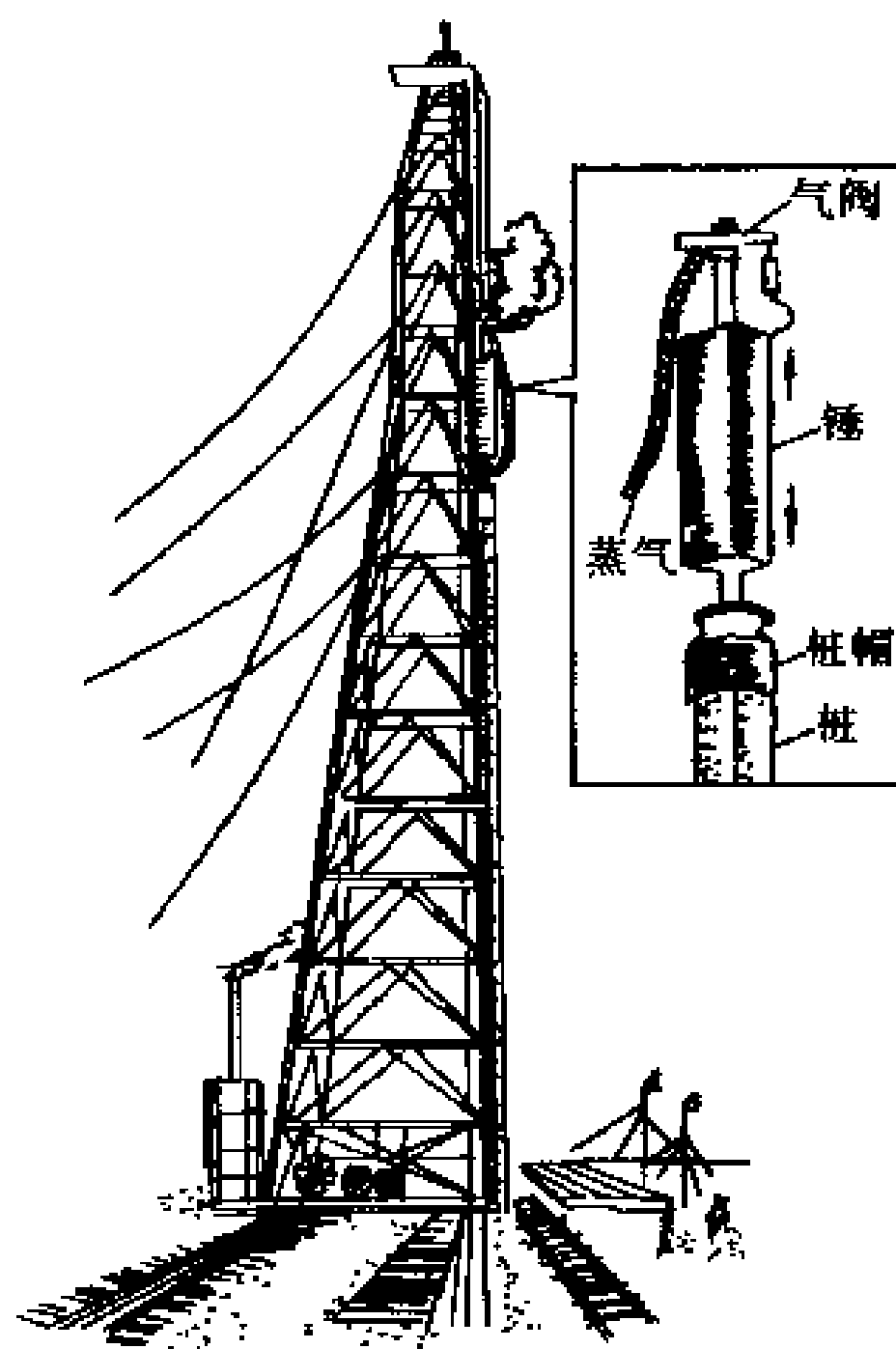


习题3-21图



习题3-22图

△3-23 图中所示是大型蒸气打桩机示意图, 铁塔高40 m, 锤的质量10t. 现将长达38.5 m 的钢筋混凝土桩打入地层. 已知桩的质量为24 t, 其横截面为 0.25 m^2 的正方形, 桩的侧面单位面积所受的泥土阻力为 $k=2.65\times 10^4\text{ N/m}^2$.



习题3-23图

(1) 桩依靠自重能下沉多深?

(2) 桩稳定后把锤提高1 m, 然后让锤自由下落而击桩. 假定锤与桩发生完全非弹性碰撞, 一锤能打下多深?

(3) 当桩已下沉35 m 时, 一锤又能打下多深? 假定此时锤与桩的碰撞不是完全非弹性碰撞, 而是锤在击桩后要反跳5 cm.

3-24 火箭起飞时, 从尾部喷出的气体的速度为 3000 m/s , 每秒喷出的气体质量为 600 kg . 若火箭的质量为 50 t , 求火箭得到的加速度.

3-25 电子质量为 $9\times 10^{-31}\text{ kg}$, 在半径为 $5.3\times 10^{-11}\text{ m}$ 的圆周上绕氢核作匀速运动, 已知电子的角动量为 $h/2\pi$, 求它的角速度.

3-26 试证质点在有心力场中运动时,在相等的时间内,它对力心的位矢在空间扫过相等的面积.

3-27 当地球处于远日点时,到太阳的距离为 $1.52 \times 10^{11} \text{ m}$,轨道速度为 $2.93 \times 10^4 \text{ m/s}$.半年后,地球处于近日点,到太阳的距离为 $1.47 \times 10^{11} \text{ m}$.求:

(1)地球在近日点时的轨道速度;

(2)两种情况下,地球的角速度.

3-28 一质量为 m 的宇宙飞船绕行星作圆周运动,圆的半径为 R_0 ,速率为 v_0 .因火箭爆发,给飞船增加了向外的径向速度分量 $v_r (< v_0)$.于是它的轨迹成为椭圆,

(1)试证引力可写成

$$|F| = \frac{mv_0^2 R_0}{r^2}$$

(2)试用 R_0 、 v_0 以及 v_r 写出椭圆方程.

3-29 一质量为 m_0 以速率 v_0 运动的粒子,碰到一质量为 $2m_0$ 静止的粒子.结果,质量为 m_0 的粒子偏转了 45° ,并具有末速 $v_0/2$.求质量为 $2m_0$ 的粒子偏转后的速率和方向.

3-30 角动量为 L ,质量为 m 的人造卫星,在半径为 r 的圆轨迹上运行.试求它的动能、势能和总能量.

阅读材料 D

宇宙的膨胀

宇宙学、粒子物理学和生命科学,是现代科学的前沿领域.宇宙学是根据天文观测资料和物理学原理研究宇宙的结构、起源、演化等的学科.

1. 宇宙概观

我们所居住的地球是太阳系的一个普通成员.太阳系的中心天体是太阳,它是一个半径约 $7 \times 10^5 \text{ km}$ 、表面温度达 6000 K 的气体球,其核心温度高达 $1.5 \times 10^7 \text{ K}$,发生着氢聚变为氦的核反应.太阳系有9个行星,依次为水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王

星、海王星、冥王星，在火星和木星之间运行着几十万颗小行星。太阳系中质量较小的天体还有彗星和流星。

现代天文学研究表明，太阳仅是银河系中的一颗普通恒星。银河系实际上是由群星和弥漫物质聚集而成的一个庞大天体系统。它的直径约 7×10^4 l. y.，最大厚度约 1×10^4 l. y.，像一个中央突起四周扁平的旋转铁饼。除恒星外，银河系中还有不少由气体和尘埃组成的团块，叫做星云。有的星云含有大量分子，叫做分子云，常常是形成恒星的场所。

银河系之外还有数以10亿计的庞大天体系统，与银河系属同一结构层次，统称星系。人类肉眼可见的最远天体——仙女座星系——就是其中之一，它距银河系 2.25×10^6 l. y.，但在与银河系大小相当的星系中还算最近的一个。星系在宇宙中的分布是不均匀的，有的成群，有的成团。有些星系团又聚集成尺度更大的超星系团。超星系团的尺度为 10^8 l. y.的数量级。人们把 10^8 l. y.这个尺度叫做“宇观尺度”。在宇观尺度的范围内看，宇宙中的物质分布就是均匀的了。

2. 宇宙模型

随着经典物理学向近代物理学的发展，宇宙学也经历了一个由经典宇宙学向现代宇宙学的发展过程。在爱因斯坦提出广义相对论后，他发现牛顿理论与无限宇宙之间存在着深刻的矛盾。于是，他在1917年提出了第一个现代宇宙模型——有限无边宇宙模型，即认为宇宙的空间体积是有限的，但这个三维空间并不是更大的三维空间的一部分，它已经包括了全部空间。为便于理解，可举球面作为有限无边的一个例子。当然，它是个二维的体系。沿着球面走，总也遇不到边，但球面的总面积却是有限的。虽然爱因斯坦在解引力场方程时得到的是运动解，但他觉得大尺度的运动是不能接受的，所以他不惜修改引力场方程，以给出一个静态的有限无边模型。当哈勃红移发现之后，爱因斯坦深感后悔，说这是他“一生中最大的错事”。1922年苏联的弗里德曼(А. А. Фридман)，1927年

比利时的勒梅特(G. Lemaitre)先后提出了一个膨胀宇宙模型,认为宇宙空间的尺度随时间在不断地增大. 弗里德曼从理论上论证了宇宙要么膨胀,要么收缩,决不会保持静止状态. 就如在太空中向四面抛散的一把石子,要么继续飞散开去,要么在引力作用下聚拢回落,而不可能在其间保持相对静止一样. 1929年,哈勃(E. P. Hubble)在仔细研究了一批星系的光谱之后,发现绝大多数星系的光谱将向低频(即红端)移动,而且红移量大致同星系的距离成正比. 如果将红移解释为多普勒效应,那就意味着所有星系都在离开我们而去,其退行速度正比于同我们的距离. 这个关系可表示如下:

$$v = Hr \quad (1)$$

这就是哈勃定律. 式中比例常量 H 叫做哈勃常量. 哈勃定律的深远意义在于向我们展示了一个膨胀的宇宙图象.

3. 宇宙膨胀

现在,我们讨论一个均匀各向同性的膨胀着的宇宙模型. 如图 B-1 所示, O 是任一个观察者, P 是某个星系,我们把它看成质点. $\overline{OP} = R(t)$ 随着宇宙的膨胀而增大. 按照高斯定理, P 受到的引力,相当于半径为 R 的球内的质量 $M = 4\pi\rho R^3/3$ 集中在球心 O 时产生的引力,与球外的质量无关. 应该注意,此处 R 和 ρ 都是随时间变化的,而 M 却是不变的. 由牛顿第二定律有

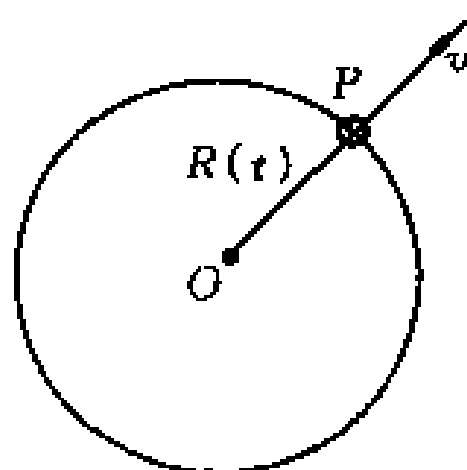


图 B-1 膨胀宇宙的一个球状区

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = - \frac{GMm}{R^2} \quad (2)$$

上式表明,我们的问题相当于如下问题:质量为 M 的质点位于中心,以外空无一物,质点 m 到中心的距离为 R ,沿径矢朝外发射. 因为机械能守恒,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = E \quad (3)$$

我们可以利用势能曲线(图 B-2)来分析这个问题. 由于中心球体

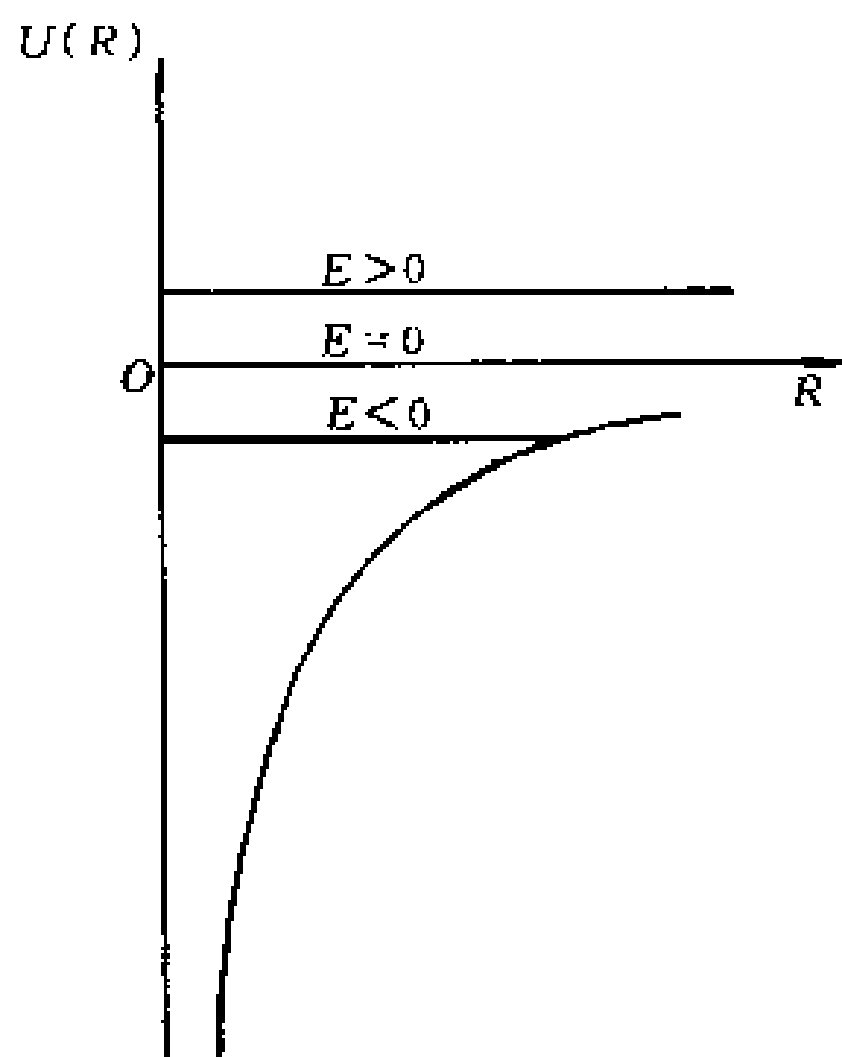


图 B-2 势能曲线

的引力, 质点 m 的速度 $v = dR/dt$ 愈来愈小. (1) 在 $E < 0$ 时, 距离 R 有个极大值 R_m , 在此处它的动能减为 0, 此后, 该质点的速度 v 反向, 运动趋向球心. (2) 在能量 $E > 0$ 时, 距离 R 没有上限, 质点虽然不断减速, 但它将一直飞向无穷远. (3) $E = 0$ 是介于上述两种情况之间的临界情况. 这三种情况下 R 随时间 t 的变化大致如图 B-3 所示.

把哈勃定律代入上式, 得

$$\frac{1}{2}mH^2R^2 - \frac{GMm}{R} = E \quad (4)$$

我们试用现在的宇宙参数预测它的未来. 用下标 0 代表“现在”, 在式(2)和(4)中把所有的变量 R 、 ρ 、 H 都用它们的现在值 R_0 、 ρ_0 、 H_0 代入, 再把式(2)代入式(4), 除以 $mR_0^2/2$, 即得

$$k = \frac{2E}{mR_0^2} = H_0^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3} \quad (5)$$

按照参量 k 值的正、负或 0, 将出现 3 种不同的宇宙前景. $k = 0$ 属临

界情况,相应的密度叫做临界密度,用 ρ_c 表示.令式(5)中 $k=0, \rho_0 = \rho_c$,得

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (6)$$

则三种不同的宇宙前景将是:

- (1) $\rho_0 > \rho_c$, 即 $k < 0$, 宇宙是封闭的,它膨胀到一定时候 t_m 就停止,然后开始收缩;
- (2) $\rho_0 < \rho_c$, 即 $k > 0$, 宇宙是开放的,它将一直膨胀下去;
- (3) $\rho_0 = \rho_c$, 即 $k = 0$, 宇宙处于上述两种情况之间的临界状态.

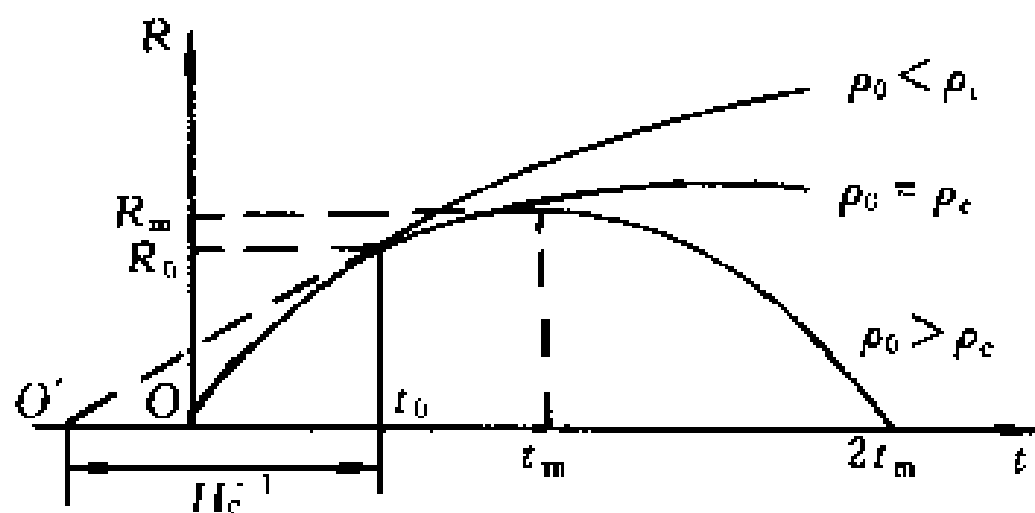


图 B-3 膨胀宇宙的三种前景

以上三种情况可用图 B-3 表示. 不难看到, 这里关键的量是 ρ_c , 而 ρ_c 又有赖于现在的哈勃常量 H_0 . 一般我们把 H_0 估计为下面的值,

$$H_0 \approx 40 \sim 100 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})^{①}$$

得

$$\rho_c \approx 10^{-29} \sim 10^{-28} \text{ g}/\text{cm}^3$$

用光度学方法估计宇宙中发光物质的密度为

$$\rho_0^* \approx 10^{-31} \text{ g}/\text{cm}^3 < 0.01\rho_c$$

如果它就是宇宙中的全部物质, 则宇宙是开放的, 它将永远膨胀下去. 但是, 许多迹象表明, 宇宙间还有大量暗物质, 其密度还无法估

① Mpc 为兆秒差距

计,所以说它永远膨胀,还为时过早.不过当代的大爆炸标准宇宙模型要求宇宙处于 $\rho_0 = \rho_c$ 的临界状态.

4. 黑洞

黑洞是天体物理学预言的一类天体,其特征是它的引力非常大,以致于包括光在内的任何物质都不能从它上面发射出来,所以称为黑洞.它是宇宙间的一种暗物质.早在1795年,拉普拉斯(P. S. M. Laplace)就预言过黑洞的存在.根据机械能守恒定律,一个质量为 m 的物体如果要从一个球状星体上逃逸,它的速度 v 至少要满足下列关系

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R}$$

式中 G 为万有引力恒量, M 为星球质量, R 为星球半径,即其逃逸速度为 $v^2 \geq \frac{2GM}{R}$. 如果

$$\frac{2GM}{R} \geq c^2$$

c 为光速,那么光也不能从这个星球上逃逸出来,于是这个星球就成为一个黑洞.天文学家认为天鹅座 X-1 是最有希望的黑洞候选者,它是双星系统中发射 X 射线的不可见伴星.

第四章 刚体的转动

对于机械运动的研究,只局限于质点的情况是很不够的.质点的运动事实上只代表物体的平动.物体是有形状大小的,它可以作平动、转动,甚至更复杂的运动,而且在运动中物体的形状也可能发生改变.一般固体在外力作用下,形状大小都要发生变化,但变化并不显著.所以,研究物体运动的初步方法是把物体看成在外力作用下保持其大小和形状都不变,亦即物体内任何两质点之间的距离,都不因外力而改变,这样的物体叫做刚体.刚体考虑了物体的形状和大小,但不考虑形变,仍是一个理想的模型.以刚体为研究对象,我们除了研究它的平动外,还可研究它的转动以及平动与转动的复合运动等.本章从质点运动的知识出发,分析和介绍刚体转动的规律,重点讨论刚体的定轴转动,为进一步研究更复杂的机械运动奠定基础.

§ 4-1 刚体的平动、转动和定轴转动

1. 刚体

处于固态的物质,有一定的形状和大小.但任何固体在外力作用下,其形状和大小都要发生变化.在物理学中,为使问题简化,对外力作用下形变并不显著的物体,常应用刚体的概念.刚体是一种特殊的质点系统,无论它在多大外力的作用下,系统内任意两质点间的距离始终保持不变.刚体的这个特点使刚体力学和一般质点系统的力学相比,大为简化.一般质点系统的力学问题求解往往很困难,而刚体的力学问题却有不少是能够求解的.

2. 平动和转动

刚体的最简单的运动形式是平动和转动. 当刚体运动时, 如果刚体内任何一条给定的直线, 在运动中始终保持它的方向不变, 这种运动叫做平动[图 4-1(a)], 例如升降机的运动, 汽缸中活塞的运动, 刨床上刨刀的运动, 车床上车刀的运动[图 4-1(c)]等等, 都是平动. 显然, 刚体平动时, 在任意一段时间内, 刚体中所有质点的位移都是相同的. 而且在任何时刻, 各个质点的速度和加速度也都是相同的. 所以刚体内任何一个质点的运动, 都可代表整个刚体的运动.

刚体运动时, 如果刚体的各个质点在运动中都绕同一直线作圆周运动, 这种运动便叫做转动[图 4-1(b)], 这一直线叫做转轴. 例如机器上齿轮的运动, 车床上工件的运动, 钟摆的运动, 地球的自转运动等等, 都是转动. 如果转轴是固定不动的, 就叫做定轴转动.

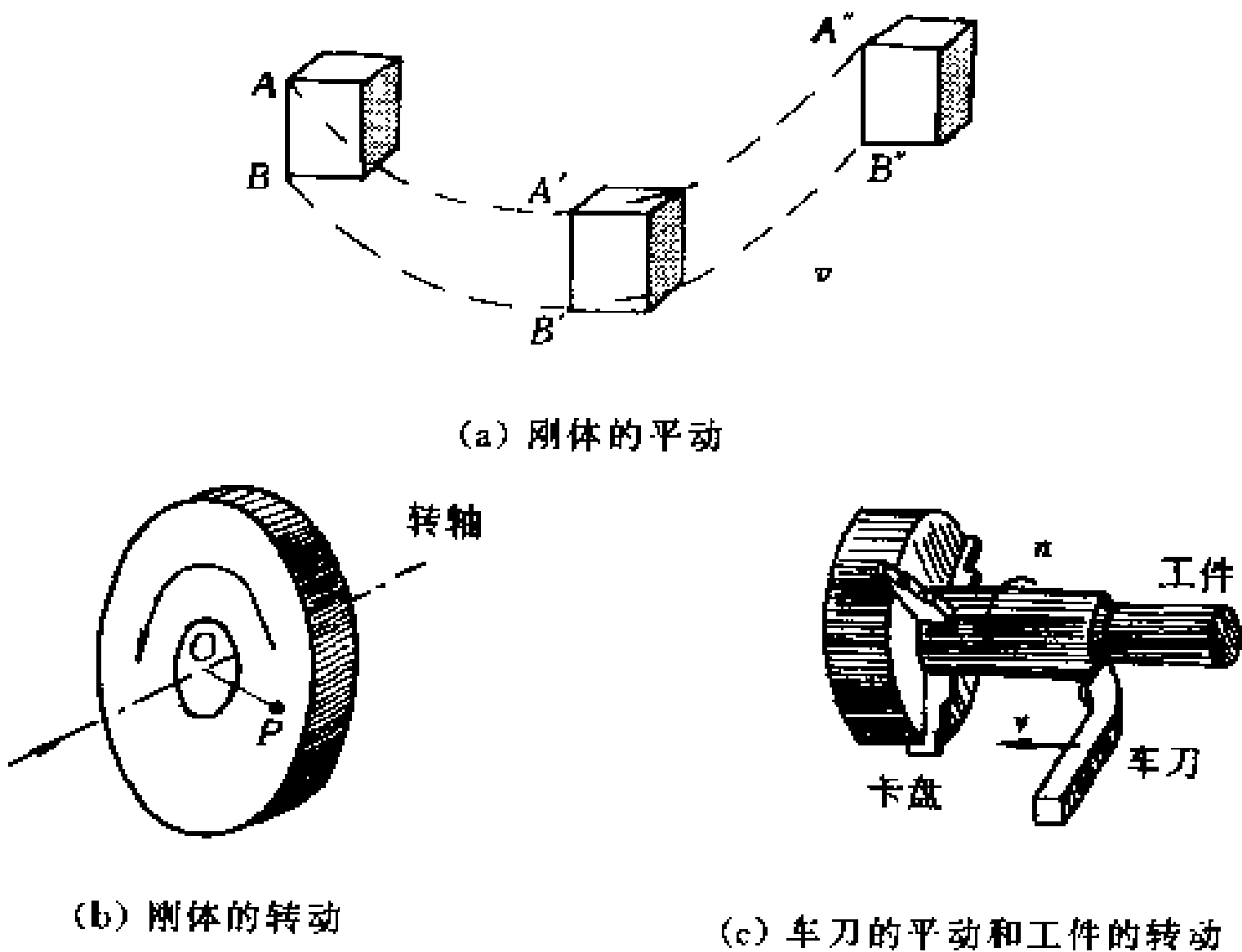


图 4-1 平动和转动

刚体的一般运动比较复杂,但可以证明,刚体的一般运动可看作是平动和转动的叠加.例如,一个车轮的滚动[图 4-2(a)],可以分解为车轮随着转轴的平动和整个车轮绕转轴的转动.又如,在拧紧或松开螺帽时,螺帽同时作平动和转动.钻床上的钻头在工作时,也同时作转动和平动[图 4-2(b)].

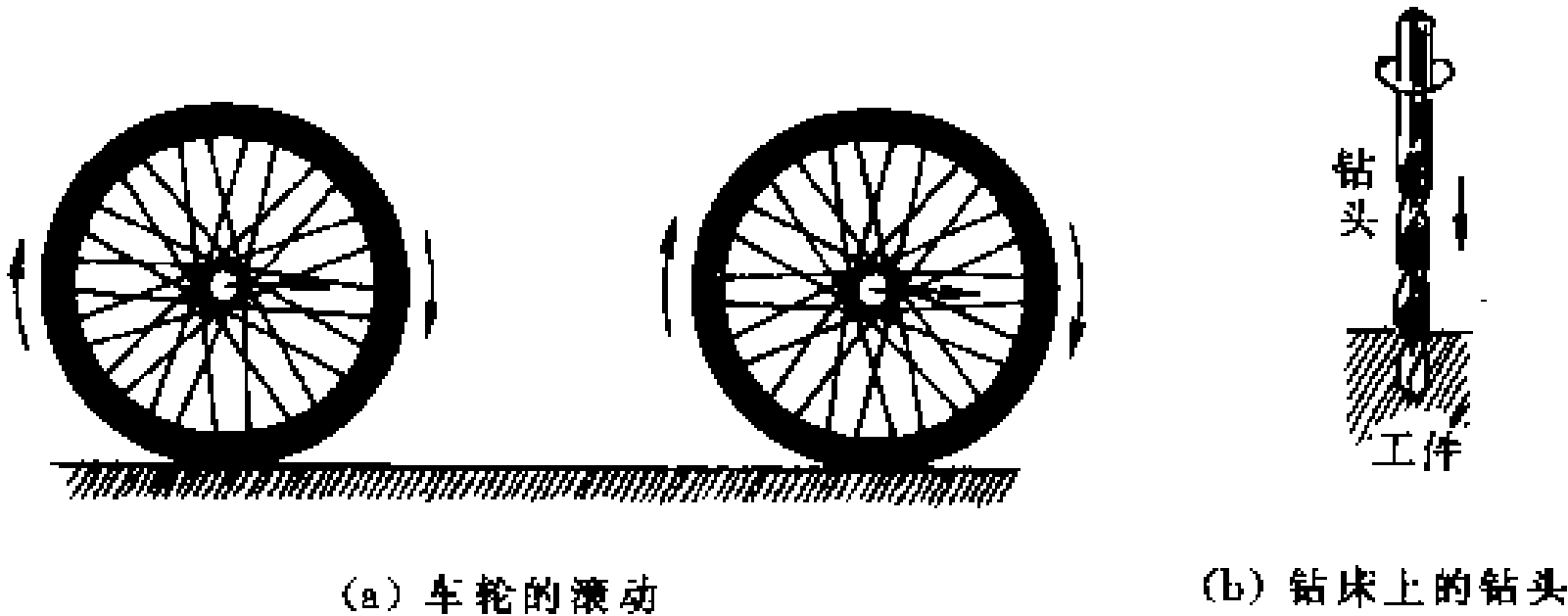


图 4-2 平动和转动同时进行着

3. 刚体的定轴转动

刚体在定轴转动时,刚体上各点都绕同一直线(转轴)作圆周运动,而轴本身在空间的位置不变.例如机器上飞轮的转动,门的开或关等都是定轴转动.这时刚体中任一质点都在某个垂直于转轴的平面内作圆周运动,如图 4-3 所示.由于刚体内各质点所在位置不同,因此各点的轨迹是半径大小不一的圆周.在同一时间内,各点转过的圆弧长度也不同(如图中的 $\widehat{AA'}$ 、 $\widehat{BB'}$ 等).但因刚体内各点间的相对位置不变,所以各点的半径所扫过的角度却是相同的(如图中的 $\Delta\theta$ 角).我们就可用这个转角来描述整个刚体的转动,这个转角就是角位移.在刚体转动时,刚体内各点不仅角位移相同,而且角速度和角加速度也都相同.因此,我们以前讨论

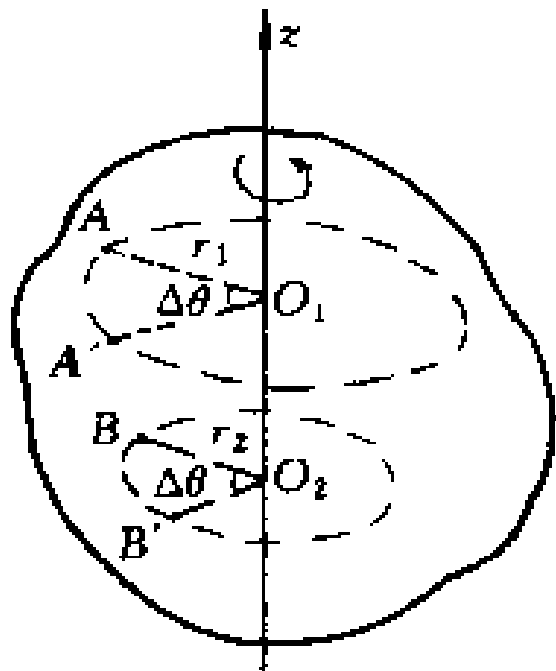


图 4-3 刚体的定轴转动

过的角位移 $\Delta\theta$ 、角速度 ω 和角加速度 α 等概念以及有关公式,对刚体的定轴转动也都是适用的. 至于刚体内各个质点的位移、速度和加速度,则因各点到转轴的距离不同而各不相同. 角量与质点的位移、速度和加速度等所谓线量的关系,我们在讲述圆周运动时已作过介绍. 下面,我们说明如何用矢量来表示角速度的问题.

4. 角速度矢量

为了充分反映刚体转动的情况,常用矢量来表示角速度,角速度矢量是这样规定的:在转轴上画一有向线段,使其长度按一定比例代表角速度的大小,它的方向与刚体转动方向之间的关系按右手螺旋法则来确定,这就是使右手螺旋转动的方向和刚体转动的方向相一致,则螺旋前进的方向便是角速度矢量的正方向,如图 4-4 所示.

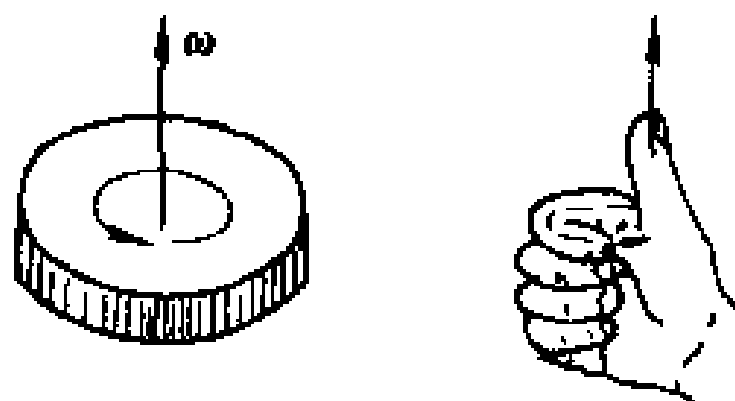


图 4-4 角速度矢量

在转轴上确定了角速度矢量之后,则刚体上任一质点 P (离转轴的距离 OP 为 r ,相应的位矢为 $\mathbf{r}$) 的线速度 $\mathbf{v}$ 和角速度 ω 之间的关系式可由下式

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (4-1)$$

表示(参看图 4-5). 这样,采用两矢量的矢积^①表示式,可同时表述角速度和线速度之间的方向上和量值上的关系.

在定轴转动的情形中,角速度的方向总是沿着转轴的,因此只要规定了 ω 的正负,就可用标量 ω 进行计算.

^① 参看本书附录 I.

例题 4-1 一飞轮以转速 $n = 1500 \text{ r/min}$ 转动, 受到制动后均匀地减速, 经 $t = 50 \text{ s}$ 后静止.

(1) 求角加速度 α 和飞轮从制动开始到静止所转过的转数 N ;

(2) 求制动开始后 $t = 25 \text{ s}$ 时飞轮的角速度 ω ;

(3) 设飞轮的半径 $r = 1 \text{ m}$, 求在 $t = 25 \text{ s}$ 时飞轮边缘上一点的速度和加速度.

解 (1) 设初角速度为 ω_0 , 方向如图 4-6 所示, 量值为 $\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times \frac{1500}{60} = 50\pi \text{ rad/s}$, 对于匀变速转动, 可以应用以角量表示的运动方程. 在 $t = 50 \text{ s}$ 时刻, $\omega = 0$, 代入方程 $\omega = \omega_0 + \alpha t$ 得

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-50\pi}{50} \text{ rad/s}^2 \\ &= -3.14 \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

从开始制动到静止, 飞轮的角位移 $\Delta\theta$ 及转数 N 分别为

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 50\pi \times 50 - \frac{1}{2} \times \pi \times 50^2 \\ &= 1250\pi \text{ rad}\end{aligned}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1250\pi}{2\pi} = 625 \text{ 转}$$

(2) $t = 25 \text{ s}$ 时刻飞轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = (50\pi - \pi \times 25) \text{ rad/s} = 25\pi \text{ rad/s} = 78.5 \text{ rad/s}$$

ω 的方向与 ω_0 相同.

(3) $t = 25 \text{ s}$ 时, 飞轮边缘上一点 P 的速度 $\boldsymbol{v}$ 可由 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 求得. 该点位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小为 $r = 1 \text{ m}$, 所以 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \omega r \sin\varphi = \omega r \sin 90^\circ = \omega r = 78.5 \text{ m/s}$$

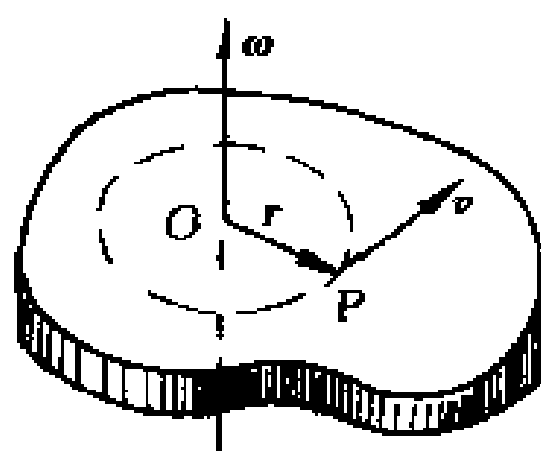


图 4-5 线速度和角速度之间的矢量关系

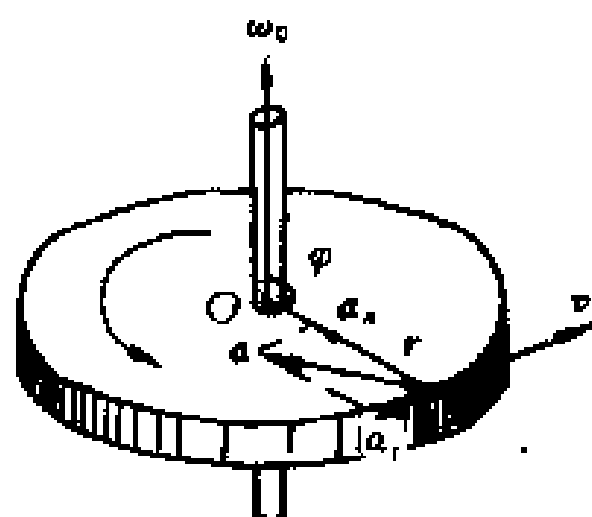


图 4-6 飞轮的转动

$\boldsymbol{v}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 构成的平面,如图 4-6 所示.

相应的切向加速度和向心加速度分别为

$$a_t = ar = -3.14 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 r = 6.16 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

边缘上该点的加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t$, 其中 $\boldsymbol{a}_t$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反, $\boldsymbol{a}_n$ 的方向指向轮心, $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(6.16 \times 10^3)^2 + (3.14)^2} \text{ m/s}^2 \\ &\approx 6.16 \times 10^3 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向几乎和 $\boldsymbol{a}_n$ 相同.

例题 4-2 一飞轮在时间 t 内转过角度 $\theta = at + bt^3 - ct^4$, 式中 a, b, c 都是常量. 求它的角加速度.

解 飞轮上某点的角位置可用 θ 表示为 $\theta = at + bt^3 - ct^4$, 将此式对 t 求导数, 即得飞轮角速度的表达式为

$$\omega = \frac{d}{dt}(at + bt^3 - ct^4) = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

角加速度是角速度对 t 的导数, 因此得

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(a + 3bt^2 - 4ct^3) \\ &= 6bt - 12ct^2 \end{aligned}$$

由此可见, 飞轮作的是变加速转动.

§ 4-2 刚体的角动量 转动动能 转动惯量

1. 刚体的角动量

我们在上一章介绍了质点的角动量的概念, 角动量这个概念在刚体转动的研究中同样是非常重要的. 现在, 我们把质点的角动量推广为刚体的角动量.

质点的角动量是对一定点而言的,在刚体的定轴转动中,其角动量却是对固定转轴而言的,这里有个普遍情况和特殊情况的关系问题.为便于说明问题,我们考虑以角速度 ω 绕定轴 Oz 转动的一根均匀细棒,如图 4-7 所示.现在把细棒分成许多质点,其中第 i 个质点的质量为 Δm_i .当细棒以 ω 转动时,该质点绕轴作半径为 r_i 的圆周运动,它相对于 O 点的位矢为 $\mathbf{R}_i$,则它对 O 点的角动量由式 (3-31) 为

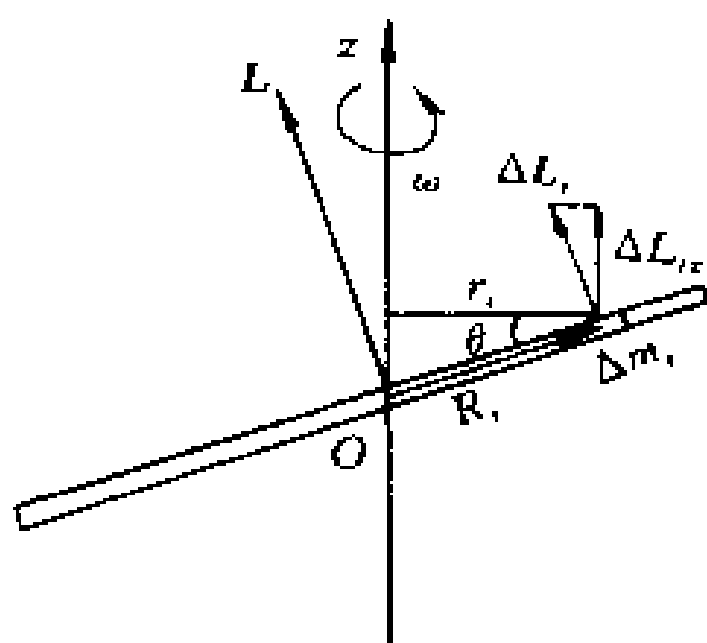


图 4-7 细棒的角动量

$$\Delta \mathbf{L}_i = \mathbf{R}_i \times (\Delta m_i \mathbf{v}_i)$$

因 $\mathbf{v}_i$ 垂直于 $\mathbf{R}_i$, 所以 $\Delta \mathbf{L}_i$ 的大小为

$$\Delta L_i = \Delta m_i R_i v_i$$

方向如图所示.

刚体对 O 点的角动量,等于各个质点角动量的矢量和.由图可见,这时总角动量 $\mathbf{L}$ 的方向和每个 $\Delta \mathbf{L}_i$ 的方向相一致,但并不和 Oz 轴或 ω 的方向相一致.对于定轴转动,我们感兴趣的只是 $\mathbf{L}$ 对沿 Oz 轴的分量 L_z ,叫做刚体绕定轴的角动量,而这个分量 L_z 实际上就是各质点的角动量沿 Oz 轴的分量 ΔL_{iz} 之和.从图中看出, $\Delta L_{iz} = \Delta L_i \cos \theta$, 因此

$$\begin{aligned} L_z &= \sum \Delta L_i \cos \theta = \sum \Delta m_i R_i v_i \cos \theta = \sum \Delta m_i r_i v_i \\ &= \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega \end{aligned}$$

式中 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 叫做刚体对 Oz 轴的转动惯量,用 J 表示,由此得刚体转动惯量和刚体绕定轴的角动量的一般表式如下:

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (4-2)$$

$L_z = J\omega$

(4-3)

2. 刚体的转动动能

刚体在转动时的动能,应该是组成刚体的各个质点的动能之和. 设刚体中第 i 个质点的质量为 Δm_i , 速度为 v_i , 则该质点的动能是 $\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$. 考虑到刚体作定轴转动时, 各个质点都作圆周运动, 设质点 Δm_i 离轴的垂直距离为 r_i , 则它的线速度 $v_i = \omega r_i$, 因此, 整个刚体的动能

$$E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum \Delta m_i r_i^2) \omega^2$$

式中 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 正是刚体对转轴的转动惯量 J , 所以定轴转动的刚体的动能可写为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

 (4-4)

式(4-4)中的动能是刚体因转动而具有的动能, 因此叫做刚体的转动动能.

3. 转动惯量的计算

按转动惯量的定义有

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

即刚体对转轴的转动惯量等于组成刚体各质点的质量与各自到转轴的距离平方的乘积之和. 刚体的质量可认为是连续分布的, 所以上式可写成积分形式

$$J = \int r^2 dm$$

 (4-5)

积分式中 dm 是质元的质量, r 是此质元到转轴的距离.

为了看出转动惯量的物理意义, 我们不妨把平动与转动中相应物理量作一比较:

平动： 平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 线动量 mv

转动： 转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 角动量 $J\omega$

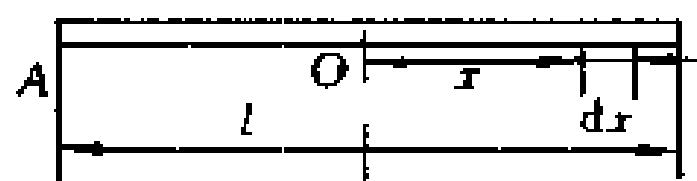
不难看出,角速度相当于线速度,而转动惯量则相当于质量.质量是平动中惯性大小的量度,则转动惯量无疑是转动中惯性大小的量度了.

下面,我们将通过几种简单形状刚体的转动惯量的计算,去寻找决定刚体转动惯量的因素是哪些.

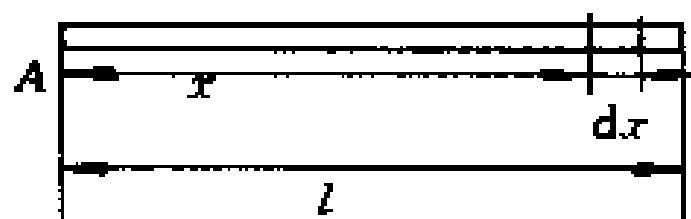
例题4-3 求质量为 m 、长为 l 的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量:

- (1) 转轴通过棒的中心并和棒垂直;
- (2) 转轴通过棒的一端并和棒垂直;
- (3) 转轴通过棒上距中心为 h 的一点并和棒垂直.

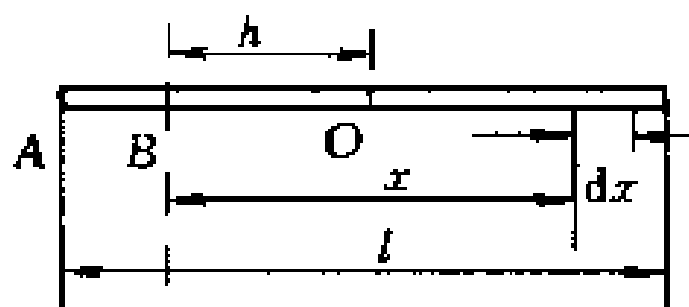
解 如图4-8所示,在棒上离轴 x 处,取一长度元 dx ,如棒的质量线密度为 λ ,则长度元的质量为 $dm = \lambda dx$,根据式(4-5),



(a)



(b)



(c)

图4-8 细棒的转动惯量计算

(1) 当转轴通过中心并和棒垂直[图(a)]时,我们有

$$J_0 = \int r^2 dm = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 dx = \frac{\lambda l^3}{12}$$

因 $\lambda = m$, 代入得

$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2$$

(2) 当转轴通过棒的一端 A 并和棒垂直[图(b)]时, 我们有

$$J_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda l^3 = \frac{1}{3}ml^2$$

(3) 当转轴通过棒上距中心为 h 的 B 点并和棒垂直[图(c)]时, 我们有

$$J_B = \int_{l/2-h}^{l/2+h} \lambda x^2 dx = \frac{1}{12}ml^2 + mh^2$$

这个例题表明, 同一刚体对不同位置的转轴, 转动惯量并不相同. 此外, 细心的读者通过(2)与(3)中结果的比较, 还可发现, 当(3)中 $h = \frac{1}{2}l$ 时, 其结果就与(2)的全同. 由于图中 O 点实际上是细棒的质心, $\frac{1}{12}ml^2$ 就是细棒对通过质心的转轴的转动惯量, 可用 J_C 表示, 这样, (3)中结果的一般表达式看来可表示为

$$J = J_C + mh^2$$

上式是一般表式, 现在证明如下: 我们用 x 表示棒上质点对 O 轴的距离, 用 r 表示它对 B 轴的距离. 按转动惯量的定义, 有

$$\begin{aligned} J_B &= \int r^2 dm = \int (x + h)^2 dm \\ &= \int x^2 dm + h^2 \int dm + 2h \int x dm \\ &= J_C + mh^2 + 0 \end{aligned}$$

最后一项等于零是质心的定义的结果. 此式表明刚体对任一转轴(通过 B 点)的转动惯量等于刚体对通过质心并与该轴平行的轴

的转动惯量 J_C 加上刚体质量与两轴间距离 h 的二次方的乘积, 这常被叫做平行轴定理.

例题4-4 求圆盘对于通过中心并与盘面垂直的转轴的转动惯量. 设圆盘的半径为 R , 质量为 m , 密度均匀.

解 设圆盘的质量面密度为 σ , 在圆盘上取一半径为 r 、宽度为 dr 的圆环(图4-9), 环的面积为 $2\pi r dr$, 环的质量 $dm = \sigma 2\pi r dr$. 由式(4-5)可得

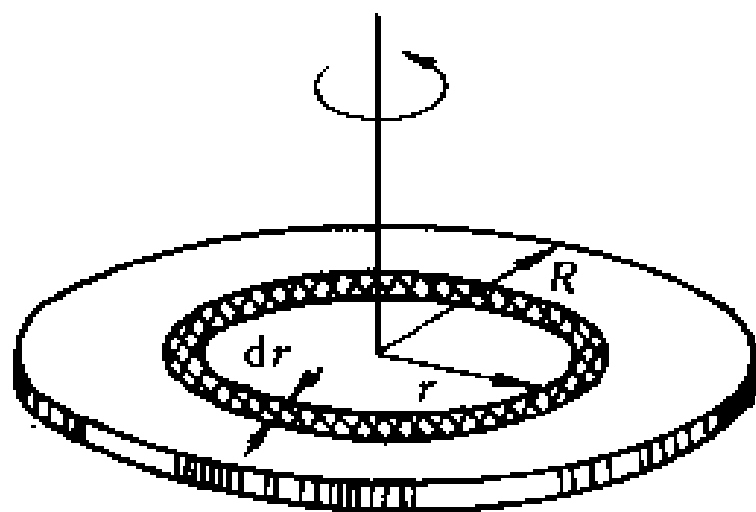


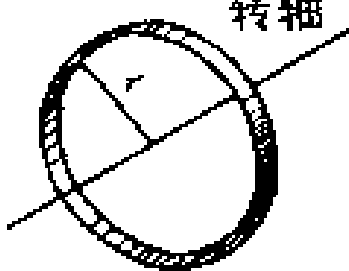
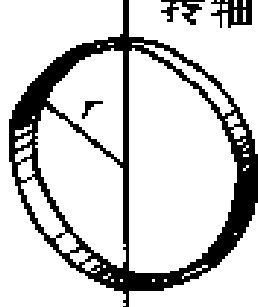
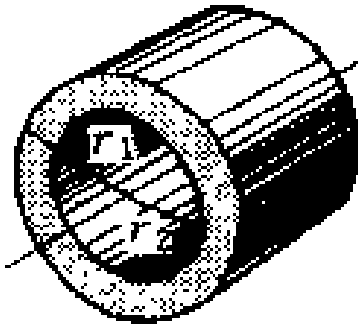
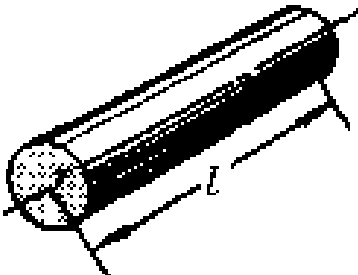
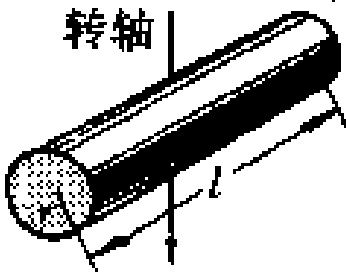
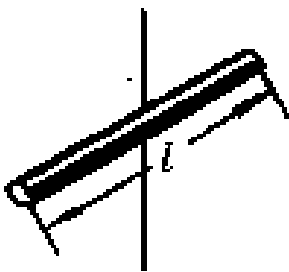
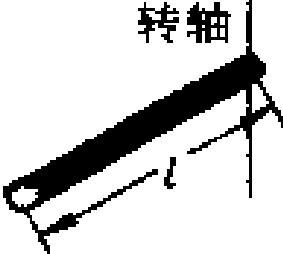
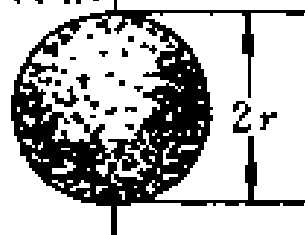
图4-9 圆盘的转动惯量的计算

$$\begin{aligned} J &= \int r^2 dm = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 dr \\ &= \frac{\pi \sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

由转动惯量的定义 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ 及上面例题可以看出, 影响转动惯量大小的因素归纳起来有三个: (1) 刚体的总质量, (2) 质量的分布, (3) 给定轴的位置. 这第一个因素在每个例题中都清楚地显示出来. 至于第二个因素, 也是容易理解的. 例如, 对中心轴, 质量相同、半径也相同的圆盘与圆环, 两者的质量分布不同, 圆盘质量均匀分布于整个盘内, 圆环质量集中分布在边缘, 所以圆环的转动惯量比较大. 例题4-3突出地表明在转动惯量的计算中, 转轴位置的重要性. 同一细棒, 对通过中心且垂直于棒的转轴, 与对通过棒端且垂直于棒的转轴的转动惯量是不相同的, 后者较大. 这是因为轴的位置不同, 每个质元到转轴的垂直距离 r_i 也就不同, 因而影响了转动惯量的大小. 所以只有指出转轴, 刚体的转动惯量才是确定的. 表4-1给出了常见刚体的转动惯量.

有时考虑到刚体的转动惯量与其总质量 $m = \sum \Delta m_i$ 有关, 而把刚体对定轴的转动惯量 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ 写成 $J = m r_G^2$, 式中 r_G 叫做刚体对该定轴的回转半径. 引入回转半径概念以后, 该刚体对该定轴来说, 其质量好比集中在离轴距离为 r_G 的圆环之上.

表4-1 转动惯量

 圆环 转轴通过中心 与环面垂直 $J = mr^2$	 圆环 转轴沿直径 $J = \frac{mr^2}{2}$
 薄圆盘 转轴通过中心 与盘面垂直 $J = \frac{mr^2}{2}$	 圆筒 转轴沿几何轴 $J = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$
 圆柱体 转轴沿几何轴 $J = \frac{mr^2}{2}$	 圆柱体 转轴通过中心 与几何轴垂直 $J = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
 细棒 转轴通过中心 与棒垂直 $J = \frac{ml^2}{12}$	 细棒 转轴通过端点 与棒垂直 $J = \frac{ml^2}{3}$
 球体 转轴沿直径 $J = \frac{2mr^2}{5}$	 球壳 转轴沿直径 $J = \frac{2mr^2}{3}$

§ 4-3 力矩 刚体定轴转动定律

在本节中,我们将研究刚体绕定轴转动时的运动规律.经验表明,一个静止的刚体,要使之转动,离不开力矩的作用.因此,我们在这里要再次认识力矩的概念.

1. 力矩

一个具有固定轴的静止刚体,在外力作用下,有时发生转动,有时不发生转动.考察结果发现,刚体的转动与否,不仅与力的方向、大小有关,而且还与力的作用点和作用线有关.例如,当我们设计门窗时,安装把手的位置很重要,为了省力,要距离转轴远些,而且绝不能让作用力通过转轴^①.力矩正是全面考虑力的三要素的一个重要概念.

我们在上章介绍过力对给定点的力矩,而在定轴转动中,我们将遇到的只是力对给定转轴的力矩,这两者有什么异同呢?在图4-10中,方向任意的外力 F 作用在刚体上的 P 点,而 P 点对坐标原点 O 的位矢为 r ,则按上章中的定义,力 F 对 O 点的力矩 M_O 可用位矢 r 与力 F 的矢积表示:

$$M_O = r \times F$$

它是个矢量.对于可以绕 O 点任意转动的刚体,这个力矩矢量将决定它转动状态的变化.但在定轴转动中,因平行于转轴的外力对刚体的绕轴转动起不了作用,所以必须把这个外力 F 分成两个分力,一个是与转轴平行的分力 F_1 ,另一个是与转轴垂直的分力 F_2 ,

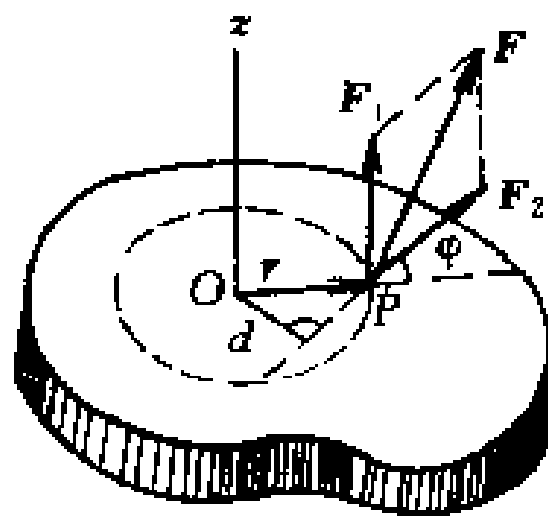


图4-10 力矩

^① 成书于西汉初期的《淮南子》中说:“十围之木持千钧之屋,五寸之键制开合之门,岂其材之巨小足矣,所居要也”.指出了作用点位置的重要性.

其中只有分力 F_2 能使刚体转动. 这个力 F_2 的力矩由图4-10可得为

$$M_z = F_2 r \sin \varphi = F_2 d \quad (4-6)$$

它叫做力 F 对转轴 Oz 的力矩. 式中 φ 是 F_2 与 r 之间的夹角, $d = r \sin \varphi$ 是轴 Oz 到力 F_2 的作用线的垂直距离, 通常叫做力臂. 可以证明, M_z 实际上是力对轴上任一点 O 的力矩 M_0 在 Oz 轴上的一个分量. 在刚体定轴转动中, 我们用到的只是这个分量, 而不是 M_0 . 应该注意的是式(4-6)中 F_2 为外力在垂直于转轴的平面内的分力.

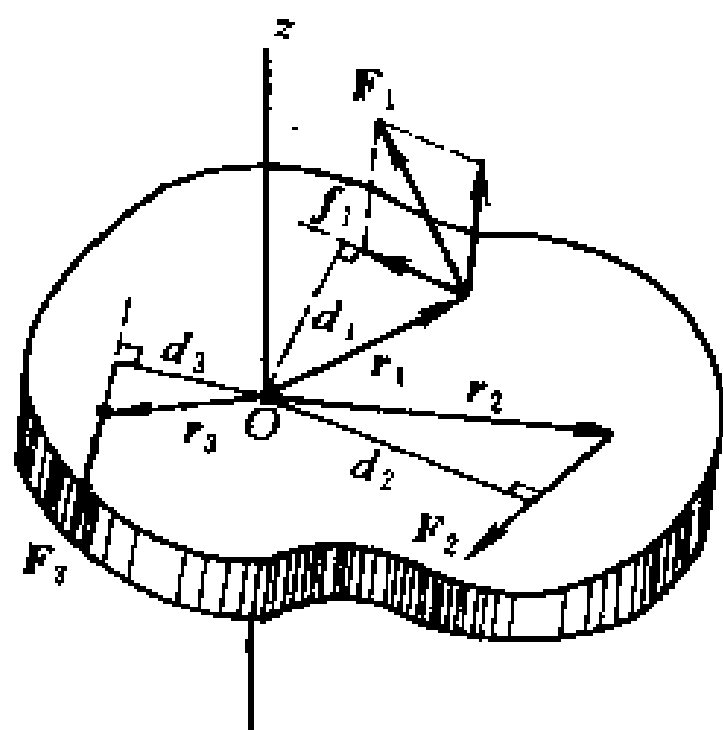


图4-11 几个力的总力矩

在定轴转动中, 如果有几个外力同时作用在刚体上时(图4-11), 它们的作用将相当于一个力矩的作用, 这个力矩叫做这几个力的总力矩. 实验

指出, 它们的总力矩的量值等于这几个力的力矩的代数和. 例如图4-11中所示, F_1 、 F_2 和 F_3 等三个力的总力矩的量值就是

$$M_z = F_1 d_1 + F_3 d_3 - F_2 d_2$$

式中正负号是根据右手螺旋法则规定的, 在力矩使刚体转动的转向与右手螺旋的转向一致时, 螺旋前进的方向如果沿转轴 Oz , 它就被定为力矩的正方向. 这样, M_z 为正值时, 总力矩的方向沿转轴 Oz 方向, 为负值时则相反.

在国际单位制中, 力矩的单位是 $N \cdot m$.

2. 定轴转动定律

图4-12表示一个绕固定轴 Oz 转动的刚体, 图中的 P 点表示刚体中的任一个质点, 其质量为 Δm_i , P 点离转轴的距离 $OP = r_i$ (相应的位矢为 r_i). 设刚体绕定轴转动的角速度和角加速度分别为 ω 和 α , 此时质点 P 所受的外力为 F_i , 内力为 f_i , 这里 f_i 表示刚体中的其它所有质点对质点 P 所作用的合力. 为了简化讨论起

见,我们假设外力 F_i 和内力 f_i 都位于通过质点 P 并垂直于转轴的平面内(它们与位矢 r_i 的交角分别为 φ_i 和 θ_i).

根据牛顿第二定律,质点 P 的运动方程为

$$F_i + f_i = \Delta m_i a_i \quad (1)$$

式中的 a_i 是质点 P 的加速度. 质点 P 绕转轴作圆周运动, 我们可写出它的法向和切向运动方程如下:

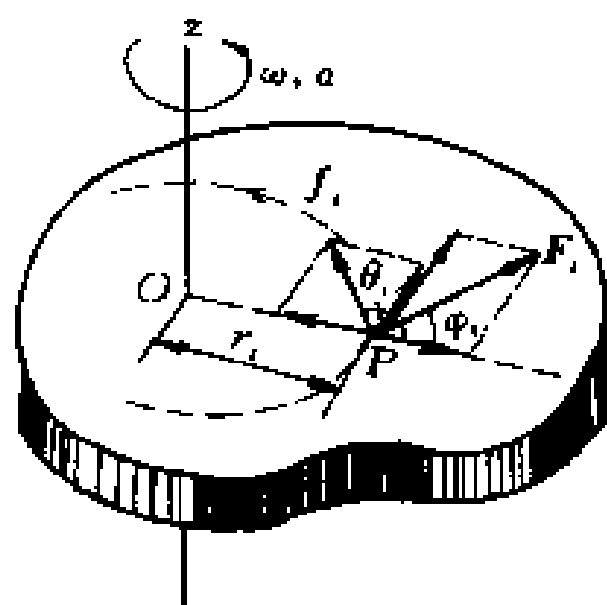


图4-12 推导转动定律用图

$$F_i \cos \varphi_i + f_i \cos \theta_i = -\Delta m_i a_{in} = -\Delta m_i r_i \omega^2 \quad (2)$$

$$F_i \sin \varphi_i + f_i \sin \theta_i = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i r_i \alpha \quad (3)$$

式中 $a_{in} = r_i \omega^2$ 和 $a_{it} = r_i \alpha$ 分别是质点 P 的法向和切向加速度, 式(2)的左边表示质点 P 所受的切向力, 式(3)的左边表示质点 P 所受的切向力. 法向力的作用线是通过转轴的, 其力矩为零, 我们不作讨论了. 在式(3)的两边分别乘上 r_i , 我们得到

$$F_i r_i \sin \varphi_i + f_i r_i \sin \theta_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha \quad (4)$$

此式左边的第一项是外力 F_i 对转轴的力矩, 而第二项是内力 f_i 对转轴的力矩. 对于刚体的全部质点, 可写出与式(4)相应的各个式子. 把这些式子全部相加, 即有

$$\sum_i F_i r_i \sin \varphi_i + \sum_i f_i r_i \sin \theta_i = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \alpha \quad (5)$$

因为内力中的每一对作用与反作用的力矩相加为零, 所以式(5)左边表示所有内力力矩之和的第二项等于零, 即 $\sum_i f_i r_i \sin \theta_i = 0$. 这样, 式(5)左边只剩下第一项, 这第一项就是刚体所受各外力对转轴 Oz 的力矩的代数和, 叫做总外力矩. 用 M_z 表示总外力矩, 则式(5)成为

$$M_z = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \alpha \quad (6)$$

式(6)中的总和 $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ 就是刚体对给定轴的转动惯量 J , 因此式

(6)可写成

$$M_z = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} \quad (4-7)$$

上式表明,刚体在总外力矩 M_z 的作用下,所获得的角加速度 α 与总外力矩的大小成正比,并与转动惯量成反比,这个关系叫做刚体的定轴转动定律.

由定轴转动定律不难看出,当刚体所受的总外力矩 M_z 一定时, J 愈大, α 就愈小,这意味着愈难改变其角速度,或者说刚体愈能保持其原来的转动状态;反之, J 愈小, α 就愈大,亦即愈易改变其角速度,或者说刚体愈易改变其原来的转动状态. 这就清楚地表明,转动惯量是量度刚体转动惯性的物理量.

采用刚体对轴的角动量 $L_z = J\omega$, 可将式(4-7)改写成

$$M_z = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{dL_z}{dt} \quad (4-8)$$

上式表示,刚体所受到的对某给定轴的总外力矩等于刚体对该轴的角动量的时间变化率. 这是用角动量陈述的定轴转动定律.

应该注意,对于刚体来说,它对给定轴的转动惯量 J 是保持不变的,因此,式(4-7)和式(4-8)的意义完全一样. 但在实际中,式(4-8)比式(4-7)的适用范围更为广泛,可以适用于刚体,也可以适用于非刚体. 当物体在运动时,转动惯量可以发生变化, $M_z = J\alpha$ 对它不再适用,但式(4-8)对它还是成立的.

例题4-5 轻绳跨过一定滑轮,滑轮视为圆盘,绳的两端分别悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体1和2, $m_1 < m_2$, 如图4-13所示. 设滑轮的质量为 m , 半径为 r , 所受的摩擦阻力矩为 M_f . 绳与滑轮之间无相对滑动. 试求物体的加速度和

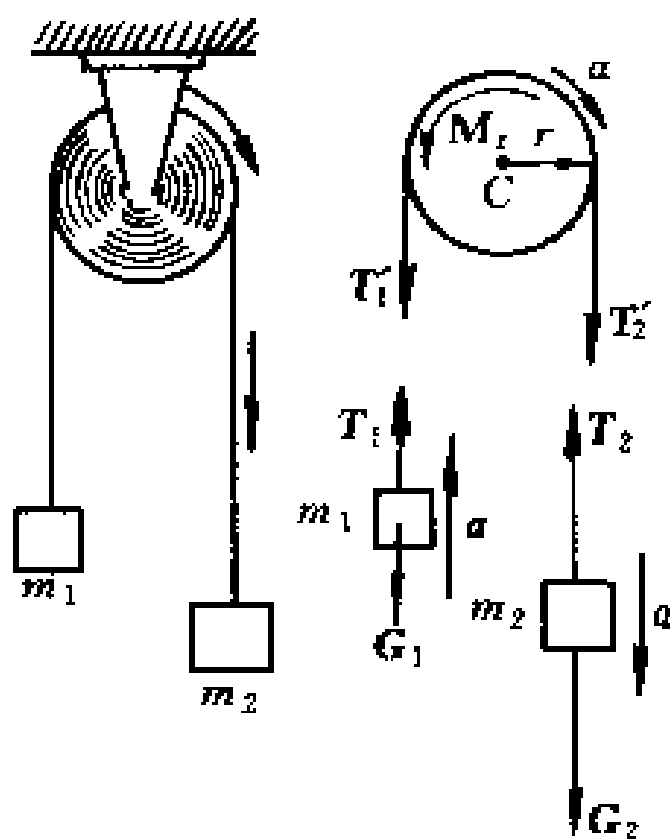


图4-13 阿特伍德机

绳的张力。

解 按题意,滑轮具有一定的转动惯量,而且在转动中还受到阻力矩的作用,两边绳子的张力不再相等.设物体1这边绳的张力为 T_1 、 T'_1 ($T'_1 = T_1$),物体2这边绳的张力为 T_2 、 T'_2 ($T'_2 = T_2$).因 $m_2 > m_1$,物体1向上运动,物体2向下运动,滑轮以顺时针方向旋转, M_r 的指向如图所示.按牛顿运动定律和转动定律可列出下列方程:

$$\begin{aligned} T_1 - G_1 &= m_1 a \\ G_2 - T_2 &= m_2 a \\ T'_2 r - T'_1 r - M_r &= J \alpha \end{aligned}$$

式中 α 是滑轮的角加速度, a 是物体的加速度.滑轮边缘上的切向加速度和物体的加速度相等,即

$$a = r \alpha$$

从以上各式即可解得

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g - M_r/r}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = \frac{(m_2 - m_1)g - M_r/r}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

而

$$T_1 = m_1(g + a) = \frac{m_1 \left[\left(2m_2 + \frac{1}{2}m \right) g - M_r/r \right]}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_2 = m_2(g - a) = \frac{m_2 \left[\left(2m_1 + \frac{1}{2}m \right) g + M_r/r \right]}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{(m_2 - m_1)g - M_r/r}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m \right) r}$$

当不计滑轮质量及摩擦阻力矩即令 $m=0$ 、 $M_r=0$ 时,有

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

上题中的装置叫阿特伍德机,是一种可用来测量重力加速度 g 的简单装置.因为在已知 m_1 、 m_2 、 r 和 J 的情况下,能通过实验测出物体1和2的加速度 a ,再通过加速度把 g 算出来.在实验中可使两物体的 m_1 和 m_2 相近,从而使它们的加速度 a 和速度 v 都较小,这样就能较精确地测出 a 来.

例题4-6 一半径为 R , 质量为 m 的匀质圆盘,平放在粗糙的水平桌面上.设盘与桌面间的摩擦系数为 μ ,令圆盘最初以角速度 ω_0 绕通过中心且垂直盘面的轴旋转,问它将经过多少时间才停止转动?

解 由于摩擦力不是集中作用于一点,而是分布在整个圆盘与桌子的接触面上,因此摩擦阻力矩

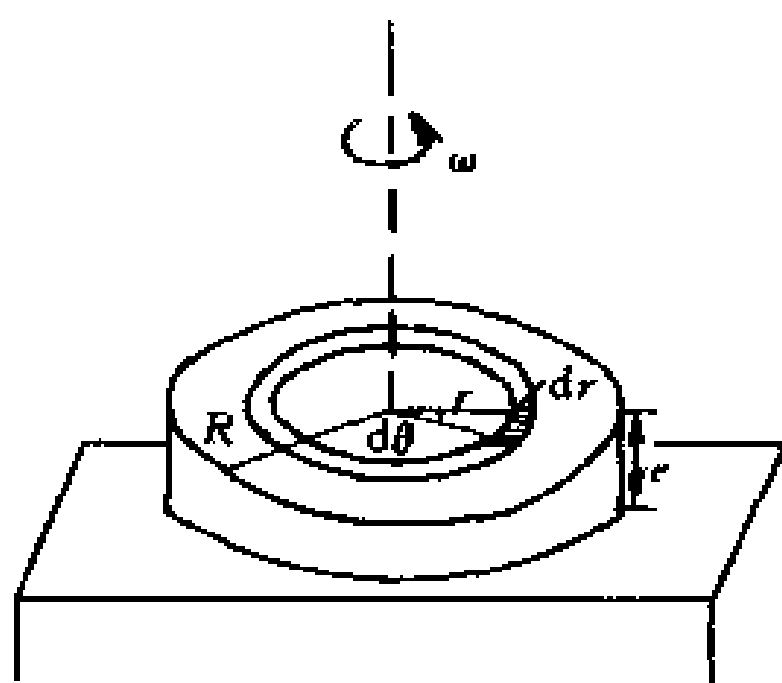


图4-14 减速转动的圆盘

的计算要用积分法.在图4-14中,把圆盘分成许多环形质元,每个质元的质量 $dm = \rho r d\theta dr e$,所受到的阻力矩是 $r\mu dm g$.此处 ρ 是盘的密度, e 是盘的厚度.圆盘所受阻力矩就是

$$\begin{aligned} M_r &= \int r\mu dm g = \mu g \int r \rho e d\theta dr \\ &= \mu g \rho e \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \\ &= \frac{2}{3} \mu g e \rho \pi R^3 \end{aligned}$$

因 $m = \rho e \pi R^2$,代入得

$$M_r = \frac{2}{3} m g \mu R$$

根据定轴转动定律,阻力矩使圆盘减速,即获得负的角加速度,

$$-\frac{2}{3}mg\mu R = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

设圆盘经过时间 t 停止转动, 则有

$$-\frac{2}{3}g\mu \int_0^t dt = \frac{1}{2}R \int_{\omega_0}^0 d\omega$$

由此求得

$$t = \frac{3}{4} \frac{R}{\mu g} \omega_0$$

§ 4-4 定轴转动的动能定理

1. 力矩的功

当质点在外力作用下发生位移时, 力就对质点作了功. 与之相似, 刚体在外力矩作用下转动时, 力矩也对刚体做功. 在刚体转动时, 作用力可以作用在刚体的不同质点上, 各个质点的位移也不相同. 只有将各个力对各个相应质点作的功加起来, 才能求得力对刚体所作的功. 由于在转动的研究中, 使用角量比使用线量方便, 因此在功的表达式中力以力矩的形式出现, 力作的功也就是力矩的功.

现在来计算力矩的功. 对于刚体, 因各质点间的相对位置不变, 所以内力不作功, 只需考虑外力的功. 而对于定轴转动的情形, 只有在垂直于转轴平面内的分力 F_2 才能使刚体转动, 平行于转轴的分力 F_1 是不作功的. 为简化书写, 把 F_2 写成 F . 如图4-15所示, 设质量为 Δm_i 的质点 P , 在外力 F_i 作用下, 绕轴转过的角位移为 $d\theta$, 质点 P 的位移大小为 $ds_i = r_i d\theta$, 位移与 F_i 所成夹角

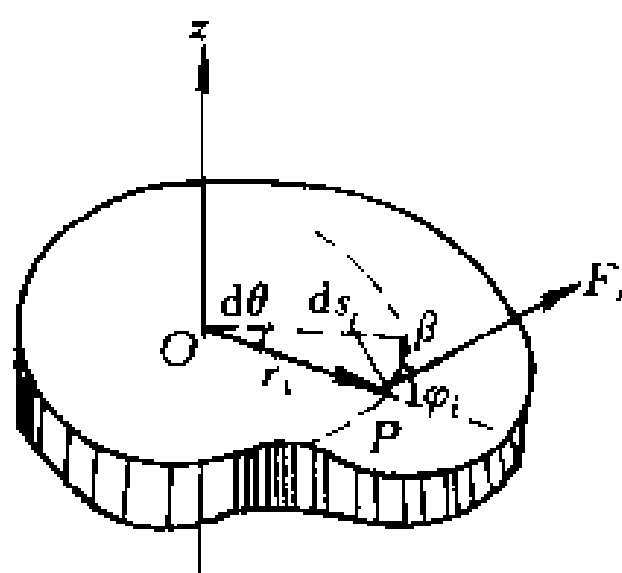


图4-15 力矩的功

为 β . 按功的定义, F_i 在这段位移中所作的元功是

$$dA_i = F_i \cos \beta ds = F_i r_i \cos \beta d\theta$$

由图可见, $\cos \beta = \sin \varphi_i$, 又因力矩 $M_i = F_i r_i \sin \varphi_i$, 所以上式成为

$$dA_i = M_i d\theta$$

设刚体从 θ_0 转到 θ , 则力 F_i 作的功为

$$A_i = \int_{\theta_0}^{\theta} M_i d\theta$$

再对各个外力的功求和, 就得到所有外力作的总功

$$\begin{aligned} A &= \sum_i A_i = \sum_i \int_{\theta_0}^{\theta} M_i d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\sum_i M_i \right) d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta \end{aligned} \quad (4-9)$$

式中 $M = \sum_i M_i$ 为刚体所受到的总外力矩.

由此可见, 力对刚体所作的功可用力矩与刚体角位移乘积的积分来表示, 叫做力矩的功.

2. 定轴转动的动能定理

根据定轴转动定律,

$$M_z = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

为了简化书写, 把 M_z 写成 M , 则刚体在 dt 时间内转过角位移 $d\theta = \omega dt$ 时, 外力矩所作元功是

$$dA = M d\theta = \frac{d}{dt}(J\omega) d\theta = J d\omega \frac{d\theta}{dt} = J\omega d\omega$$

如刚体的角速度由 t_1 时刻的 ω_1 变为 t_2 时刻的 ω_2 , 则在此过程中总外力矩对刚体所作的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega \\ &= \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2 \end{aligned} \quad (4-10)$$

上式表明,总外力矩对刚体所作的功等于刚体转动动能的增量,这个关系式叫做刚体定轴转动的动能定理。

如果刚体受到摩擦力矩或阻力矩的作用,则刚体的转动将逐渐变慢。这时,阻力矩与角位移反向,阻力矩作负功,转动动能的增量为负值,这就是说转动刚体反抗阻力矩做功,它的转动动能逐渐减小。

动能定理在工程上有很多应用。为了储能,许多机器都配置飞轮。转动的飞轮因转动惯量很大,可以把能量以转动动能的形式储存起来,在需要做功的时候再予以释放。例如冲床在冲孔时,冲力很大,如果由电动机直接带动冲头,电机将无法承受这样大的负荷,因此,中间要装上减速箱和飞轮储能装置,电动机通过减速箱带动飞轮转动,使飞轮储有动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$,在冲孔时,由飞轮带动冲头对钢板冲孔做功,使飞轮转动动能减少。这就是动能定理的应用。利用转动飞轮释放能量,可以大大减少电机的负荷,从而解决了上述矛盾。

3. 刚体的重力势能

如果一个刚体受到保守力的作用,也可引入势能的概念。刚体在定轴转动中涉及的势能主要是重力势能。这里把刚体-地球系统的重力势能简称刚体的重力势能,意思是取地面坐标系来计算势能值。

对于一个不太大的质量为 m 的刚体,它的重力势能应是组成刚体的各个质点的重力势能之和,即

$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i = g \sum \Delta m_i h_i$$

根据质心的定义,此刚体的质心的高度应为

$$h_c = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

所以上式可改写为

$$E_p = mgh_c \quad (4-11)$$

这一结果表明,一个不太大的刚体的重力势能与它的质量集中在质心时所具有的势能一样.

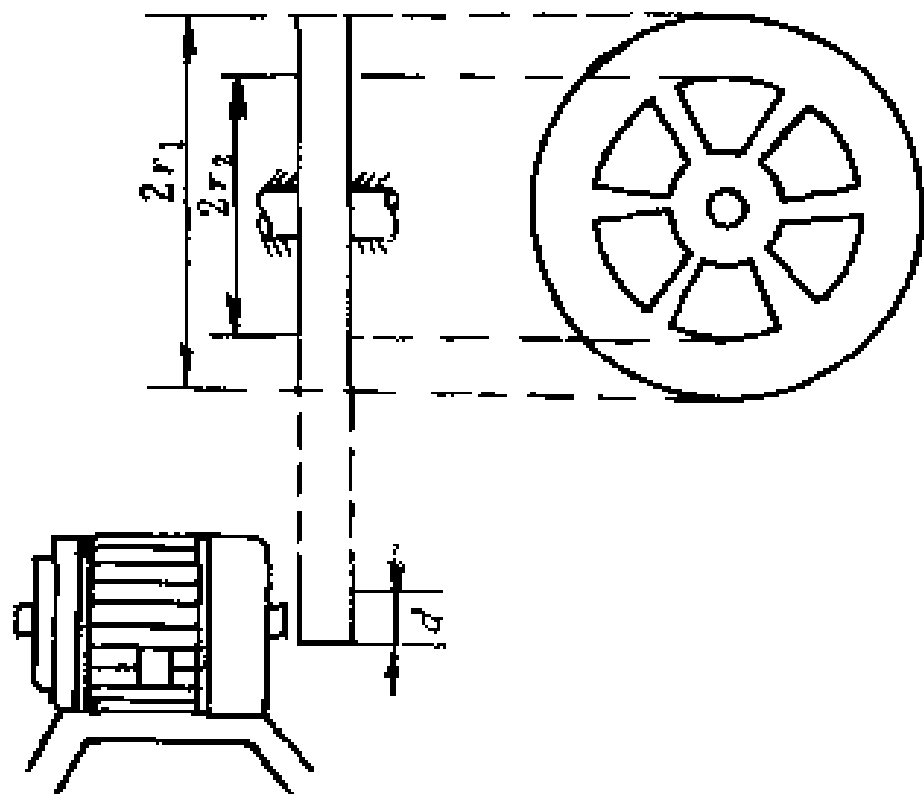


图4-16 冲床上的转动飞轮

考虑了刚体的功和能的上述特点,关于一般质点系统的功能原理、机械能守恒定律等,都可方便地用于刚体的定轴转动.

例题4-7 如图4-16,冲床上配置一质量为5000 kg 的飞轮, $r_1 = 0.3 \text{ m}$, $r_2 = 0.2 \text{ m}$. 今用转速为900 r/min 的电动机借皮带传动来驱动飞轮,已知电动机的传动轴直径为 $d = 10 \text{ cm}$. (1)求飞轮的转动动能. (2)若冲床冲断0.5mm 厚的薄钢片需用冲力 $9.80 \times 10^4 \text{ N}$,所消耗的能量全部由飞轮提供,问冲断钢片后飞轮的转速变为多大?

解 (1)为了求飞轮的转动动能,需先求出它的转动惯量和转速. 因飞轮质量大部分分布在轮缘上,由图示尺寸并近似用圆筒的转动惯量公式,得

$$\begin{aligned} J &= \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2} \times 5000 \times (0.3^2 + 0.2^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 325 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

在皮带传动机构中,电动机的传动轴是主动轮,飞轮是从动

轮. 两轮的转速与轮的直径成反比, 即飞轮的转速为

$$n_{\text{飞}} = n_{\text{电}} \frac{d_{\text{电}}}{d_{\text{飞}}}$$

由此得飞轮的角速度

$$\omega = \frac{2\pi n_{\text{飞}}}{60} = \frac{2\pi n_{\text{电}}}{60} \frac{d_{\text{电}}}{d_{\text{飞}}}$$

这样, 飞轮的转动动能就是

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} J \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 325 \times \left(\frac{2 \times 3.14 \times 900 \times 10}{60 \times 60} \right)^2 \text{ J} \\ &= 40055 \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 在冲断钢片过程中, 冲力 F 所作的功为

$$\begin{aligned} A &= Fd = 9.80 \times 10^4 \times 0.5 \times 10^{-3} \text{ J} \\ &= 49 \text{ J} \end{aligned}$$

这就是飞轮消耗的能量, 此后, 飞轮的能量变为

$$E'_k = (40055 - 49) \text{ J} = 40006 \text{ J}$$

由 $E'_k = \frac{1}{2} J \omega'^2$ 求得此时的角速度 ω' 为

$$\omega' = \sqrt{\frac{2E'_k}{J}}$$

而飞轮的转速变为

$$n'_{\text{飞}} = \frac{60}{2\pi} \omega' = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 40006}{325}} \text{ r/min} = 149.8 \text{ r/min}$$

例题4-8 一根质量为 m 、长为 l 的均匀细棒 OA (图4-17), 可绕通过其一端的光滑轴 O 在竖直平面内转动, 今使棒从水平位置开始自由下摆, 求细棒摆到竖直位置时其中心点 C 和端点 A 的速度.

解 先对细棒 OA 所受的力作一分析: 重力 G , 作用在棒的中

心点 C , 方向竖直向下; 轴和棒之间没有摩擦力, 轴对棒作用的支承力 N 垂直于棒和轴的接触面且通过 O 点, 在棒的下摆过程中, 此力的方向和大小是随时改变的.

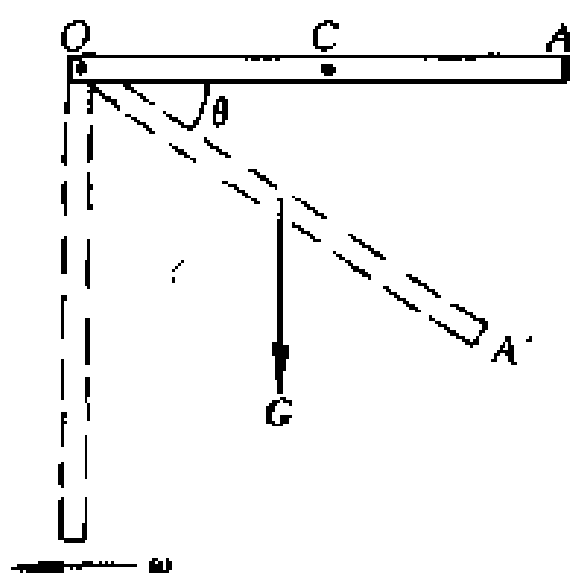


图4-17 细棒下摆

在棒的下摆过程中, 对转轴 O 而言, 支承力 N 通过 O 点, 所以支承力 N 的力矩等于零, 重力 G 的力矩则是变力矩, 大小等于 $mg \frac{l}{2} \cos \theta$, 棒转过一极小的角位移 $d\theta$ 时, 重力矩所作的元功是

$$dA = mg \frac{l}{2} \cos \theta d\theta$$

在棒从水平位置下摆到竖直位置的过程中, 重力矩所作总功

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = mg \frac{l}{2}$$

应该指出: 重力矩作的功就是重力作的功, 也可用重力势能的差值来表示. 棒在水平位置时的角速度 $\omega_0 = 0$, 下摆到竖直位置时的角速度为 ω , 按力矩的功和转动动能增量的关系式(4-10)得

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

由此得

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

因 $J = \frac{1}{3} ml^2$, 代入上式得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

所以细棒在竖直位置时, 端点 A 和中心点 C 的速度分别为

$$v_A = l\omega = \sqrt{3gl}$$

$$v_c = \frac{l}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

§ 4-5 刚体的自由度 * 刚体的平面平行运动

在刚体的运动中,定轴转动是比较简单的,只要一个方程(转动定律)就能解决问题.刚体的一般运动就比较复杂了,需要几个方程式联立起来才能求解.究竟要列几个方程才算合适呢?对此,我们将进行一些必要的讨论,并以刚体的平面运动为例,作一简单介绍.

1. 自由度

首先,我们引入自由度的概念.所谓物体系统的自由度,就是决定这个系统在空间的位置所需要的独立坐标的数目.如果一个质点可在空间自由运动,那么,它的位置需要用三个独立坐标如 x 、 y 、 z 来决定,该质点就有3个自由度.如果质点被限制在平面或曲面上运动,它的位置只用两个独立坐标如 x 、 y 来决定,那么该质点就只有2个自由度.如果质点限制在一直线或曲线上运动,用1个独立坐标就足以决定它的位置,即这个质点只有1个自由度.如果把火车、轮船、飞机都看作质点,那么火车有1个自由度,轮船有2个自由度,飞机有3个自由度.

对刚体来说,平动和转动可兼而有之.一个刚体在空间的位置可决定如下:

(1) 要指出刚体上某定点(例如质心)的位置,需用三个独立坐标来决定,如图4-18中的 $C(x, y, z)$.

(2) 用两个独立坐标确定通过刚体内定点 C 的某直线 CA 的方位.为此,可用 φ 表示该直线在 xy 平面内的投影与 x 轴的夹角,它给出直线绕 z 轴转动的角位置;再用 θ 表示该直线与 z 轴的夹角,它给出直线绕垂直于 z 轴和 CA 所组成平面的轴转动的角位

置.

(3) 因为刚体还可以绕直线 CA 转动, 要表征刚体的这一转动, 还需用一角度 ϕ (如图所示).

所以, 总的说来自由刚体共有6个自由度: 3个平动自由度和3个转动自由度. 但当刚体的转动受到某种限制时, 刚体也可以只有1个转动自由度, 如门的转动, 或者只有2个转动自由度, 如摇头电风扇的转动.

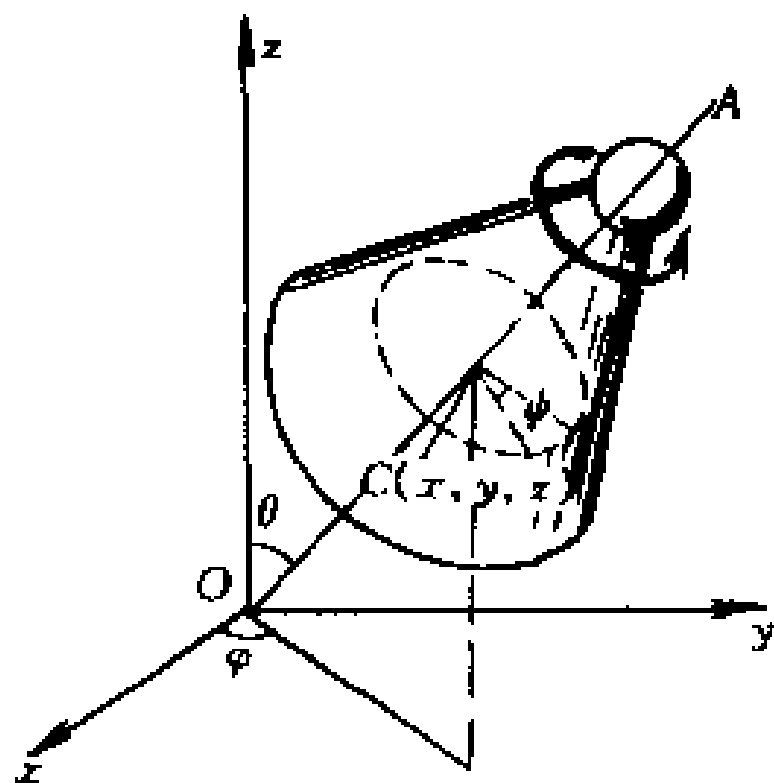


图4-18 刚体的自由度

一个自由质点有3个自由度, 描述它的运动要有3个方程式, 方程式的个数与自由度数符合的. 物体有几个自由度, 它的运动定律就可归结为几个独立的方程式. 一般质点系统, 由于质点数目 N 很大, 如果每个质点都能自由运动, 那么 N 个质点将有 $3N$ 个自由度, 与之相应, 独立的方程式也有 $3N$ 个, 所以不象刚体只有6个独立的方程式那样容易求得解决.

2. 刚体的平面平行运动

刚体的平面平行运动也是一种常见的运动. 什么叫刚体的平面平行运动呢? 当刚体运动时, 其中各点始终和某一平面保持一定的距离, 或者说刚体中各点都平行于某一平面而运动, 这就叫刚体的平面平行运动. 我们已经说过, 自由刚体有6个自由度, 其中3个是平动的, 3个是转动的. 在刚体的平面平行运动中, 它的自由度受到限制而小于6个, 只有2个平动自由度和1个转动自由度. 因此, 描述刚体的平面平行运动只需要3个独立的方程式. 这3个方程式是不难找到的.

在图4-19中, 三角板作某一平面平行运动. 它在一段时间内相对于坐标系 Oxy 由位置 ABD 变动到位置 $A'B'D'$. 这种运动既不是单纯的平动, 也不是单纯的转动. 但是, 我们可以把它看成平动

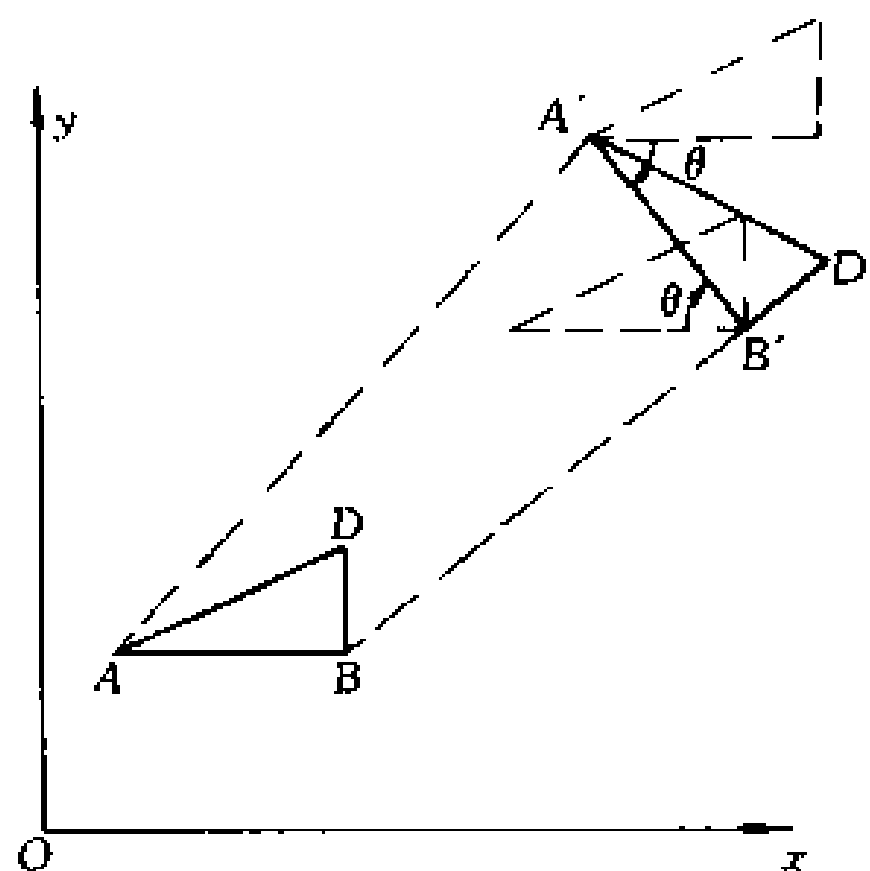


图4-19 三角板的平面平行运动

与转动的叠加. 我们在三角板上选一个端点, 使它先从 A 点平动到位置 A' , 这时三角板随之一起平动, 然后再绕通过该端点垂直于平面的轴转过一角度 θ , 而使三角板完全移到位置 $A'B'D'$ 上. 同样, 我们也可在三角板上选另一端点, 把这一运动看成是先从 B 点平动到位置 B' , 然后再绕通过这另一端点垂直于平面的轴转过一同样的角度, 而使三角板完全移到位置 $A'B'D'$ 上. 那些为了表明刚体的位置而选出的刚体上的点叫做基点. 事实表明, 刚体的平面平行运动可因基点选择的不同而看作许多不同方式的平动与绕通过基点垂直于平面的轴的转动的叠加. 值得注意的是, 在不同的叠加方式中, 转动的角位移都是一样的, 而相应的平动位移 $\overrightarrow{AA'}$ 与 $\overrightarrow{BB'}$ 却明显地不同. 由此可见, 刚体的平动速度依赖于基点的选择, 选取不同的基点, 平动速度是不同的; 而刚体的转动角速度却与基点的选择无关. 因此, 当我们讨论平面平行运动中刚体的角速度时, 不必指明它的转轴通过什么基点.

我们在上一章中指出过, 质心的运动能够代表系统整体移动的特征, 所以在我们研究刚体的平面平行运动时, 一般把质心选作基点. 这样, 刚体的平面平行运动就被看作质心的平动与相对于通过质心并垂直于平面的轴的转动的叠加. 设质心在 Oxy 平面内运

动,则可写出下列两个平动方程:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_{Cx} \\ \sum F_y &= ma_{Cy}\end{aligned}\quad (4-12)$$

式中 $\sum F_x$ 与 $\sum F_y$ 是刚体在 x 轴和 y 轴方向所受的合外力, m 是刚体的质量, a_{Cx} 与 a_{Cy} 是质心沿 x 轴和 y 轴方向的加速度. 第三个方程是刚体绕着通过质心并垂直于平面的轴的转动, 可以证明, 定轴转动的转动定律对此也是适用的^①, 即

$$M_C = J_C \alpha \quad (4-13)$$

式中 M_C 、 J_C 和 α 分别是刚体所受到的总力矩、转动惯量和角加速度, 它们都是对通过质心并垂直于平面的转轴而言的. 这样, 刚体的平面平行运动就可由式(4-12)和式(4-13)联合起来求解.

如图4-20所示, 是车轮在地面沿直线轨迹作纯粹的滚动, 纯粹

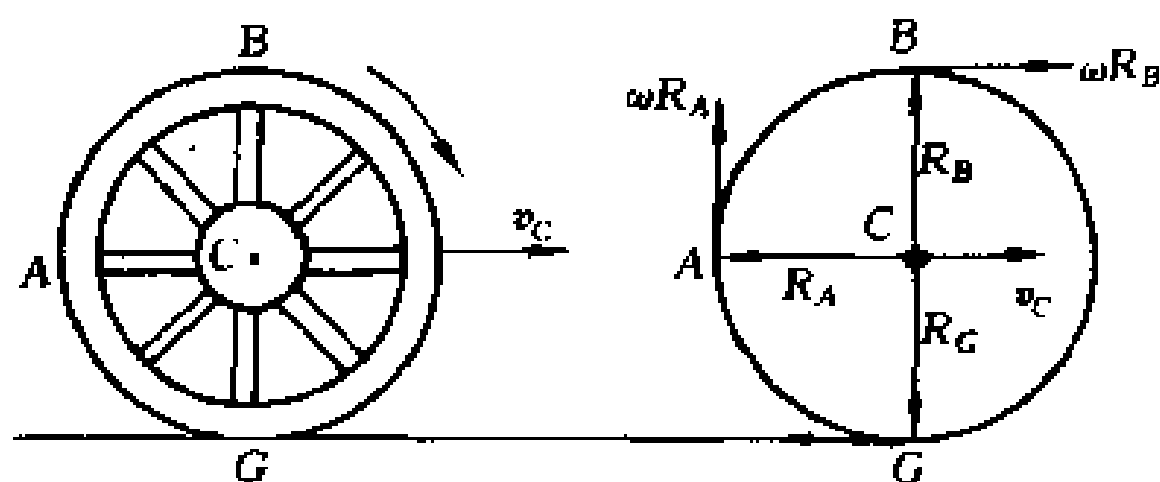


图4-20 纯滚动的车轮

滚动是没有滑动的滚动. 通过对滚动的运动学分析, 可为平面平行

① 要使定轴转动定律适用于通过加速度为 a_C 的质心的转轴, 应在作用于刚体的力矩中添加强性力矩 M_1 , 即

$$M_C + M_1 = J_C \alpha$$

但

$$M_1 = - \sum \mathbf{r}_{iC} \times \Delta m_i \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_C \times \sum \Delta m_i \mathbf{r}_{iC}$$

式中 $\mathbf{r}_{iC}$ 为质元 Δm_i 对质心的位矢. 显然

$$\sum \Delta m_i \mathbf{r}_{iC} = 0$$

所以, 最后得

$$M_C = J_C \alpha$$

运动的研究提供方便. 设车轮质心 C 的前进速度为 v_c , 车轮的半径为 R . 当车轮沿直线轨迹作纯粹滚动时, 车轮每滚过一周, 车轮质心前进的距离必等于车轮的周长, 由此可知车轮中心前进的距离 x 和车轮相对于质心转过的角度 θ 的关系为

$$x = R\theta \quad (1)$$

将上式(1)对时间 t 求导数得

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

即

$$v_c = R\omega \quad (2)$$

式(2)便是车轮作纯粹滚动时, 车轮质心的前进速度 $\frac{dx}{dt} = v_c$ 和车轮相对于质心作转动的角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ 之间的关系式. 下面利用这个关系式, 计算车轮上各点的速度.

车轮的运动可看作是整个车轮以速度 v_c 随质心的平动和以角速度 ω 绕质心的转动的合成, 因此车轮上各点的速度也就等于平动速度 v_c 加上该点相对于质心作角速度 ω 转动时的速度. 角速度 ω 的方向垂直纸面向里. 车轮边缘上各点由于转动而具有的速度为 $\omega \times r$ (这里, r 是从质心 C 到该点的位矢), 这是各该点相对于质心的速度, 大小都等于 $\omega R = v_c$. 所以车轮在滚动时轮边缘上任一点的速度是

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}} \quad (4-14)$$

参看图4-20, 在 G 点, v_c 和 $\omega \times r$ 大小相等、方向相反, 因此

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0$$

即 G 点是瞬时静止的. 车轮作纯粹滚动时, 车轮与轨迹的接触点 G 相对于轨迹是瞬时静止的, 并没有滑动. 同理, 在 A 点, v_c 和 $\omega \times r$ 方向相同, 所以

$$v_A = v_c + \omega R = 2v_c$$

v_A 方向和 v_c 相同. 在 B 点, v_c 和 $\omega \times r$ 互相垂直,

$$v_B = \sqrt{v_C^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2} v_C$$

在刚体运动的研究中,选取质心为基点,有许多优点.其中之一是这时刚体的动能可简单地表示为转动动能与平动动能之和.利用式(4-14),我们把刚体的动能写成

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\mathbf{v}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i [\mathbf{v}_C^2 + 2\mathbf{v}_C \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i \right) v_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \right) + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 \end{aligned}$$

考虑到 $\sum_i \Delta m_i = m$ 为刚体的质量,以及基点是质心,所以 $\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = 0$, 这样,上式就可改写成

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega})^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \end{aligned} \quad (4-15)$$

这就是说,刚体的全部动能等于质心运动的平动动能与刚体对质心的转动动能的和.上式只有对质心才成立,它的物理意义显得十分明确.

例题4-9 讨论一匀质实心的圆柱体在斜面上的运动.

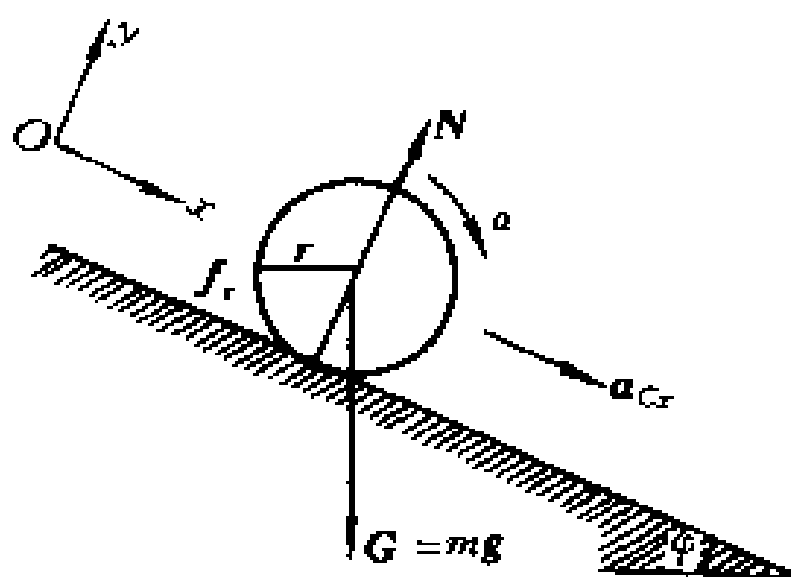


图4-21 圆柱体在斜面上的运动

解 圆柱体所受的力共有三个:重力 G ,斜面的支持力 N 和摩擦力 f_r ,如图4-21所示.设圆柱体的质量为 m ,半径为 r ,那么,它

对其几何轴的转动惯量 $J = \frac{1}{2}mr^2$, 我们取和斜面平行而向下的方向为 x 轴的方向, 和斜面垂直而向上的方向为 y 轴的方向, 这样, 由式(4-12)和式(4-13)得

$$\begin{aligned} ma_{Cx} &= mg\sin\varphi - f_r \\ ma_{Cy} &= N - mg\cos\varphi \\ J\alpha &= f_r r \end{aligned}$$

以上三式中, a_{Cx} 和 a_{Cy} 是圆柱体质心在 x 轴和 y 轴方向的加速度, α 是圆柱体对其通过质心的几何轴转动的角加速度. 因斜面粗糙, 圆柱体下降时没有滑动, 只能在斜面上作纯粹滚动, 那么此时^①

$$a_{Cx} = r\alpha, \quad a_{Cy} = 0$$

解上列五个式子, 得

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= \frac{g\sin\varphi}{1 + \frac{J}{mr^2}}, \quad \alpha = \frac{g\sin\varphi}{\left(1 + \frac{J}{mr^2}\right)r} \\ f_r &= \frac{J}{mr^2 + J} \cdot mg\sin\varphi, \quad N = mg\cos\varphi \end{aligned}$$

因 $J = \frac{1}{2}mr^2$, 代入得

$$a_{Cx} = \frac{2}{3}g\sin\varphi, \quad f_r = \frac{1}{3}mg\sin\varphi, \quad \alpha = \frac{2}{3} \frac{g\sin\varphi}{r}$$

如果这圆柱体从静止开始沿斜面滚下一段距离 x , 与之相应, 下降的竖直距离是 $h = x\sin\varphi$, 这时质心的速度由

$$v^2 = 2a_{Cx}x = \frac{4}{3}gx\sin\varphi = \frac{4}{3}gh$$

求得为

① 应用前面讨论纯滚动时的式(2), 可推知圆柱体作纯粹滚动时, 质心的速度 $v_C = v_{Cx} = r\omega$, $v_{Cy} = 0$; 这里 ω 是圆柱体对其通过质心的几何轴旋转的角速度. 将两式对时间 t 求导数得 $\frac{dv_{Cx}}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dv_{Cy}}{dt} = 0$; 这便是 $a_{Cx} = r\alpha$, $a_{Cy} = 0$.

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

如果斜面是光滑的,对圆柱体没有摩擦力,即 $f_r = 0$,则圆柱体质心沿斜面滑下的加速度是

$$a_{Cx} = g \sin \varphi$$

而圆柱体对质心的角加速度与角速度为

$$\alpha = 0, \quad \omega = 0$$

如果圆柱体从静止沿斜面下滑的距离也是 x ,则质心所获得的速度由

$$v^2 = 2a_{Cx}x = 2gx \sin \varphi = 2gh$$

求得为

$$v = \sqrt{2gh}$$

在上述纯粹滚动与纯粹滑动两种情形中,我们看到,两者加速度之比是 $2/3$,两者速度之比是 $\sqrt{2/3}$.

本题也可用机械能守恒定律讨论.圆柱体在斜面上作纯粹滚动下落时,所受到的斜面的摩擦力和正压力都不做功,满足机械能守恒的条件.圆柱体从静止滚下,它没有初动能,只有重力势能 mgh .当它滚动下降这段高度时,全部动能是

$$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

对于纯粹滚动而言, $v_c = r\omega$,以此代入得

$$E_k = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{J_c}{mr^2} \right) v_c^2$$

由机械能守恒定律得

$$mgh = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{J_c}{mr^2} \right) v_c^2$$

因此

$$v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{J_c}{mr^2}}}$$

把 $J_C = \frac{1}{2}mr^2$ 代入, 即得

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

和以前得出的结果完全一致.

例题4-10 一质量为 m 、半径为 R 的匀质圆柱, 在水平外力 F 作用下, 在粗糙的水平面上作纯滚动, 力的作用线与圆柱中心轴线的垂直距离为 l , 如图4-22所示. 求质心的加速度和圆柱所受的静摩擦力.

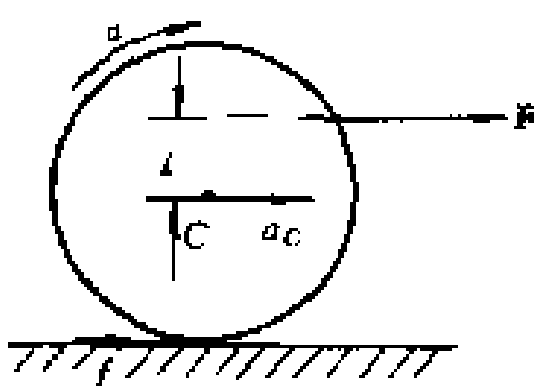


图4-22 例题4-10图

解 设静摩擦力 f 的方向如图所示, 则由质心运动方程

$$F - f = ma_C$$

及圆柱对质心的转动定律

$$Fl + fR = J_C\alpha$$

并考虑纯滚动的条件

$$a_C = R\alpha$$

以及

$$J_C = \frac{1}{2}mR^2$$

可解得

$$a_C = \frac{2F(R+l)}{3mR}$$

$$f = \frac{R-2l}{3R}F$$

由此可见:

$$l < \frac{R}{2}, \quad f > 0, \text{静摩擦力向后}$$

$$l > \frac{R}{2}, \quad f < 0, \text{静摩擦力向前}$$

$$l = \frac{R}{2}, \quad f = 0$$

§ 4-6 定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律

1. 定轴转动刚体的角动量定理

我们在 § 4-3 中介绍过用角动量陈述的定轴转动定理, 其表达式为

$$M_z = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

这和牛顿第二定律的微分形式 $F = \frac{d}{dt}p$ 十分相似, 有时上式也被叫做角动量定理的微分形式, 其中 J 在转动过程中是不变的. 但是, 可以证明, 当物体不是刚体, 它对给定轴的转动惯量可以随时改变时, 只要任一瞬时它可看作是绕该定轴以角速度 ω 转动的, 则上式仍然成立. 这样的几个物体组成的系统, 如果它们对同一给定轴的角动量分别为 $J_1\omega_1, J_2\omega_2, \dots$, 则系统对该轴的角动量为

$$L_z = \sum_i J_i \omega_i \quad i=1, 2, \dots$$

对于这个系统也可以有

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i J_i \omega_i \right) \quad (4-16)$$

刚体对转轴的角动量定理也可用积分形式表示. 如果在外力矩作用下, 从 t_0 到 t 的一段时间内, 物体对固定转轴的角动量由 $L_{z0} = (J\omega)_0$ 变为 $L_z = J\omega$, 则由 $M_z = \frac{d(J\omega)}{dt}$ 得

$$\boxed{\int_{t_0}^t M_z dt = J\omega - (J\omega)_0} \quad (4-17)$$

式中 $\int_{t_0}^t M_z dt$ 叫做这段时间内对轴的 力矩的冲量和或冲量矩之和.

上式表明：定轴转动物体对轴的角动量的增量等于外力对该轴的力矩的冲量之和。这就是对给定轴的角动量定理的积分形式。

2. 定轴转动刚体的角动量守恒定律

由式(4-17)可见,当外力对给定轴的总力矩为零时,物体对该轴的角动量将保持不变.这就是说,物体在绕定轴转动的过程中,

$$\text{当 } M_z = 0 \text{ 时, } L_z = J\omega = (J\omega)_0 = \text{常量} \quad (4-18)$$

这叫对固定转轴的角动量守恒定律.如果转动过程中转动惯量保持不变,则物体以恒定的角速度转动;如果转动惯量发生改变,则物体的角速度也随之改变,但二者之积保持恒定.

当定轴转动系统由多个物体组成时,由式(4-16)同样可得定轴转动物体系统的角动量守恒定律.如果转动系统由两个物体组成,则

$$\text{当 } M_z = 0 \text{ 时, } L_z = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \text{常量} \quad (4-19)$$

亦即,当系统内一个物体的角动量发生了改变,则另一物体的角动量必然有个与之等值异号的改变,从而使总角动量保持不变.

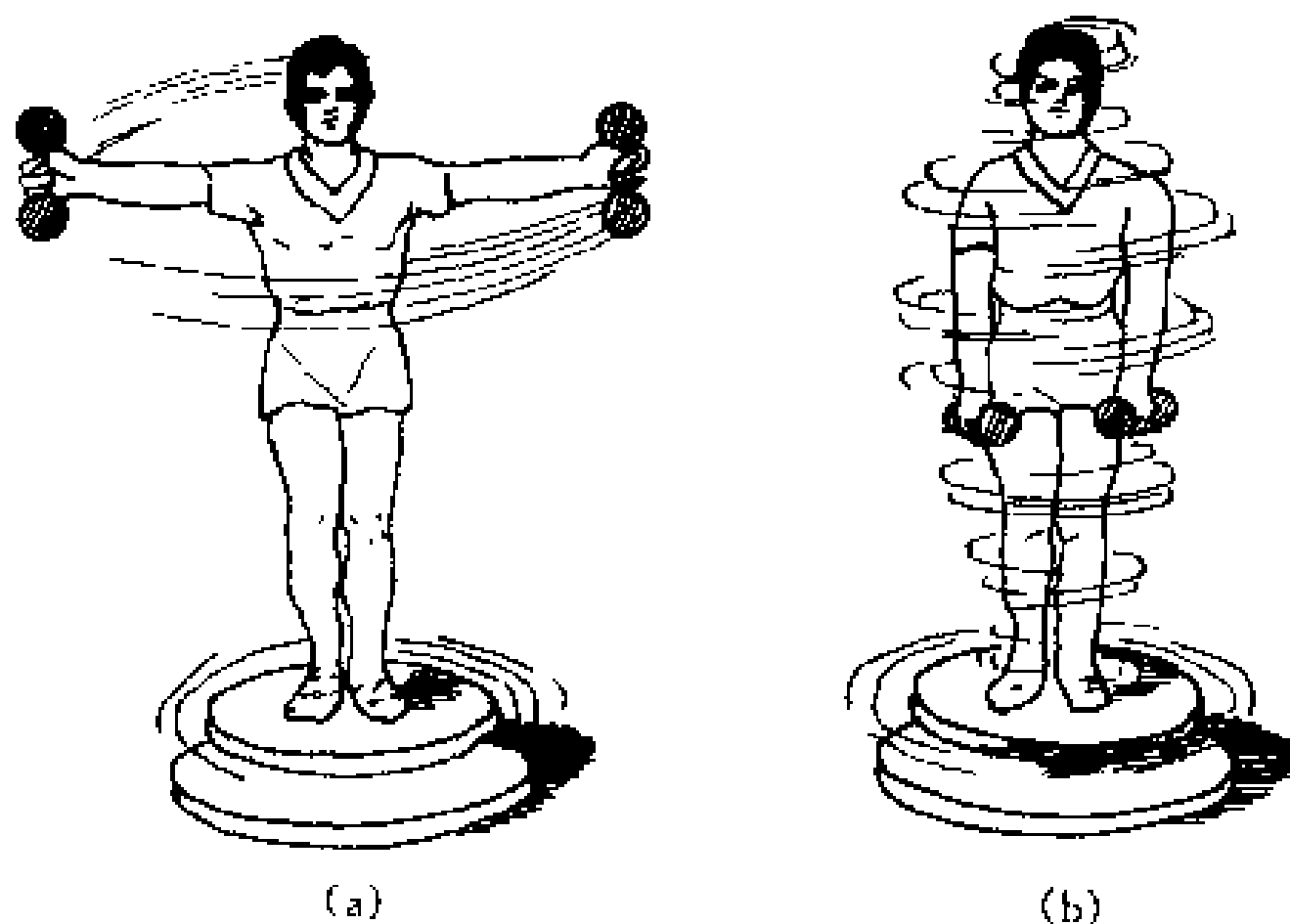


图4-23 角动量守恒定律的演示实验

上述角动量守恒定律可用图4-23中的实验生动地演示出来。这是一个可以绕竖直轴转动的凳子(转动中摩擦可忽略)。演示时,一人站在凳上,两手各握一个很重的哑铃。当他平举双臂时,在别人帮助下,使人和凳子一起以一定角速度旋转,如图4-23(a)所示。然后此人在转动中放下两臂,由于这时没有外力矩的作用,凳子和人的角动量应保持不变,所以当人放下两臂后,转动惯量减小,导致角速度增大,也就是说比平举两臂时要转得快一些[图4-23(b)]。

在日常生活中,利用角动量守恒定律的例子也是很多的。例如,舞蹈演员、溜冰运动员等,在旋转的时候,往往先把两臂张开旋转,然后迅速把两臂靠拢身体,使自己对体中央竖直轴的转动惯量迅速减小,因而旋转速度加快。又如跳水运动员在空中翻筋斗时(图4-24),跳水员将两臂伸直,并以某一角速度离开跳板,跳在空中时,将臂和腿尽量卷缩起来,以减小他对横贯腰部的转轴的转动惯量,因而角速度增大,在空中迅速翻转,当快接近水面时,再伸直臂和腿以增大转动惯量,减小角速度,以便竖直地进入水中。

在非定轴转动的情形中,物体的角动量保持不变不仅意味着角动量的大小不变,而且还意味着物体的转轴方向保持不变。对此,我们用图4-25所示的回转仪来演示。图中是一个悬在常平架上的回转仪。常平架是由支在框架L上的内外两个圆环组成的,外环能绕由光滑支点 A 、 A' 所确定的轴自由转动,内环能绕与外环相连的光滑支点 B 、 B' 所确定的轴自由转动。回转仪D是一个能以高速旋转的厚重、对称的转子,其轴 CC' 装在常平架的内环上。 AA' 、 BB' 、 CC' 三轴相互垂直,这就使回转仪的转轴在空间可取任何方位。我们看到,当使转子高速旋转之后,对它不再作用外力矩,由于角动量守恒,其转轴方向将保持恒定不变。即使把支架作任何转动,也不影响转子转轴的方向。因此,回转仪在现代技术中应用很广,回转仪的这一特性通常用作定向装置(例如回转罗盘),作为舰船、飞机、导弹上的方向标准。我国早在《西京杂记》上就有这方

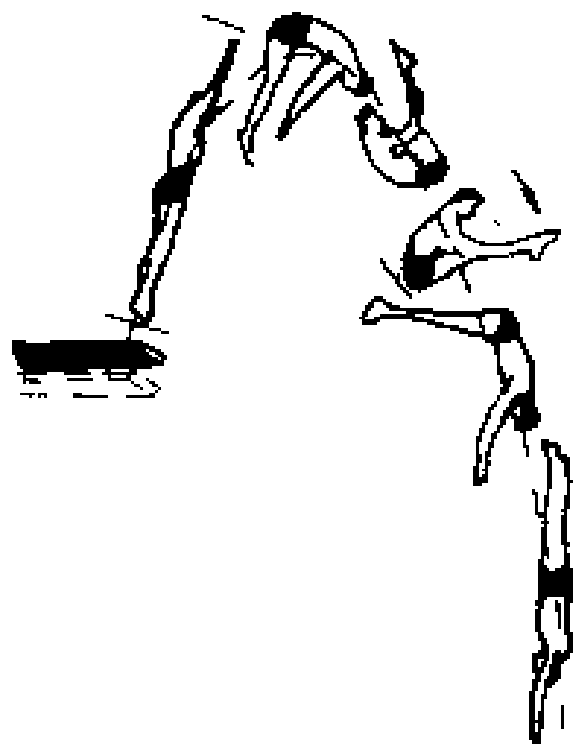


图4-24 运动员跳水时转动惯量和角速度变化的情况

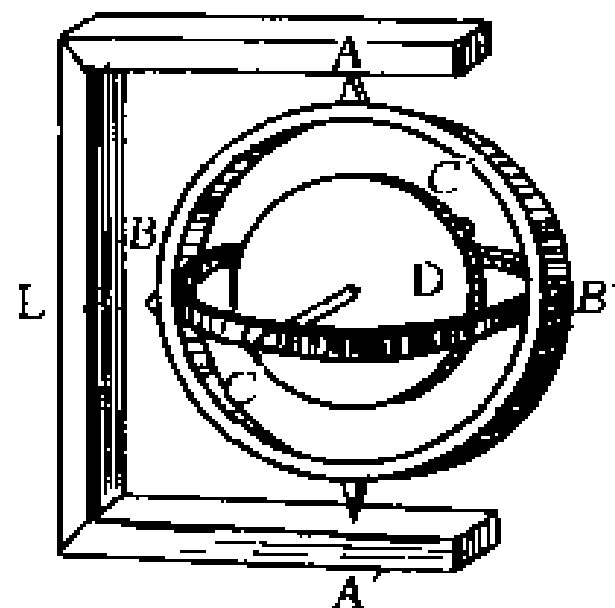


图4 25 悬在常平架上的回转仪

面的记载. 西汉时丁缓制造的卧褥香炉, 就用了常平架, 因而“环转四周, 而炉体常平”, 显示出非凡的技巧.

角动量守恒定律, 与前面介绍的动量守恒定律和能量守恒定律一样, 是自然界中的普遍规律. 我们以后会看到, 即使在原子内部, 也都严格地遵守着这三条定律.

现将平动和转动的一些重要公式列表对照(表4-2), 以供参考.

表 4-2

质点的直线运动(刚体的平动)	刚体的定轴转动
速度 $v = \frac{ds}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a = \frac{dv}{dt}$	角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
匀速直线运动 $s = vt$	匀角速转动 $\theta = \omega t$
匀变速直线运动: $v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 - v_0^2 = 2as$	匀变速转动: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$

续表

质点的直线运动(刚体的平动)	刚体的定轴转动
力 F , 质量 m 牛顿第二定律 $F=ma$	力矩 M , 转动惯量 J 转动定律 $M=Ja$
动量 mv , 冲量 Ft (常力) 动量定理 $Ft=mv-mv_0$ (常力)	角动量 $J\omega$, 冲量矩 Mt (常力矩) 角动量定理 $Mt=J\omega-J_0\omega_0$ (常力矩)
动量守恒定律 $\sum mv = \text{常量}$	角动量守恒定律 $\sum J\omega = \text{常量}$
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A=Fs$ 动能定理 $Fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ (常力)	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A=M\theta$ 动能定理 $M\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$ (常力矩)

例题4-11 一匀质细棒长度为 l , 质量为 m , 可绕通过其端点 O 的水平轴转动, 如图所示. 当棒从水平位置自由释放后, 它在竖直位置上与放在地面上的物体相撞. 该物体的质量也是 m , 它与地面的摩擦系数为 μ . 相撞后, 物体沿地面滑行一距离 s 而停止. 求相撞后棒的质心 C 离地面的最大高度 h , 并说明棒在碰撞后将向左摆或向右摆的条件.

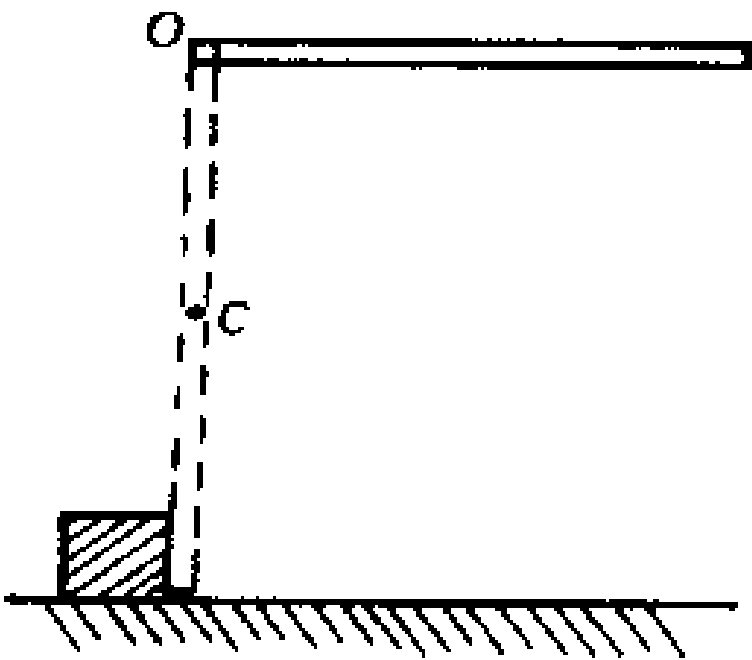


图4-26 例题4-11图

解 这个问题可分为三个阶段进行分析. 第一阶段是棒自由摆落的过程, 这时除重力外, 其余内力与外力都不做功, 所以机械能守恒. 我们把棒在竖直位置时质心所在处取为势能零点, 用 ω 表示棒这时的角速度, 则

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 \tag{1}$$

第二阶段是碰撞过程,因碰撞时间极短,作用的冲力极大,物体虽然受到地面的摩擦力,但可以忽略.这样,棒与物体相撞时,它们组成的系统所受到的对转轴 O 的外力矩为零,所以,这个系统的对 O 轴的角动量守恒.我们用 v 表示物体碰撞后的速度,则

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega = mvl + \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega' \quad (2)$$

式中 ω' 为棒在碰撞后的角速度,它可正可负. ω' 取正值,表示碰后棒向左摆;反之,表示向右摆.

第三个阶段是物体在碰撞后的滑行过程.物体作匀减速直线运动,加速度由牛顿第二定律求得为

$$-\mu mg = ma \quad (3)$$

由匀加速直线运动的公式得

$$0 = v^2 + 2as$$

亦即

$$v^2 = 2\mu gs \quad (4)$$

由式(1)、(2)与(4)联合求解,即得

$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs}}{l} \quad (5)$$

当 ω' 取正值,则棒向左摆,其条件为 $\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} > 0$,亦即 $l > 6\mu s$;当 ω' 取负值,则棒向右摆,其条件为 $\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} < 0$,亦即 $l < 6\mu s$.

棒的质心 C 上升的最大高度,与第一阶段情况相似,也可由机械能守恒定律求得:

$$mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}ml^2 \right) \omega'^2 \quad (6)$$

把式(5)代入上式,所求结果为

$$h = \frac{l}{2} + 3\mu s - \sqrt{6\mu sl}$$

例题4-12 工程上,两飞轮常用摩擦啮合器使它们以相同的转速一起转动.如图4-27所示,A和B两飞轮的轴杆在同一中心线

上, A 轮的转动惯量为 $J_A = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, B 轮的转动惯量为 $J_B = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 开始时 A 轮的转速为 600 r/min , B 轮静止. C 为摩擦啮合器. 求两轮啮合后的转速; 在啮合过程中, 两轮的机械能有何变化?

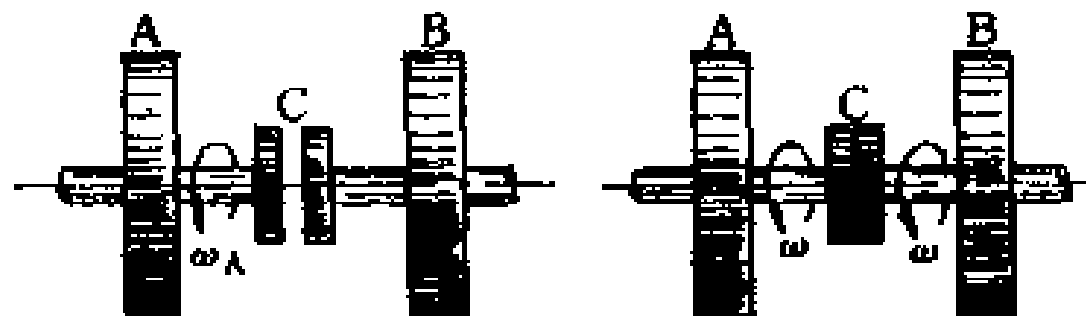


图4-27 两飞轮的摩擦啮合

解 以飞轮 A、B 和啮合器 C 作为一系统来考虑, 在啮合过程中, 系统受到轴向的正压力和啮合器间的切向摩擦力, 前者对转轴的力矩为零, 后者对转轴有力矩, 但为系统的内力矩. 系统没有受到其他外力矩, 所以系统的角动量守恒. 按角动量守恒定律可得

$$J_A \omega_A + J_B \omega_B = (J_A + J_B) \omega$$

ω 为两轮啮合后共同转动的角速度, 于是

$$\omega = \frac{J_A \omega_A + J_B \omega_B}{J_A + J_B}$$

以各量的数值代入, 得

$$\omega = 20.9 \text{ rad/s}$$

或共同转速为

$$n = 200 \text{ r/min}$$

在啮合过程中, 摩擦力矩做功, 所以机械能不守恒, 部分机械能将转化为热量, 损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2} J_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 - \frac{1}{2} (J_A + J_B) \omega^2 = 1.32 \times 10^4 \text{ J}$$

例题4-13 恒星晚期在一定条件下, 会发生超新星爆发, 这时星体中有大量物质喷入星际空间, 同时星的内核却向内坍缩, 成为体积很小的中子星. 中子星是一种异常致密的星体, 一汤匙中子星物质就有几亿吨质量! 设某恒星绕自转轴每45天转一周, 它的内核

半径 R_0 约为 2×10^7 m, 坍缩成半径 R 仅为 6×10^3 m 的中子星. 试求中子星的角速度. 坍缩前后的星体内核均看作是匀质圆球.

解 在星际空间中, 恒星不会受到显著的外力矩, 因此恒星的角动量应该守恒, 则它的内核在坍缩前后的角动量 $J_0 \omega_0$ 和 $J \omega$ 应相等. 因

$$J_0 = \frac{2}{5} m R_0^2, \quad J = \frac{2}{5} m R^2$$

代入 $J_0 \omega_0 = J \omega$ 中, 整理后得

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = \frac{1}{45} \left(\frac{2 \times 10^7}{6 \times 10^3} \right)^2 \left(\frac{1}{24 \times 60 \times 60} \right) \text{ r/s} \\ &= 3 \text{ r/s} \end{aligned}$$

由于中子星的致密性和极快的自转角速度, 在星体周围形成极强的磁场, 并沿着磁轴的方向发出很强的无线电波、光或 X 射线. 当这个辐射束扫过地球时, 就能检测到脉冲信号, 因此, 中子星又叫脉冲星. 目前已探测到的脉冲星超过 300 个.

例题 4-14 图 4-28 中的宇宙飞船对其中心轴的转动惯量为 $J = 2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 它以 $\omega = 0.2 \text{ rad/s}$ 的角速度绕中心轴旋转. 宇航员想用两个切向的控制喷管使飞船停止旋转. 每个喷管的位置与轴线距离都是 $r = 1.5 \text{ m}$. 两喷管的喷气流量恒定, 共是 $\alpha = 2 \text{ kg/s}$. 废气的喷射速率 (相对于飞船周边) $u = 50 \text{ m/s}$, 并且恒定. 问喷管应喷射多长时间才能使飞船停止旋转.

解 把飞船和排出的废气看作一个系统, 废气质量为 m . 可以

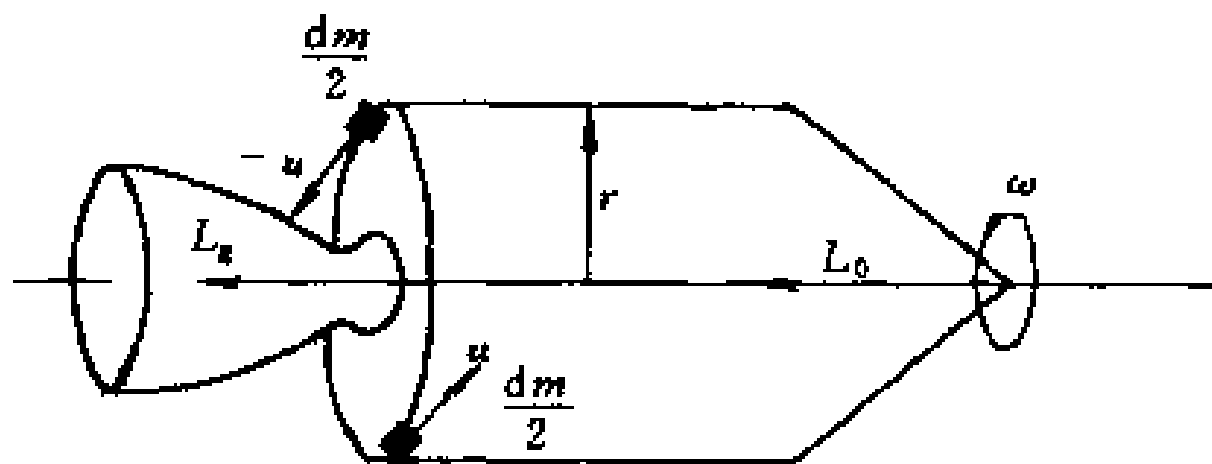


图 4-28 例题 4-14 图

认为废气质量远小于飞船的质量,所以原来系统对于飞船中心轴的角动量近似地等于飞船自身的角动量,即

$$L_0 = J\omega$$

在喷气过程中,以 dm 表示 dt 时间内喷出的气体,这些气体对中心轴的角动量为 $dm \cdot r(u+v)$,方向与飞船的角动量相同.因 $u=50 \text{ m/s}$ 远大于飞船周边的速率 $v(=\omega r)$,所以此角动量近似地等于 $dm \cdot ru$.在整个喷气过程中喷出废气的总的角动量 L_g 应为

$$L_g = \int_0^m dm \cdot ru = mru$$

当宇宙飞船停止旋转时,其角动量为零.系统这时的总角动量 L_1 就是全部排出的废气的总角动量,即

$$L_1 = L_g = mru$$

在整个喷射过程中,系统所受到的对于飞船中心轴的外力矩为零,所以系统对于此轴的角动量守恒,即 $L_0 = L_1$.由此得

$$J\omega = mru$$

即

$$m = \frac{J\omega}{ru}$$

于是所需的时间为

$$t = \frac{m}{\alpha} = \frac{J\omega}{\alpha ru} = \frac{2 \times 10^3 \times 0.2}{2 \times 1.5 \times 50} \text{ s} = 2.67 \text{ s}$$

§ 4-7 进 动

本节介绍一种刚体转轴不固定的情况.大家知道,玩具陀螺不转动时,在重力矩作用下将发生倾倒.但当陀螺急速旋转时,尽管仍在重力矩作用下,却居然不倒下来.这时,我们看到,陀螺在绕本身对称轴线转动的同时,其对称轴还将绕竖直轴 Oz 回转,如图4-29(a)所示.这种回转现象叫做进动.

初看起来,回转效应有些不可思议.为什么陀螺在重力矩作用

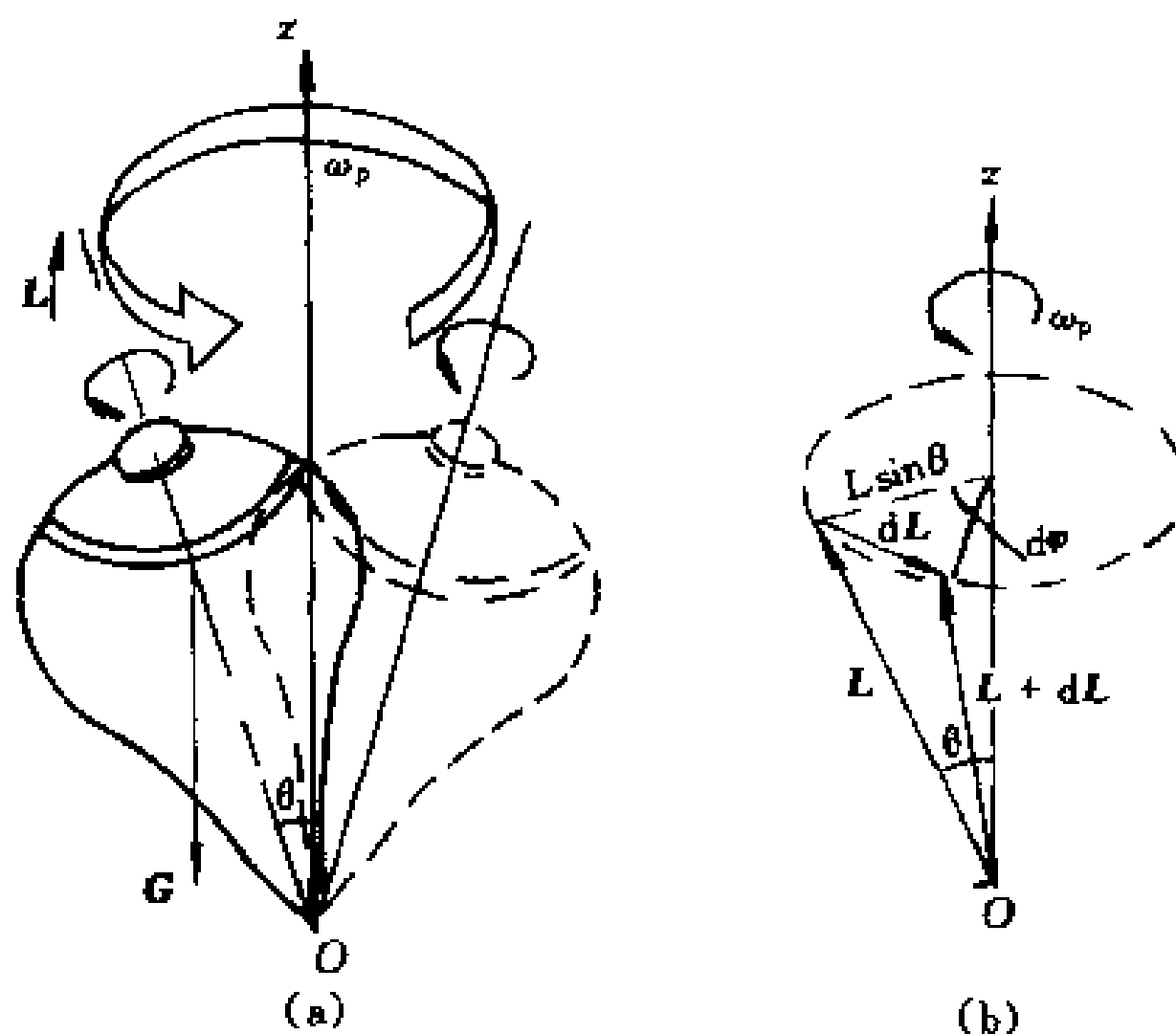


图4-29 陀螺的进动

之下,会不倾倒呢?其实,这不过是机械运动矢量性的一种表现.在平动情况中,我们知道,质点在外力作用下不一定就沿外力方向运动.如果质点原有的运动方向与外力方向不一致,那么,质点最后运动的方向既不是原有的运动方向,也不是外力的方向,实际的运动方向是由上述两个方向共同决定的.在转动中,也有类似情况.本来旋转的物体,在与它的转动方向不同的外力矩作用下,也不是沿外力矩的方向转动,而会出现进动现象.当高速旋转的陀螺在倾斜状态时,因它自转的角速度远大于进动的角速度,我们可把陀螺对 O 点的角动量 L 看作它对本身对称轴的角动量.由于重力对 O 点产生一力矩,其方向垂直于转轴和重力所组成的平面.根据角动量定理,在极短时间 dt 内,陀螺的角动量将增加 dL ,其方向与外力矩的方向相同.因外力矩的方向垂直于 L ,所以 dL 的方向也与 L 垂直,结果使 L 的大小不变而方向发生变化,如图4-29(b)中所示.因此,陀螺的自转轴将从 L 的位置转到 $L + dL$ 的位置上.从陀螺的顶部向下看,其自转轴的回转方向是反时针的.这样,陀螺就

不会倒下,而沿一锥面转动,亦即绕竖直轴 Oz 作进动.

现在,我们计算进动的角速度.在 dt 时间内,角动量 $L(L=J\omega)$ 的增量 dL 是很小的,从图可知,

$$dL = L\sin\theta d\varphi = J\omega\sin\theta d\varphi$$

式中 ω 为陀螺自转的角速度, $d\varphi$ 为自转轴在 dt 时间内绕 Oz 轴转动的角度, θ 为自转轴与 Oz 轴间的夹角.由角动量定理

$$dL = Mdt$$

以此代入上式得

$$Mdt = J\omega\sin\theta d\varphi$$

按定义,进动的角速度应是 $\omega_p = \frac{d\varphi}{dt}$, 所以

$$\omega_p = \frac{M}{J\omega\sin\theta}$$

 (4-20)

由此可知,进动角速度 ω_p 与外力矩成正比,与陀螺自转的角动量成反比.因此,当陀螺自转角速度很大时,进动角速度较小;而在陀螺自转角速度很小时,进动角速度却增大.

回转效应在实践中有广泛的应用.例如,飞行中的子弹或炮弹,将受到空气阻力的作用,阻力的方向是逆着弹道的,而且一般又不作用在子弹或炮弹的质心上,这样,阻力对质心的力矩就可能使弹头翻转.为了保证弹头着地而不翻转,常利用枪膛或炮筒中来复线的作用,使子弹或炮弹绕自己的对称轴迅速旋转.由于回转效应,空气阻力的力矩使子弹或炮弹的自转轴绕弹道方向进动,这样,子弹或炮弹的自转轴就将与弹道方向始终保持不太大的偏离,如图4-30所示,再没有翻转的可能.

但是,任何事物都是一分为二的,回转效应有时也引起有害的作用.例如,在轮船转弯时,由于回转效应,涡轮机的轴承将受到附加的力,这在设计和使用中是必须考虑的.

进动的概念在微观世界中也常用到.例如,原子中的电子同时参与绕核运动与电子本身的自旋,都具有角动量,在外磁场中,电

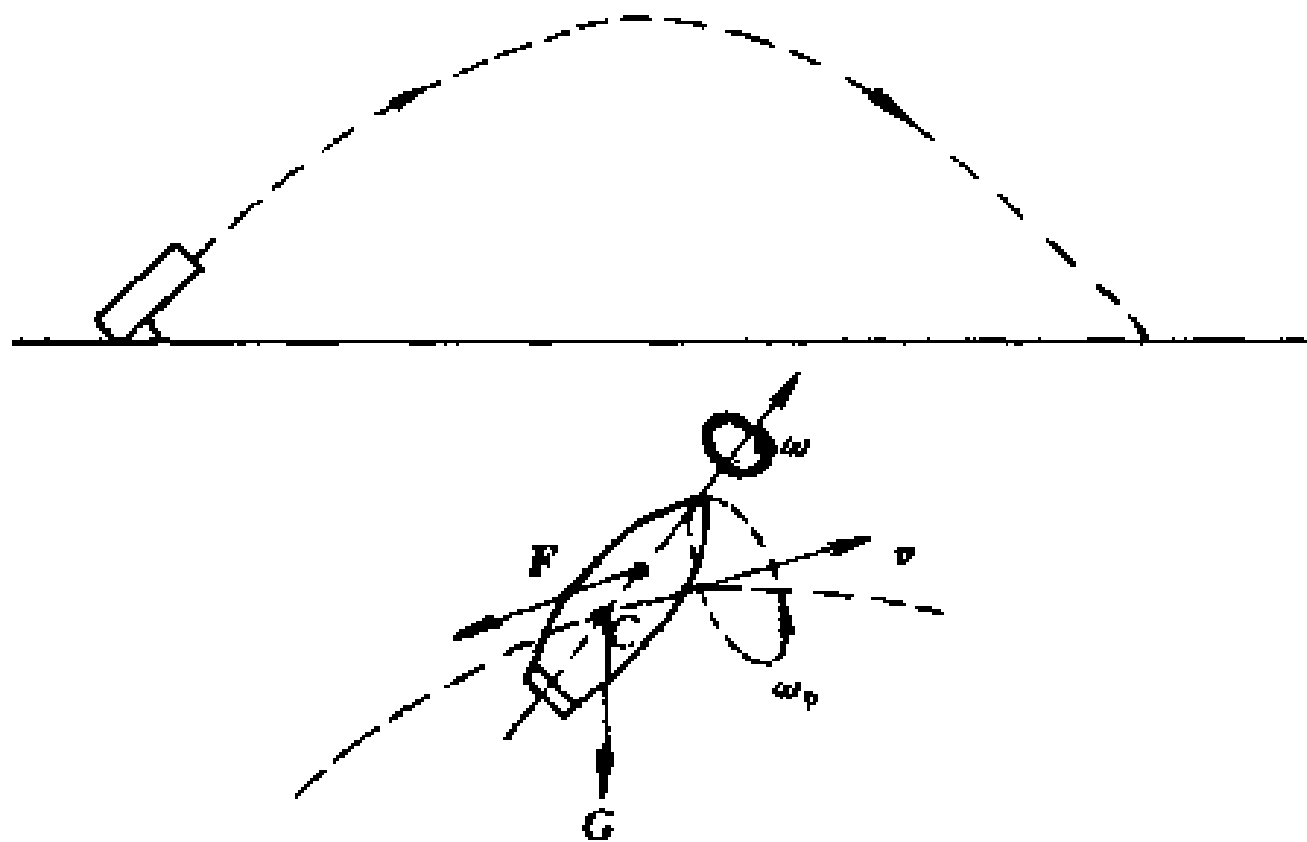


图 4-30

子将以外磁场方向为轴线作进动. 这是从物质的电结构来说明物质磁性的理论依据.

思 考 题

4-1 火车在拐弯时所作运动是不是平动?

4-2 地球自西向东自转, 它的自转角速度矢量指向什么方向? 试作图说明.

4-3 假定一次内部爆炸在地面上开出巨大的洞穴, 它的表面被向外推出. 这对地球绕自身轴的转动和绕太阳的转动有何影响?

4-4 对静止的刚体施以外力作用, 如果合外力为零, 刚体会不会运动?

4-5 如果刚体转动的角速度很大, 那么(1)作用在它上面的力是否一定很大?(2)作用在它上面的力矩是否一定很大?

4-6 为什么在研究刚体转动时, 要研究力矩的作用? 力矩和哪些因素有关?

4-7 试证: 匀质细棒在光滑平面上受到一对大小相等、方向相反的力作用时, 不管力作用在哪里, 它的质心加速度总是零.

4-8 在计算物体的转动惯量时, 能把物体的质量看作集中在质心处吗?

4-9 两个同样大小的轮子, 质量也相同. 一个轮子的质量均匀分布, 另一个轮子的质量主要集中在轮缘. 问:

(1) 如果作用在它们上面的外力矩相同, 哪个轮子转动的角加速度较大?

(2) 如果它们的角加速度相等, 作用在哪个轮子上的力矩较大?

(3) 如果它们的角动量相等, 哪个轮子转得快?

4-10 一个转动着的飞轮, 如不供给它能量, 最终将停下来. 试用转动定律解释这个现象.

4-11 将一个生鸡蛋和一个熟鸡蛋放在桌上使它旋转, 如何判定哪个是生的, 哪个是熟的? 为什么?

4-12 两个同样的小孩, 分别抓住跨过定滑轮绳子的两端, 一个用力往上爬, 另一个不动, 问哪一个先到达滑轮处? 如果小孩重量不相等, 情况又将如何? (滑轮和绳子的质量可以忽略).

习 题

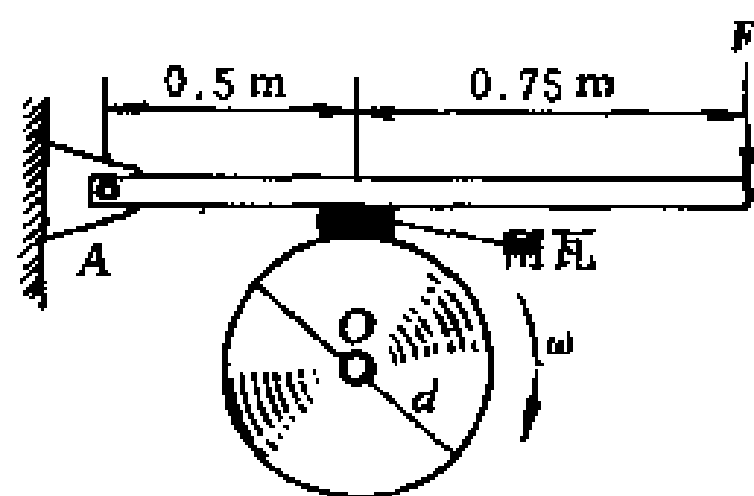
4-1 一飞轮直径为 0.30 m , 质量为 5.00 kg , 边缘绕有绳子, 现用恒力拉绳子的一端, 使其由静止均匀地加速, 经 0.50 s 转速达 10 r/s . 假定飞轮可看作实心圆柱体, 求:

(1) 飞轮的角加速度及在这段时间内转过的转数;

(2) 拉力及拉力所作的功;

(3) 从拉动后 $t=10\text{ s}$ 时飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度.

4-2 飞轮的质量为 60 kg , 直径为 0.50 m , 转速为 1000 r/min , 现要求在 5 s 内使其制动, 求制动力 F . 假定闸瓦与飞轮之间的摩擦系数 $\mu=0.4$, 飞轮的质量全部分布在轮的外周上. 尺寸如图所示.



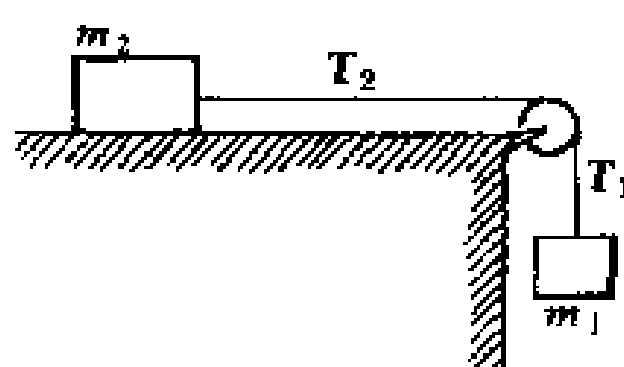
习题4-2图

4-3 如图所示, 两物体1和2的质量分别为 m_1 与 m_2 , 滑轮的转动惯量为 J , 半径为 r .

(1) 如物体2与桌面间的摩擦系数为 μ , 求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 与 T_2 (设绳子与滑轮间无相对滑动);

(2) 如物体2与桌面间为光滑接触, 求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 与 T_2 .

4-4 电动机带动一个转动惯量为 $J = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的系统作定轴转动, 在 0.5 s 内由静止开始最后达到 120 r/min 的转速, 假定在这一过程中转速是均匀增加的, 求电动机对转动系统施加的力矩。

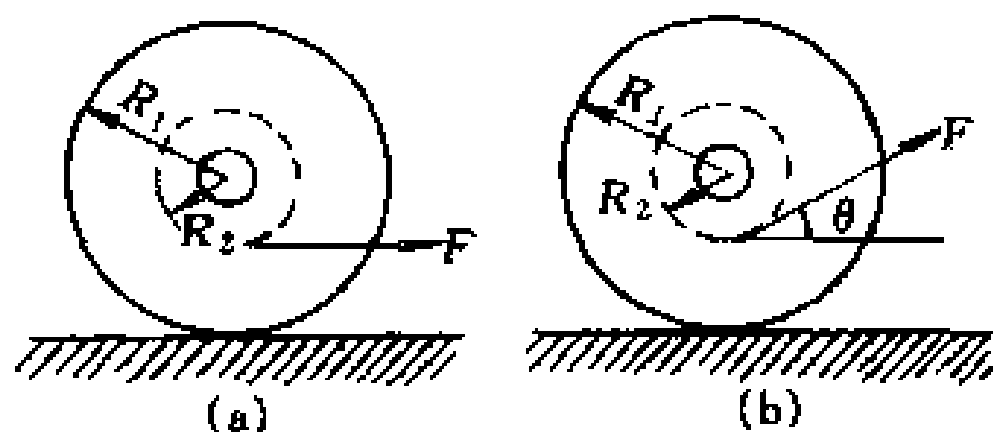


习题4-3图

4-5 求题4-2中制动力矩在制动过程中所作的功。

4-6 某冲床上飞轮的转动惯量为 $4.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 当它的转速达到 30 r/min 时, 它的转动动能是多少? 每冲一次, 其转速降为 10 r/min 转, 求每冲一次飞轮对外所作的功。

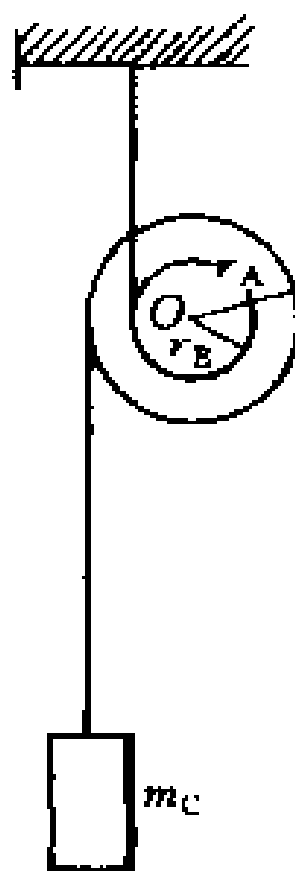
△4-7 绕有电缆的大木轴, 质量为 1000 kg , 绕中心轴 O 的转动惯量为 $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 如图所示: $R_1 = 1.00 \text{ m}$, $R_2 = 0.40 \text{ m}$, 假定大木轴与地面间无相对滑动, 当用 $F = 9800 \text{ N}$ 的水平力拉电缆的一端时, 问:



习题4-7图

- (1) 轮子将怎样运动?
- (2) 轴心 O 的加速度是多大?
- (3) 摩擦力是多大?
- (4) 摩擦系数至少为多大时才能保证无相对滑动?
- (5) 如果力 F 与水平方向夹角为 $\theta \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ [见图(b)], 而仍要使木轴向前加速且与地面无相对滑动, 问 θ 最大不能超过多少?

△4-8 有质量为 m_A 与 m_B 的两圆盘同心地粘在一起, 半径分别为 r_A 与 r_B , 小圆盘边缘绕有绳子, 上端固定在天花板上, 大圆盘边缘也绕有绳子, 下端挂一物体, 质量为 m_C (见图) 试求:

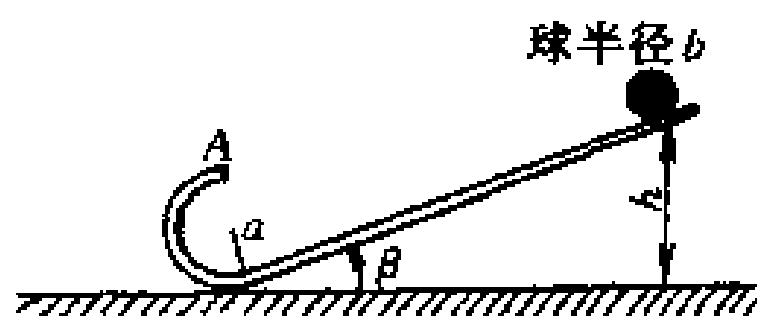


习题4-8图

(1) 要使圆盘向上加速、向下加速、静止或匀速运动的条件;

(2) 在静止情形下, 两段绳子中的张力.

△4-9 密度均匀、半径为 b 、质量为 m 的小球在与水平面的夹角为 β 的斜面上无滑动地滚下并进入一半径为 a 的圆形轨道, 如图所示. 假定小球由高度为 h 的顶部从静止滚下.



习题4-9图

(1) 求小球到达斜面底部时的角速度和质心的速度;

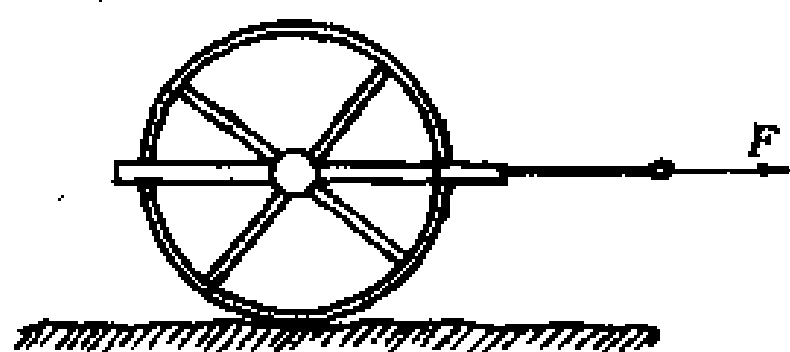
(2) 证明: 如果 $b \ll a$, 要使小球不脱离圆轨道而达到 A 点, 则 h 应满足 $h \geq \frac{27a}{10}$.

4-10 压路机的滚筒可近似地看作一个直径为 D 的圆柱形薄壁圆筒 (如图), 设滚筒的直径 $D=1.50$ m, 质量为 10 t, 如果水平牵引力 F 为 20000 N, 使它在地面上作纯滚动. 求:

(1) 滚筒的角加速度和轴心的加速度;

(2) 摩擦力;

(3) 从静止开始走了 1 m 时, 滚筒的转动动能与平动动能.



习题4-10图

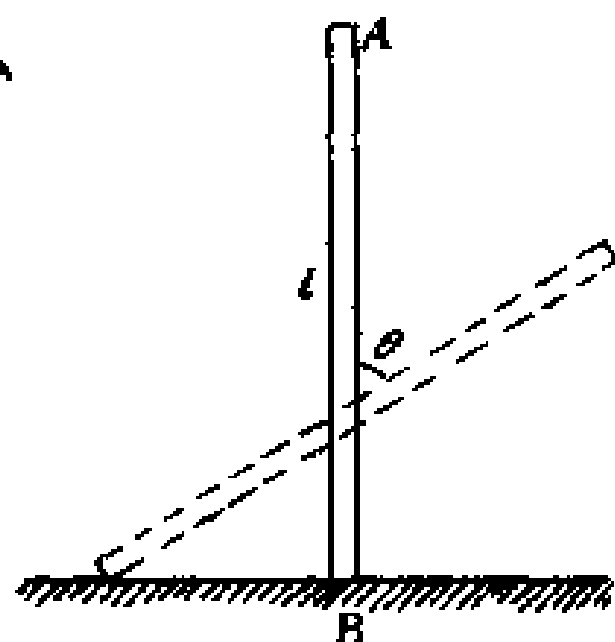
△4-11 长为 l 、质量为 m 的均匀杆, 在光滑桌面上由竖直位置自然倒下, 当夹角为 θ 时 (见图), 求:

(1) 质心的速度;

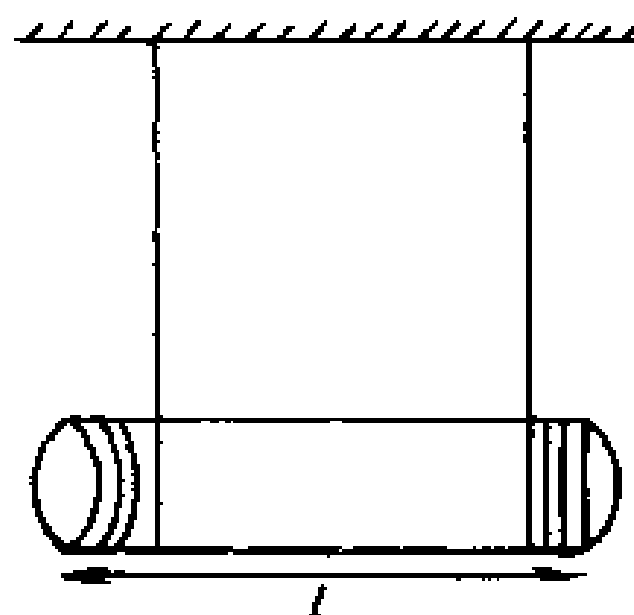
(2) 杆的角速度.

4-12 如图所示,一圆柱体质量为 m , 长为 l , 半径为 R , 用两根轻软的绳子对称地绕在圆柱两端, 两绳的另一端分别系在天花板上. 现将圆柱体从静止释放, 试求:

- (1) 它向下运动的线加速度;
- (2) 向下加速运动时, 两绳的张力.



习题4-11图

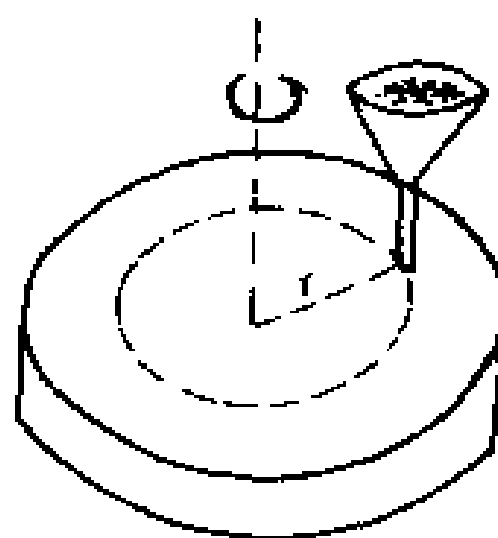


习题4-12图

4-13 在自由旋转的水平圆盘边上, 站一质量为 m 的人. 圆盘的半径为 R , 转动惯量为 J , 角速度为 ω . 如果这人由盘边走到盘心, 求角速度的变化及此系统动能的变化.

4-14 在半径为 R_1 、质量为 m 的静止水平圆盘上, 站一质量为 m 的人. 圆盘可无摩擦地绕通过圆盘中心的竖直轴转动. 当这人开始沿着与圆盘同心, 半径为 $R_2 (< R_1)$ 的圆周匀速地走动时, 设他相对于圆盘的速度为 v , 问圆盘将以多大的角速度旋转?

4-15 如图示, 转台绕中心竖直轴以角速度 ω_0 作匀速转动. 转台对该轴的转动惯量 $J = 5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 现有砂粒以 1 g/s 的速度落到转台, 并粘在台面形成一半径 $r = 0.1 \text{ m}$ 的圆. 试求砂粒落到转台, 使转台角速度变为 $\frac{1}{2}\omega_0$ 所花的时间.



习题4-15图

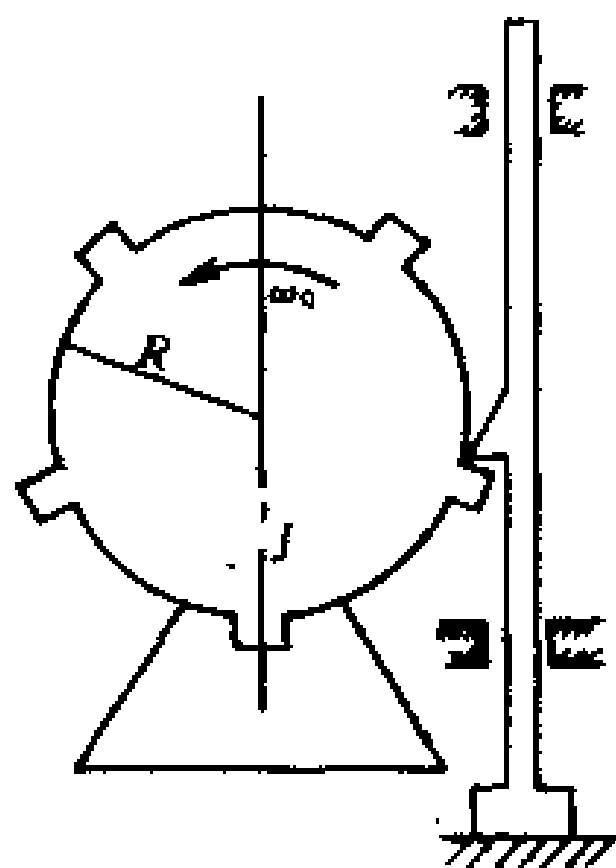
4-16 长为 $2a$ 的匀质棒 AB , 以铰链固定在 A 点, 最初, 用手在 B 点把它放在水平位置静止不动. 当放开 B 端, 棒绕 A 点转到竖直位置时, 去掉铰链, 使它成为自由落体. 在以后的运动中, 它的质心沿抛物线运动, 而棒则绕质心旋转着. 问当它的质心下降距离 h 时, 棒转了几

转?

4-17 在一半径为 R 、质量为 m 的水平圆盘的边上, 站着一个质量为 m' 的人. 这圆盘可绕通过中心的竖直轴转动, 转轴与轴承之间的摩擦阻力可忽略不计. 当人沿盘的边缘走一周回到盘上原有位置时, 这圆盘将转过多大的角度?

4-18 一脉冲星质量为 $1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$, 半径为 20 km . 自转速率为 2.1 r/s , 并且以 $1.0 \times 10^{-15} \text{ r/s}$ 的变化率减慢. 问它的转动动能以多大的变化率减小? 如果这一变化率保持不变, 这个脉冲星经过多长时间就会停止自旋? 设脉冲星可看作匀质球体.

4-19 如图所示的打桩装置, 半径为 R 的带齿轮转盘绕中心轴的转动惯量为 J , 转动角速度为 ω_0 , 夯锤的质量为 M , 开始处于静止状态, 当转盘与夯锤碰撞后, 问夯锤的速度能有多大?

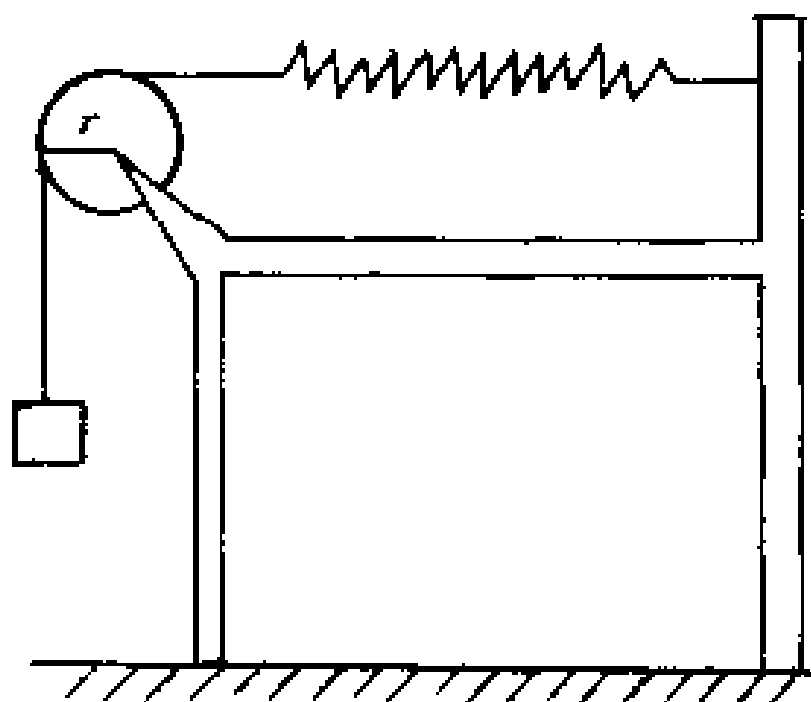


习题4-19图

4-20 一个人站在一竹筏的一端用力向垂直于筏身方向水平跳出去. 筏由于受到反冲作用就要旋转起来. 假定人的质量为 $m = 60 \text{ kg}$, 筏的质量 $M = 500 \text{ kg}$, 人相对于岸的起跳速度为 3 m/s . 求竹筏所获得的角速度 (假定竹筏的转动惯量近似地可以用细杆的公式来计算, 水的摩擦可以忽略不计). 筏长 10 m .

4-21 两滑冰运动员, 质量分别为 $M_A = 60 \text{ kg}$, $M_B = 70 \text{ kg}$, 它们的速率 $V_A = 7 \text{ m/s}$, $V_B = 6 \text{ m/s}$, 在相距 1.5 m 的两平行线上相向而行, 当两者最接近时, 便拉起手来, 开始绕质心作圆周运动并保持两者间的距离为 1.5 m . 求该瞬时:

- (1) 系统的总角动量;
- (2) 系统的角速度;
- (3) 两人拉手前、后的总动能. 这一过程中能量是否守恒, 为什么?

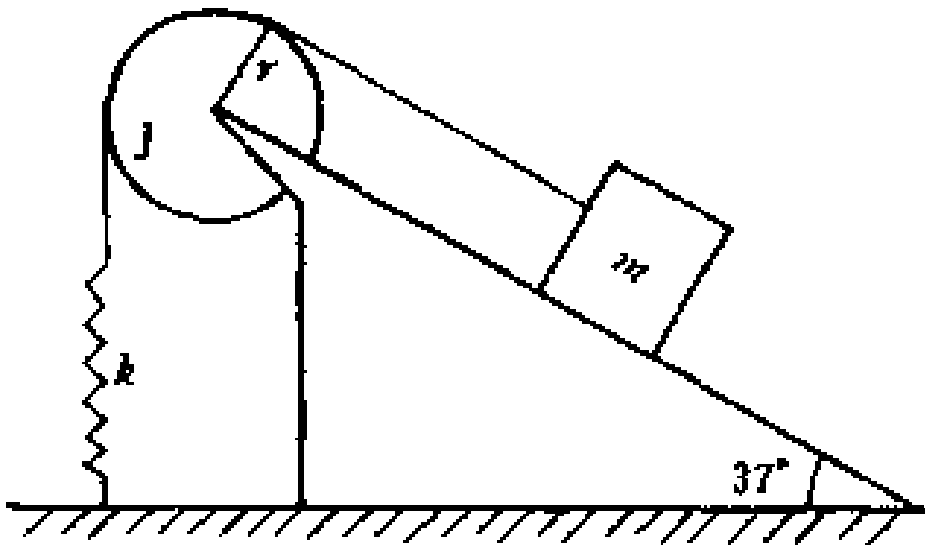


习题4-22图

4-22 如图, 弹簧的劲度系数 $k = 2.0 \text{ N/m}$, 轮子的转动惯量为 $0.5 \text{ kg} \cdot$

m^2 , 轮子半径 $r=30\text{ cm}$. 当质量为 60 kg 的物体落下 40 cm 时的速率是多大? 假设开始时物体静止而弹簧无伸长.

4-23 如图, 滑轮的转动惯量 $J=0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 半径 $r=30\text{ cm}$, 弹簧的劲度系数 $k=2.0\text{ N/m}$, 重物的质量 $m=2.0\text{ kg}$. 当此滑轮-重物系统从静止开始启动, 开始时弹簧没有伸长. 如摩擦可忽略, 问物体能沿斜面滑下多远?

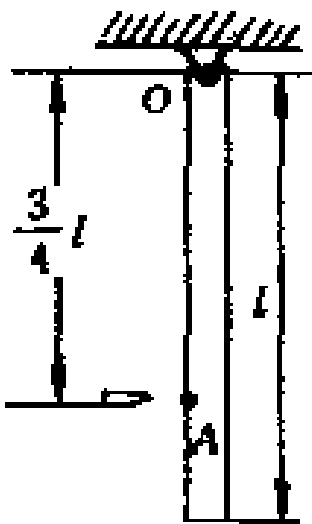


习题4-23图

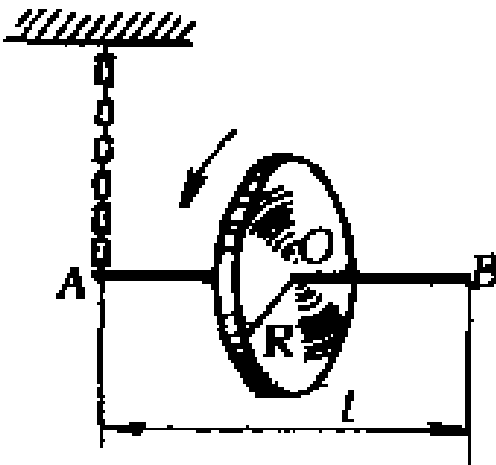
4-24 在上题中, 当物体沿斜面滑下 1.00 m 时, 它的速率有多大?

4-25 一长 $l=0.40\text{ m}$ 的均匀木棒, 质量 $M=1.00\text{ kg}$, 可绕水平轴 O 在竖直平面内转动, 开始时棒自然地竖直悬垂. 现有质量 $m=8\text{ g}$ 的子弹以 $v=200\text{ m/s}$ 的速率从 A 点射入棒中, 假定 A 点与 O 点的距离为 $\frac{3}{4}l$, 如图. 求:

- (1) 棒开始运动时的角速度;
- (2) 棒的最大偏转角.



习题4-25图



习题4-26图

4-26 半径 R 为 30 cm 的轮子, 装在一根长 l 为 40 cm 的轴的中部, 并可绕其转动, 轮和轴的质量共 5 kg , 系统的回转半径为 25 cm , 轴的一端 A 用一根链条挂起, 如果原来轴在水平位置, 并使轮子以 $\omega_0=12\text{ rad/s}$ 的角速度旋

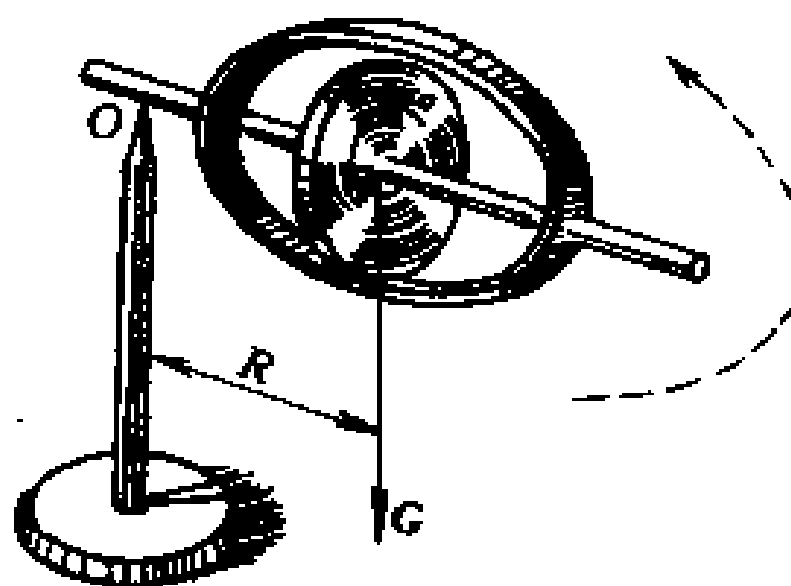
转,方向如图所示,求:

- (1) 该轮自转的角动量;
- (2) 作用于轴上的外力矩;
- (3) 系统的进动角速度,并判断进动方向.

4-27 为稳定船身而装在船上的一种陀螺仪,其质量为50 t,回转半径为2 m,以900 r/min 的转速绕竖直轴旋转,问:

- (1) 如用736 kW 的输入功率使其从静止开始转动,要经多长时间才能达到这个稳定转速?
- (2) 要加多大力矩才可使它在船的竖直纵断面内产生 $1^\circ/\text{s}$ 的进动角速度?

4-28 在如图所示的回转仪中,转盘的质量为0.15 kg,绕其轴线的转动惯量为 $1.50 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,架子的质量为0.03 kg.由转盘与架子组成的系统被支持在一个支柱的尖端O,尖端O到转盘中心的距离为0.04 m,当转盘以一定角速度 ω 绕其轴旋转时,它便在水平面内以 $1/6 \text{ r/s}$ 的转速进动.



习题4-28图

- (1) 求尖端对支架的作用力.
- (2) 求转盘自转的角速度.
- (3) 画出自转角动量矢量、进动角速度矢量和架子转盘系统所受到的力矩矢量图.

第五章 相对论基础

我们在前几章讨论了以牛顿运动定律为基础的经典力学,它是宏观物体在低速(即远小于光速 c)范围内运动规律的总结.经典力学认为,在所有的惯性参考系中,时间和空间的量度是绝对的,它们不随进行量度的参考系而变化.这种看法并没有加以论证,被认为是理所当然,不证自明的.19世纪末,电磁场理论的出现,统一了过去对电、磁和光的认识.于是人们发现,当物体的运动速度接近光速时,上述时空绝对量度的假定就不再成立.所以经典力学只是在低速范围内近似地正确,对于高速运动问题必须建立新的力学,这就是爱因斯坦(A. Einstein)建立的相对论力学.相对论力学既适用于低速运动,又适用于高速运动的情况,当物体作低速运动时,相对论力学就过渡为经典力学.

相对论是20世纪初物理学取得的两个最伟大成就之一,另一个是普朗克的能量子假设.相对论是在研究传播电磁场的介质——以太的存在问题时产生的,但是相对论的成就,远远地超出了电磁场理论的范围,它给出了高速物体的力学规律,并从根本上改变了许多世纪以来所形成的有关时间、空间和运动的陈旧概念,建立了新的时空观,揭露了质量和能量的内在联系,开始了有关万有引力本质的探索.尽管它的一些概念与结论和人们的日常经验大相径庭,但它已被大量实验证明是正确的理论.现在,相对论已经成为现代物理学以及现代工程技术不可缺少的理论基础.在本章中,我们只对相对论作极其简要的介绍.

§ 5-1 伽利略相对性原理 经典力学的时空观

1. 伽利略相对性原理

为了描述物体的机械运动,我们需要选择适当的参考系.实验表明,在有些参考系中,牛顿运动定律是适用的,而在另一些参考系中,牛顿运动定律却并不适用.我们在第二章中指出,凡是适用牛顿运动定律的参考系叫做惯性系,而不适用牛顿运动定律的参考系则叫做非惯性系.一个参考系是不是惯性系,只能根据实验观测来加以判断^①.设想我们已经找到一个惯性系,在这个惯性系内,有一个所受合外力等于零的物体,相对于这个惯性系是静止的.现在,另有一个参考系,它相对于前一个惯性系作匀速直线运动,则在后一个参考系内的观察者看来,该物体所受合外力仍等于零,不过相对于自己在作匀速直线运动.这两种说法虽然不同,但都和牛顿运动定律相符合.因此,相对于惯性系作匀速直线运动的参考系也是一个惯性系.于是,我们的结论是:如惯性系存在的话,就不只是一个,而是有无数个,一切相对于惯性系作匀速直线运动的参考系也都是惯性系,在这些惯性系内,所有力学现象都符合牛顿运动定律.

早在1632年,伽利略曾在封闭的船舱里仔细地观察了力学现象,发现在船舱中觉察不到物体的运动规律和地面上有任何不同.他写道:“在这里(只要船的运动是等速的),你在一切现象中观察不出丝毫的改变,你也不能够根据任何现象来判断船究竟是在运动还是停止.当你在地板上跳跃的时候,你所通过的距离和你一条静止的船上跳跃时所通过的距离完全相同,也就是说,你向船尾跳时并不比你向船头跳时——由于船的迅速运动——跳得更远

^① 参看第二章 § 2-1 中有关“惯性参考系”的内容.

些,虽然当你跳在空中时,在你下面的地板是在向着和你跳跃相反的方向奔驰着.当你抛一件东西给你的朋友时,如果你的朋友在船头而你在船尾时,你所费的力并不比你们俩站在相反的位置时所费的力更大.从挂在天花板下的装着水的酒杯里滴下的水滴,将竖直地落在地板上,没有任何一滴水偏向船尾方面滴落,虽然当水滴尚在空中时,船在向前走”^①.这里,伽利略所描述的种种现象正是指明了:一切彼此作匀速直线运动的惯性系,对于描写机械运动的力学规律来说是完全等价的.并不存在任何一个比其它惯性系更为优越的惯性系.与之相应,在一个惯性系的内部所作的任何力学的实验都不能够确定这一惯性系本身是在静止状态,还是在作匀速直线运动.这个原理叫做力学的相对性原理,或伽利略相对性原理.我们可以假定其中的任一个惯性系是静止的,从而相对于这个静止的惯性系来决定其它惯性系的速度.至于要确切知道某一个惯性系本身是否“绝对静止”,则用任何力学实验都不可能办到.因此,人们曾指望从电学的、光学的或其他实验来解决这个悬案.所有这些探索及其失败导致了狭义相对论的建立.

2. 经典力学的时空观

在经典力学中,伽利略相对性原理是和牛顿运动定律、经典力学时空观交织在一起的.我们在第一章中,从伽利略坐标变换出发,证明了质点的加速度对于相对作匀速运动的不同惯性系 K 与 K' 来说是个绝对量.设质点在 K 系中的加速度是 a ,在 K' 系中的加速度是 a' ,那么,我们有

$$a = a'$$

在经典力学中,物体的质量 m 又被认为是不变的,据此,牛顿运动定律在这两个惯性系中的形式也就成为相同的了.我们用 F 与 F' 分别表示质点在 K 系与 K' 系中所受的力.实验证明,在牛顿定律

^① 参看伽利略:《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》.

成立的领域内,力也是和参考系无关的,即 $F' = F$,因 $ma' = ma$,所以 $F' = ma'$. 这样,伽利略相对性原理就可用数学形式表示为

$$F = ma \qquad F' = ma'$$

这就是说,伽利略相对性原理的另一叙述法是,牛顿第二定律的方程相对于伽利略坐标变换来说是不变的.

我们曾经说过,伽利略坐标变换的核心思想是经典力学中的绝对时空观. 经典力学认为物体的运动虽在时间和空间中进行,但是时间和空间的性质与物质的运动彼此没有任何联系. 牛顿说:“绝对的、真正的和数学的时间自己流逝着,并由于它的本性而均匀地、与任一外界对象无关地流逝着.”“绝对空间,就其本性而言,与外界任何事物无关,而永是相同的和不动的.”^①这是牛顿当时的认识. 这种把物质和运动完全脱离的“绝对时间”和“绝对空间”的观点是把低速范围内总结出来的结论绝对化的结果. 在日常生活中,由于实践范围的局限性,大量接触到的是低速运动的物体,我们会不自觉地接受和采纳这种观点,觉得绝对的孤立的时空是理所当然的,似乎是无可置疑的. 其实,这是传统的经验束缚了人们的思想,当我们接触了物体的高速运动,这时发现伽利略变换不再适用,牛顿力学也应该加以改造;而伽利略的相对性原理与牛顿力学的相符合,则应理解为是在低速条件下的符合.

§ 5-2 狭义相对论基本原理 洛伦兹坐标变换式

1. 狭义相对论基本原理

19世纪末,在光的电磁理论的发展过程中,有人认为宇宙间充满一种叫做“以太”的介质,光是靠以太来传播的,而且把这种“以太”选作绝对静止的参考系,凡是相对于这个绝对参考系的运动叫

① 参看牛顿的名著:《自然哲学的数学原理》.

做绝对运动,以区别于对其他参考系的相对运动.经典电磁学理论只有在相对于以太为静止的惯性系中才成立.根据这个观点,当时物理学家设计了各种实验去寻找以太参考系.其中,1887年迈克耳孙(A. A. Michelson)和莫雷(E. W. Morley)的实验特别有名.根据他们的设想,如果存在以太,而且以太又完全不为地球运动所带动,那么地球对于以太的运动速度就是地球的绝对速度.利用地球的绝对运动的速度和光速在方向上的不同,应该在所设计的迈克耳孙干涉仪实验中得到某种预期的结果,从而求得地球相对于以太的绝对速度.迈克耳孙的实验装置如图5-1所示,它的两臂 CM

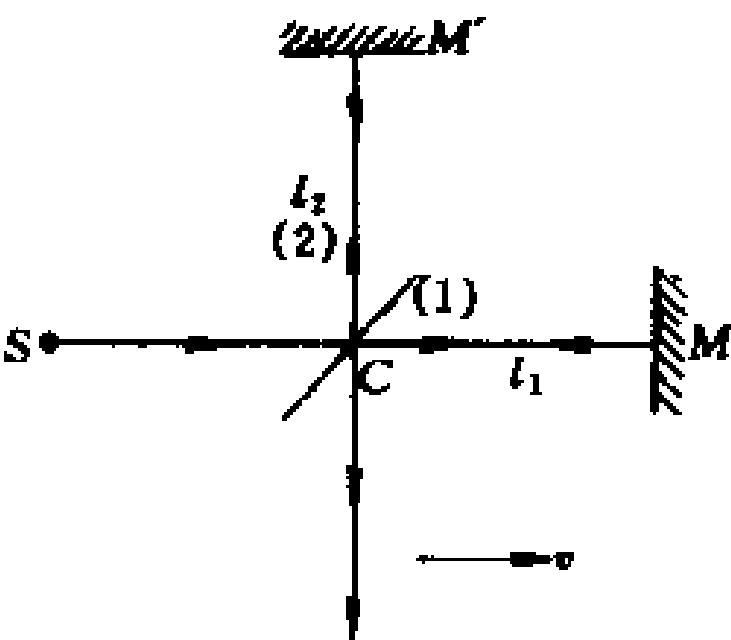


图5-1 迈克耳孙-莫雷实验示意图

和 CM' 长度相等, $l_1=l_2$, 且相互垂直. 来自光源 S 的光, 被半涂银的镜子 C 分成两束相干光(1)和(2). 光束(1)经臂长 l_1 到 M 镜, 反射后回到 C ; 光束(2)则经臂长 l_2 到 M' 镜, 反射后也回到 C . 设图中 v 是地球的绝对速度. 按经典力学对空观来看, 由于光束(1)和(2)相对于地球的速度各不相同, 所以它们虽然行经相等的臂长, 但所需的时间是不一样的, 这种时间上的相差将在干涉仪中看到某种干涉条纹. 如果再把仪器旋转 90° , 使光束(1)和(2)相对于地球的速度发生变化, 这样, 它们通过两臂的时间差也随之发生变化, 按光波的干涉原理来说, 其结果必然引起干涉条纹的相应的移动.

但是迈克耳孙和莫雷在不同地理条件、不同季节条件下多次进行实验, 却始终看不到干涉条纹的移动. 值得深思的是, 原本为

验证以太参考系而进行的实验,却提出了否定以太参考系的证据.狭义相对论正是在这种条件下破土而出的.

1905年,爱因斯坦扬弃了以太假说和绝对参考系的想法,在前人各种实验的基础上,另辟蹊径,提出下述两条假设,作为狭义相对论的两条基本原理:

(1) 相对性原理 物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的数学表达形式,也就是说,所有惯性系对于描述物理现象都是等价的.不难看出,狭义相对论的相对性原理不同于伽利略相对性原理,它是伽利略相对性原理的推广.伽利略相对性原理说明了一切惯性系对力学规律的等价性,而狭义相对论的相对性原理却把这种等价性推广到包括力学定律和电磁学定律在内的一切自然规律上去.于是,“以太”假说就是不必要的了.

(2) 光速不变原理 在彼此相对作匀速直线运动的任一惯性参考系中,所测得的光在真空中的传播速度都是相等的.这个原理说明真空中的光速是个恒量,它和惯性参考系的运动状态没有关系.初看起来,光速不变原理似乎和常识相矛盾,它直接否定了伽利略变换.按照伽利略变换,光速是与观察者和光源之间的相对运动有关的.实践是检验真理的标准,人们在天文观察和近代物理实验中找到了光速不变原理的有力证据.1964年到1966年,欧洲核子中心(CERN)在质子同步加速器中作了有关光速的精密实验测量,直接验证了光速不变原理.实验的结果是,在同步加速器中产生的 π^0 介子以 $0.99975c$ 的高速飞行,它在飞行中发生衰变,辐射出能量为 $6 \times 10^9 \text{ eV}$ 的光子,测得光子的实验室速度值仍是 c .

在狭义相对论中,爱因斯坦根据狭义相对论的两条基本原理,建立了新的坐标变换公式,即所谓洛伦兹(H. A. Lorentz)坐标变换式,用以代替伽利略坐标变换式.为什么这种新的时空坐标变换关系以洛伦兹命名呢?原来,它最初是由洛伦兹为弥合经典理论中所暴露的缺陷而建立起来的.洛伦兹是一位非常受人尊敬的理论物理学家,是经典电子论的创始人.当时,他并不具有相对论的思

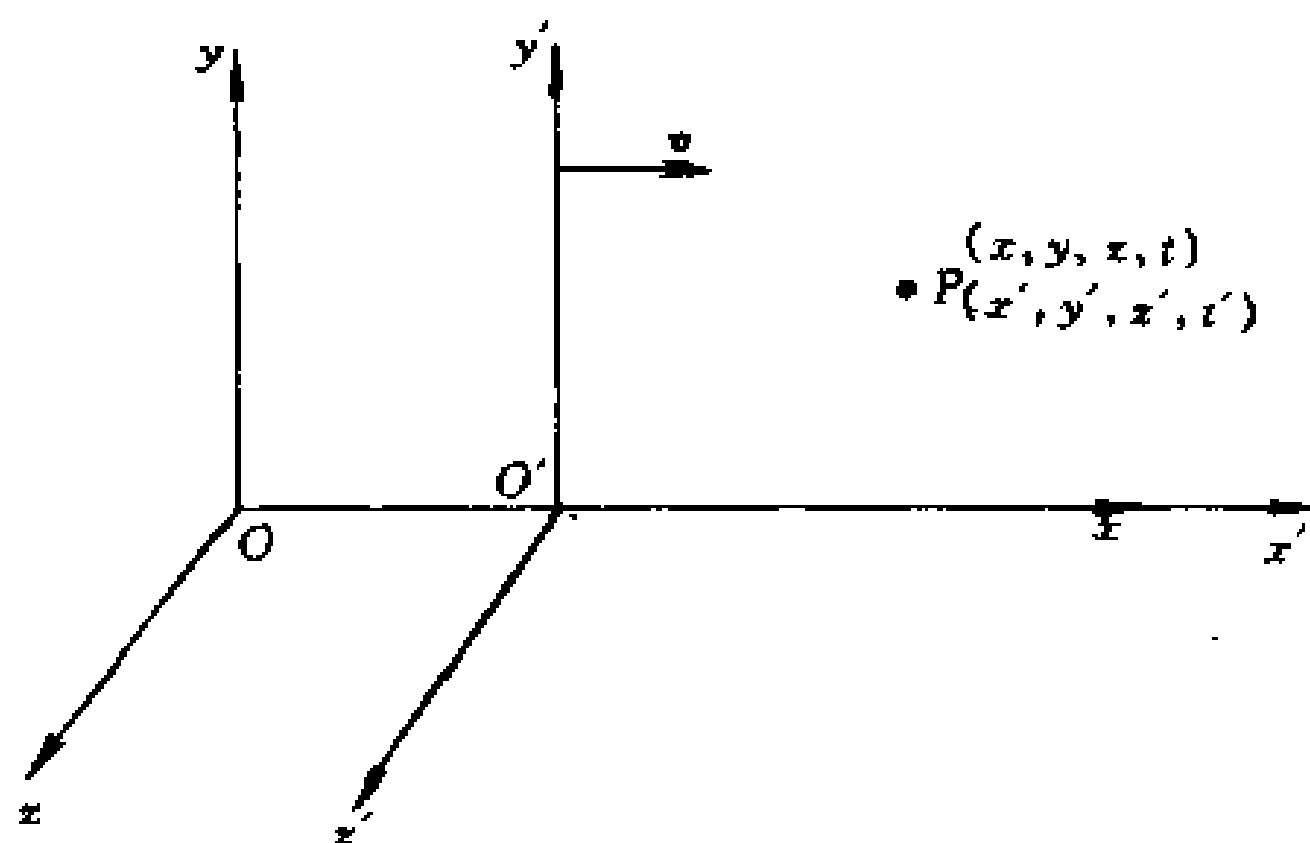


图5-2 洛伦兹坐标变换

想,对时空的观点并不正确,而爱因斯坦则是给予正确解释的第一人.

如图5-2所示,坐标系 $K'(O'x'y'z')$ 以速度 v 相对于坐标系 $K(Oxyz)$ 作匀速直线运动;三对坐标轴分别平行, v 沿 x 轴正方向,并设 x 轴与 x' 轴重合,且当 $t' = t = 0$ 时原点 O' 与 O 重合. 设 P 为被观察的某一事件,在 K 系中的观察者看来,它是在 t 时刻发生在 (x, y, z) 处的,而在 K' 系中的观察者看来,它却是在 t' 时刻发生在 (x', y', z') 处的. 这样,表示同一事件的时空坐标 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') 之间所遵从的洛伦兹变换关系就是

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

和

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\end{aligned}\quad (5-2)$$

在洛伦兹变换中,不仅 x' 是 x, t 的函数,而且 t' 也是 x, t 的函数,并且还都与两个惯性系之间的相对速度 v 有关,这样,洛伦兹变换就集中地反映了相对论关于时间、空间和物质运动三者紧密联系的新观念.在牛顿力学中,时间、空间和物质运动三者都是相互独立、彼此无关的.

当 $v \ll c$ 时,即比值

$$\beta = \frac{v}{c}$$

很小时,洛伦兹变换就转化为伽利略变换,这正说明洛伦兹变换是对高速运动与低速运动都成立的变换,它包括了伽利略变换.因此,相对论并没有把经典力学“推翻”,而只是限制了它的适用范围.从式(5-1)还可看出,当 $v > c$ 时,洛伦兹变换就失去意义,所以相对论还指出物体的速度不能超过真空中的光速.现代物理实验中的例子都说明,高能粒子的速度是以 c 为极限的.

2. 洛伦兹坐标变换式的推导

为了推导洛伦兹坐标变换,我们仍采用图5-2中的 K 和 K' 两个惯性坐标系.在式(5-1)或(5-2)中, $y = y'$ 和 $z = z'$ 是容易理解

的. 现在主要证明 x 和 t 的变换式.

在推导洛伦兹变换之前, 作为一条公设, 我们认为时间和空间都是均匀的, 因此, 它们之间的变换关系必须是线性关系. 如果方程式不是线性的, 那么, 对两个特定事件的空间间隔与时间间隔的测量结果就会与该间隔在坐标系中的位置与时间发生关系, 从而破坏了时空的均匀性. 例如, 设 x' 与 x 的平方有关, 即 $x' = ax^2$, 于是两个点在 K' 系中的距离和它们在 K 系中的坐标之间的关系将由 $x'_2 - x'_1 = a(x_2^2 - x_1^2)$ 表示. 现在我们设 K 系中有一单位长度的棒, 其端点落在 $x_2 = 2\text{ m}$ 和 $x_1 = 1\text{ m}$ 处, 则 $x'_2 - x'_1 = 3a\text{ m}$. 这同一根棒, 其端点落在 $x_2 = 5\text{ m}$ 和 $x_1 = 4\text{ m}$ 处, 则我们将得到 $x'_2 - x'_1 = 9a\text{ m}$. 这样, 对同一棒的测量结果将随棒在空间位置的不同而不同. 为了不使我们的时空坐标系原点的选择与其他点相比较有某种物理上的特殊性, 变换式必须是线性的. 此外, 还要求这个变换能在 $\beta \rightarrow 0$ 时转化为伽利略变换. 据此, 我们参考伽利略变换

$$\begin{aligned}x &= x' + vt' \\x' &= x - vt\end{aligned}$$

而写出如下变换:

$$\begin{aligned}x &= k(x' + vt') \\x' &= k'(x - vt)\end{aligned}\tag{1}$$

根据狭义相对论的相对性原理, K 和 K' 是等价的, 上面两个等式的形式就应该相同(除正负符号外), 所以两式中的比例常数 k 和 k' 应该相等, 即有

$$k = k'$$

这样

$$x' = k(x - vt)\tag{2}$$

为了获得确定的变换法则, 必须求出常数 k . 根据光速不变原理, 假设光信号在 O 与 O' 重合的瞬时 ($t = t' = 0$) 就由重合点沿 Ox

轴前进,那么在任一瞬时 t (由坐标系 K' 量度则是 t'),光信号到达点的坐标对两个坐标系来说,分别是

$$x = ct, \quad x' = ct' \quad (3)$$

把式(1)和式(2)相乘,再把式(3)代入,得

$$xx' = k^2(x - vt)(x' + vt')$$

$$c^2 tt' = k^2 tt' (c - v)(c + v)$$

由此求得

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

k 值求得后,(1)、(2)两式即可写成

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

从这两个式子中消去 x' 或 x ,便得到关于时间的变换式.消去 x' 得

$$x \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + vt'$$

由此求得 t' 如下:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

同样,消去 x 后求得 t 如下:

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

例题5-1 甲乙两人所乘飞行器沿 x 轴作相对运动. 甲测得两个事件的时空坐标为 $x_1 = 6 \times 10^4 \text{ m}$, $y_1 = z_1 = 0$, $t_1 = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$; $x_2 = 12 \times 10^4 \text{ m}$, $y_2 = z_2 = 0$, $t_2 = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$, 如果乙测得这两个事件同时发生于 t' 时刻, 问:

(1) 乙对于甲的运动速度是多少?

(2) 乙所测得的两个事件的空间间隔是多少?

解 (1) 设乙对于甲的运动速度为 v . 由洛伦兹变换

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

可知乙所测得的这两个事件的时间间隔应为

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

按题意, $t'_2 - t'_1 = 0$, 代入已知数据, 有

$$0 = \frac{(1 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-4}) - \frac{v}{c^2}(12 \times 10^4 - 6 \times 10^4)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由此解得

$$v = -\frac{c}{2}$$

(2) 由洛伦兹变换

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x - vt)$$

可知乙所测得的这两个事件的空间间隔为

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{(12 \times 10^4 - 6 \times 10^4) - (-1.5 \times 10^8) \times (1 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-4})}{\sqrt{1 - 0.5^2}} \text{ m} \end{aligned}$$

$$= 5.20 \times 10^4 \text{ m}$$

§ 5-3 相对论速度变换公式

在第一章中, 我们曾根据伽利略变换导出了速度变换公式. 与之相似, 现在我们将根据洛伦兹坐标变换导出相对论速度变换公式.

因为在 K 系中的速度表达式为

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

在 K' 系中的速度表达式为

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

从式(5-1)可得

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(dx - vdt)$$

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

因此

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \\ &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \end{aligned} \quad (5-3a)$$

同样可导出

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \quad (5-3b)$$

$$u'_x = \frac{u_x \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (5-3c)$$

其逆变换式为

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \end{aligned} \quad (5-4)$$

从相对论速度变换公式,可以得出如下结论:

(1) 当速度 u, v 远小于光速 c 时,相对论速度变换就转化为伽利略速度变换式 $u' = u - v$. 这表明在一般低速情况中,伽利略速度变换仍是适用的,只有当 u, v 接近于光速时,才需使用相对论速度变换.

(2) 设想从 K' 系的坐标原点 O' 沿 x' 方向发射一光信号,在 K' 系中观察者测得光速 $u' = c$. 在 K 系中的观察者,按相对论速度变换公式,算得该光信号的速度为

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = c$$

可见光信号对 K 系和 K' 系的速度都是 c . 由于 v 是任意的,因而在任一惯性系中光速都是 c ,即使 $v=c$ 的极端情况,光速仍为 c . 这就说明相对论速度变换遵从光速不变原理. 考虑到光速不变原理是相对论的一个基本出发点,这样的结论就本在意料之中,不足为奇.

例5-2 在地面上测到有两个飞船 a、b 分别以 $+0.9c$ 和 $-0.9c$ 的速度沿相反方向飞行,如图5-3所示.求飞船 a 相对于飞船 b 的速度有多大.

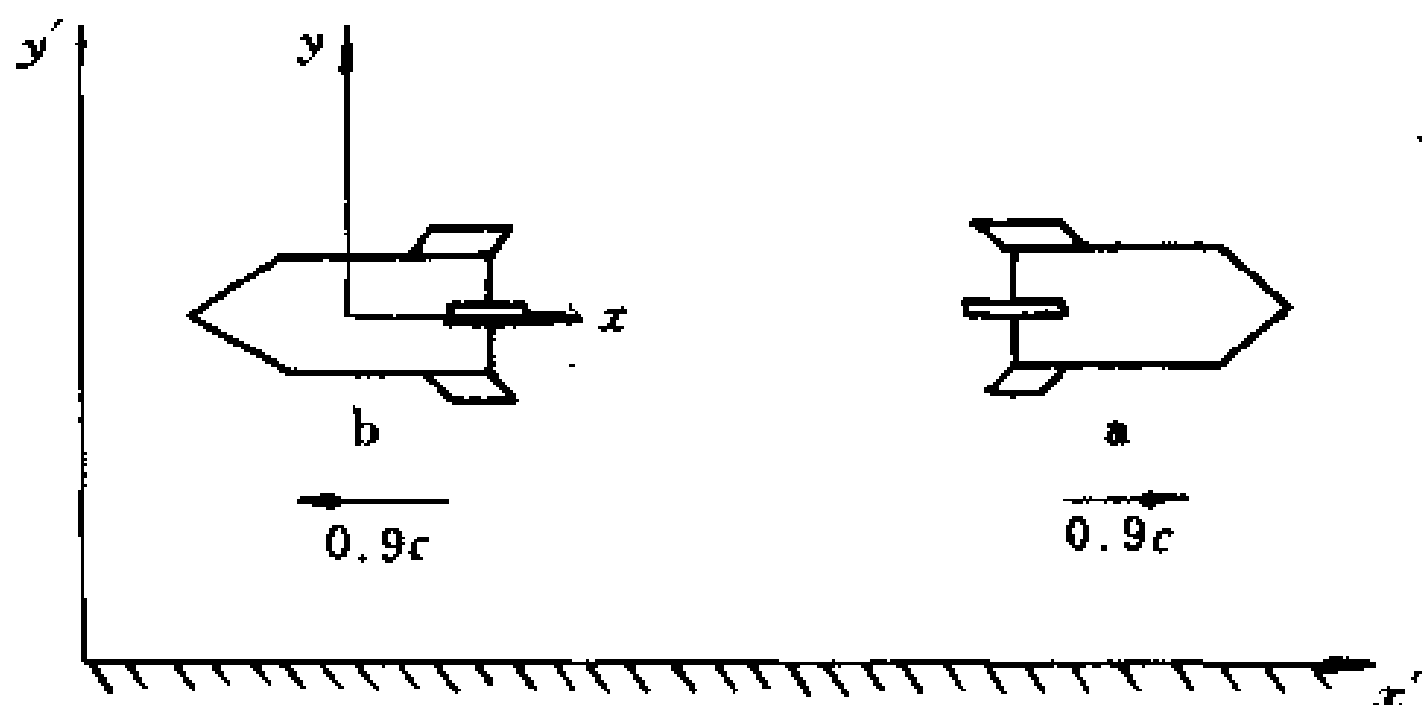


图5-3 两飞船的相对运动

解 设 K 系被固定在飞船 b 上,则飞船 b 在其中为静止,而地面对此参考系以 $v=0.9c$ 的速度运动.以地面为参考系 K' ,则飞船 a 相对于 K' 系的速度按题意为 $u'_x=0.9c$.将这些数值代入式(5-4),即可求得飞船 a 对 K 系的速度,亦即相对于飞船 b 的速度:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} = \frac{1.80c}{1.81} = 0.994c$$

如用伽利略速度变换进行计算,结果为

$$u_x = u'_x + v = 0.9c + 0.9c = 1.8c > c$$

两者大相径庭.相对论给出 $u_x < c$.一般地说,按相对论速度变换,在 v 和 u' 都小于 c 的情况下, u 不可能大于 c .

最后简单介绍一下相对论加速度变换关系.为简便起见,考虑物体沿 x 方向运动.我们用 $a' = \frac{du'}{dt'}$ 、 $a = \frac{du}{dt}$ 分别表示它在 K' 系和 K 系中的加速度.利用速度变换式(5-3)对时间求导,得

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{du}{dt} \frac{1 - \beta^2}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)^2}$$

又由时间变换式求得

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

对上列二式整理之,即得加速度的变换关系:

$$a' = a \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)^3} \quad (5-5)$$

按照相对性原理的要求,物理定律在 K 系和 K' 系中是相同的.显然,由式(5-5)确定的加速度变换关系很难使经典力学中的牛顿第二定律 $F=ma$ 继续保持其有效性.

§ 5-4 狭义相对论时空观

狭义相对论为人们提出一种不同于经典力学的新的时空观.按照经典力学,相对于一个惯性系来说,在不同地点、同时发生的两个事件,相对于另一个与之作相对运动的惯性系来说,也是同时发生的.但相对论指出,同时性问题是相对的,不是绝对的.在某个惯性系中在不同地点同时发生的两个事件,到了另一个惯性系中,就不一定是同时的了.经典力学认为时空的量度不因惯性系的选择而变,也就是说,时空的量度是绝对的.相对论认为时空的量度也是相对的,不是绝对的,它们将因惯性系的选择而有所不同.所有这一切都是狭义相对论时空观的具体反映.现在,将这些内容分别介绍如下.

1. “同时”的相对性

爱因斯坦认为:凡是与时间有关的一切判断,总是和“同时”这

个概念相联系的. 比如我们说:“某列火车7点钟到达这里”,其意思指的是“我的表的短针指在‘7’上和火车到达是同时的事件”. 如果从相对论基本假设出发,可以证明在某个惯性系中同时发生的两个事件,在另一相对它运动的惯性系中,并不一定同时发生. 这一结论叫做同时的相对性.

现在,让我们考察图5-4中的一个假想实验. 在一辆匀速前进的列车(K' 系)上,车头和车尾分别装有两个标记 A' 和 B' ,当它们分别和地面(K 系)上的两个标记 A 和 B 重合时,各自发出一个闪光. 在 AB 的中点 C 与 $A'B'$ 的中点 C' 分别装有接收光信号的仪

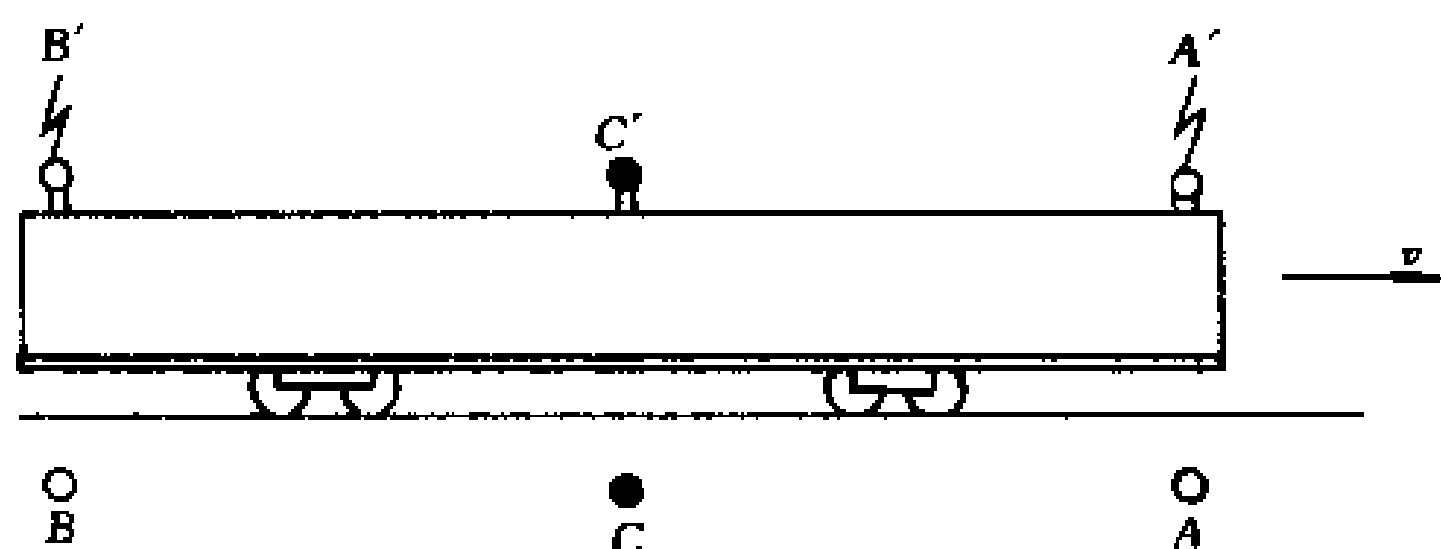


图5-4 同时相对性的假想实验

器. 假设当 A 与 A' 及 B 与 B' 重合时发出的两个光信号被装在地面固定点 C 的仪器“同时”接收到了,这就是说,这两个发生在不同地点的事件,在 K 系的观察者(C 点)看来是同时发生的,而在 K' 系观察者(C' 点)看来是不是同时发生的呢?由于光信号从发出地点传递到 C 点是需要时间的,在这段时间内,列车向前运动着,所以从 AA' 发出的光信号应先到达 C' 点,再到达 C 点;而从 BB' 发出的光信号则应先到达 C 点,再到达 C' 点. 在 K' 系这位观察者看来,列车中点 C' 的仪器将先接收到来自前方 A' 的闪光,然后再收到来自后方 B' 的闪光. 这两个发生在不同地点的事件不是同时发生的. 当然,这两位观察者的说明都是对的,其结论之所以不同,是由于各自所处的参考系不同. 由此可知,发生在不同地点的两个事件的同时性不是绝对的只是个相对的概念. 这个问题用洛伦兹

变换很容易证明.

假定在坐标系 K 中的观察者测得这两个事件同时发生的地点和时刻分别是 (x_1, y_1, z_1, t) 和 (x_2, y_2, z_2, t) , 由洛伦兹变换公式 (5-1), 即可求出坐标系 K' 中的观察者测得这两个事件的发生时刻如下:

$$t'_1 = \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

在上两式中, 因 x_1 不同于 x_2 , 所以 t'_1 也不同于 t'_2 , 它们的差是

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

这就是说, 在坐标系 K' 中的观察者测得这两个事件是先后发生的, 其时间间隔为

$$\frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

其实, 在例5-1中已经涉及同时的相对性问题, 只是没有点明而已.

2. 时间膨胀

既然在不同惯性系中, “同时”是一个相对的概念, 那么, 两个事件的时间间隔或一个过程的持续时间也会与参考系有关.

设在坐标系 K 中的某点 $x=s$ 处, 某事物发生了一个过程, 由坐标系 K 来量度时, 这个过程开始于 $t=t_1$, 终止于 $t=t_2$ 所经历的时间间隔是 $\Delta t = t_2 - t_1$. 我们定义, 在相对于过程发生的地点为静止的参考系中测得的时间间隔为固有时, 用 τ_0 表示. 这样, $\Delta t = t_2 - t_1$ 就是固有时 τ_0 .

当从坐标系 K' 中进行观测时, 认为这一过程经历的时间是

$\Delta t' = t'_2 - t'_1$, $\Delta t'$ 是“运动时”, 我们用 τ 表示它. 根据洛伦兹变换, 运动时 τ 可求得如下:

$$\begin{aligned}\tau = t'_2 - t'_1 &= \frac{t_2 - \frac{vS}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{vS}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

亦即

$$\boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}} \quad (5-6)$$

这结果意味着运动时大于固有时, 或者说在运动的参考系中观测, 事物变化过程的时间间隔变大了. 这叫做狭义相对论中的时间膨胀. 如果用钟走的快慢来说明, 就是 K' 系中的观察者把相对于他运动的那只 K 系中的钟和自己的一系列同步的钟对比, 发现那只 K 系中的钟慢了. 所以时间膨胀又叫动钟变慢.

最后要强调的是, 时间膨胀或动钟变慢是相对运动的效应, 并不是事物内部机制或钟的内部结构有什么变化, 它不过是时间量度具有相对性的客观反映.

现代物理实验为相对论的时间膨胀提供了有力的证据. 人们观测了以 $0.91c$ 高速飞行的 $\pi^\pm$ 介子经过的直线路径, 实验结果测得其平均飞行距离是 17.135 m . $\pi^\pm$ 介子固有寿命(固有时)的实验值是 $(2.603 \pm 0.002) \times 10^{-8} \text{ s}$. 由平均飞行距离可以推算出在实验室参考系中 $\pi^\pm$ 介子的平均寿命为

$$\tau = \frac{17.135}{0.91 \times 2.9979 \times 10^8} \text{ s} \approx 6.281 \times 10^{-8} \text{ s}$$

应用式(5-6)求得的 $\pi^\pm$ 介子固有寿命的相对论理论值为

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - 0.91^2} \times 6.281 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$\approx 2.604 \times 10^{-8} \text{ s}$$

可见,理论值与实验值只差 $0.001 \times 10^{-8} \text{ s}$,相对偏差在0.4%以内,这说明时间膨胀的预言是正确的。

3. 长度收缩

根据洛伦兹变换,不仅能说明时间的量度和参考系有关,还能说明长度的量度和参考系也有关。

假定有一个固定在坐标系 K 中的物体,它沿 x 轴的长度由 K 系来量度时是 $l = x_2 - x_1$ 。现在由运动坐标系 K' 在某时刻 t' 进行量度,测得该物体的长度是 $l' = x'_2 - x'_1$ 。一般总认为 l 与 l' 是相等的,没有区别的的必要。其实不然,物体的长度相对于观察者为静止时与相对于观察者为运动时的量度情况并不相同,因此,量度的结果就不可能相等,必须加以区别。在棒相对于观察者为静止(即在 K 系中观察)时,观察者为静止物体两个端点坐标的测量,不论同时进行还是不同时进行,都不会影响测量的结果。我们把这种长度叫做该物体的固有长度。上面提到的 l 就是物体的固有长度。如果物体相对于观察者运动(即在 K' 系中观察)时,观察者为运动物体两个端点坐标的测量就必须同时进行,才能由此求出运动物体的长度,否则,由先后测得的两端点坐标之差是不能代表运动物体的长度的。上面提到的 l' 就是这种运动物体的长度,所以必须强调两端是在某一时刻 t' 同时测量的。

现在,我们考察 l 与 l' 是否相等。我们用 x_1, x_2 和 x'_1, x'_2 分别代表物体沿 x 轴方向长度的两个端点在坐标系 K 和 K' 中的坐标。考虑到 x'_1 与 x'_2 都是在 t' 时刻测得的,所以根据式(5-2),写出

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

上两式相减得

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

亦即

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

或

$$l' = l \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5-7)$$

因此,我们的结论是,从对于物体有相对速度 v 的坐标系测得的沿速度方向的物体长度 l' ,总比与物体相对静止的坐标系中测得的固有长度 l 为短. 这个效应叫做长度收缩.

至于和相对速度 v 方向相垂直的长度却是不变的,因为洛伦兹变换中明显地写着 $y = y', z = z'$.

在我们前面提到的 π 介子实验中,也可认为整个实验室相对于 π 介子以 $0.91c$ 的速度运动. 因此,处于 π 介子参考系中的观察者测得的实验室长度服从长度收缩效应. 这样, π 介子经历过的实验室距离为

$$\begin{aligned} L &= 0.91c \times \tau_0 = 0.91 \times 2.9979 \times 10^8 \times 2.603 \times 10^{-8} \text{ m} \\ &= 7.101 \text{ m} \end{aligned}$$

按照长度收缩效应,实验室距离的固有长度应为

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{7.101}{\sqrt{1 - 0.91^2}} \text{ m} = 17.127 \text{ m}$$

这与实际情形很符合.

长度收缩效应纯粹是一种相对论效应,当物体运动速度大到可以和光速比拟时,这个效应是显著的. 如果物体速度 $v \ll c$, $l \approx l'$, 这个收缩效应微乎其微,就显示不出来了.

读者也许会问这个长度收缩效应能不能看到,一般说来,这个

测量出来的效应很难看到. 因为我们用肉眼看物体时, 除有相对论效应外, 还有光学效应. 我们肉眼在某时刻接受到的光并不是物体上各点同时发射出来的, 物体远端发出的光应比近端发出的光发射得早些, 才可能于同一时刻到达肉眼而成像, 这样, 我们看到的物体长度并不代表同一时刻物体两端间的距离, 这就导致光学畸变. 对一根静止在 K 系中的棒来说, 在 K 系中的观察者将看到棒的固有长度. 只有如图5-5所示那样, 当运动坐标系 K' 中的观察者处于棒的中垂线上时, 光学畸变消失, 才能真正看出这个长度收缩效应.

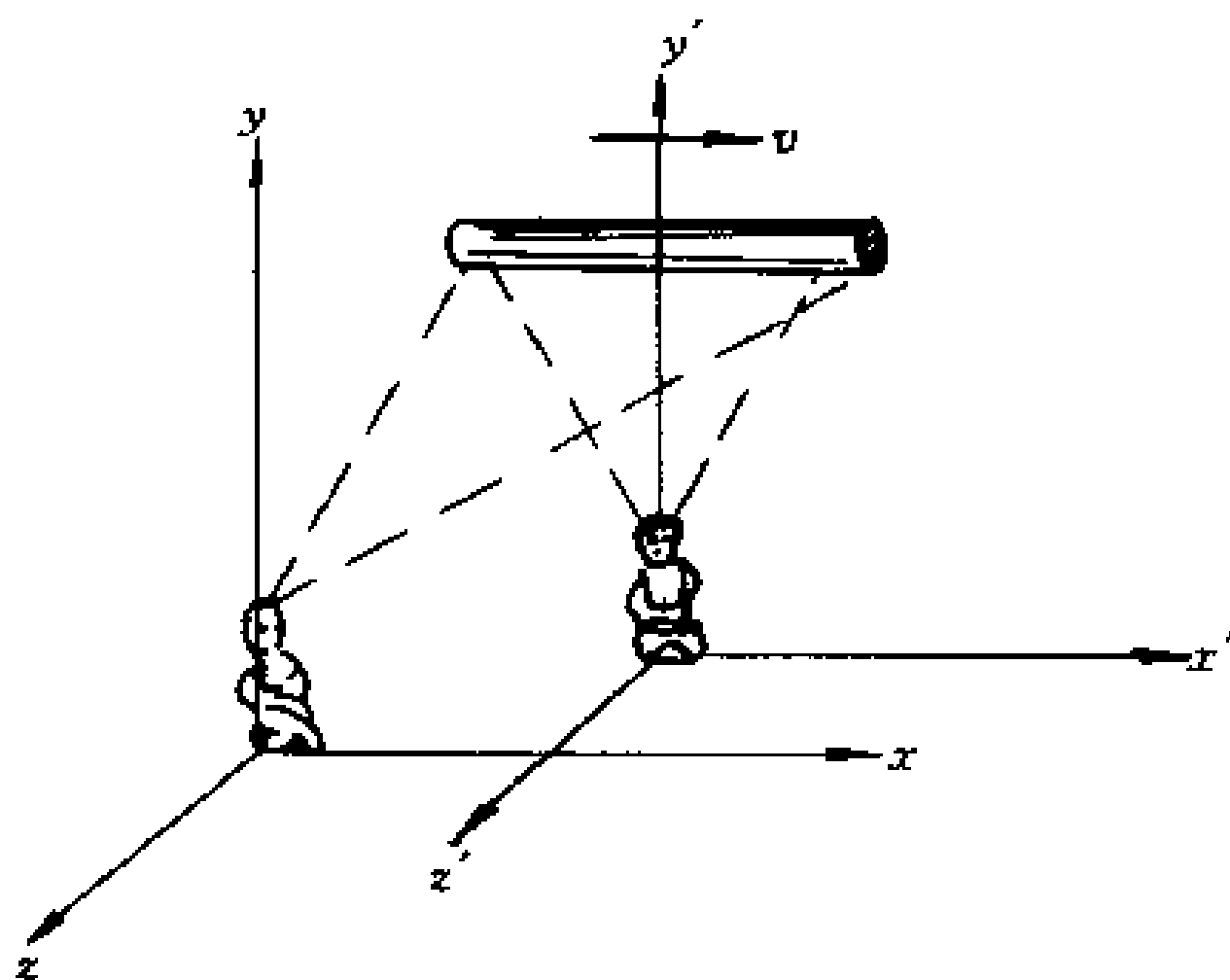


图5-5 肉眼看物体的收缩效应

4. 相对性与绝对性

按照辩证唯物主义的世界观, 时间空间和物质运动是不可分割的. 运动的描述、时空的量度也的确有其相对性, 这些都是客观的规律. 但是, 从物质的相互影响、事件的因果先后、位置的邻近次序来看, 物质运动和时空还有其绝对性的一面. 例如, 在一辆以速度 v 相对于地面作匀速直线运动的车厢内, 有一质点从车厢顶板的 A 点处, 沿着车厢壁上的 B 、 C 等点落下, 最后落到车厢地板上

的 D 点. 从车中观察者来看, 这个质点是作直线运动的, 经历的时

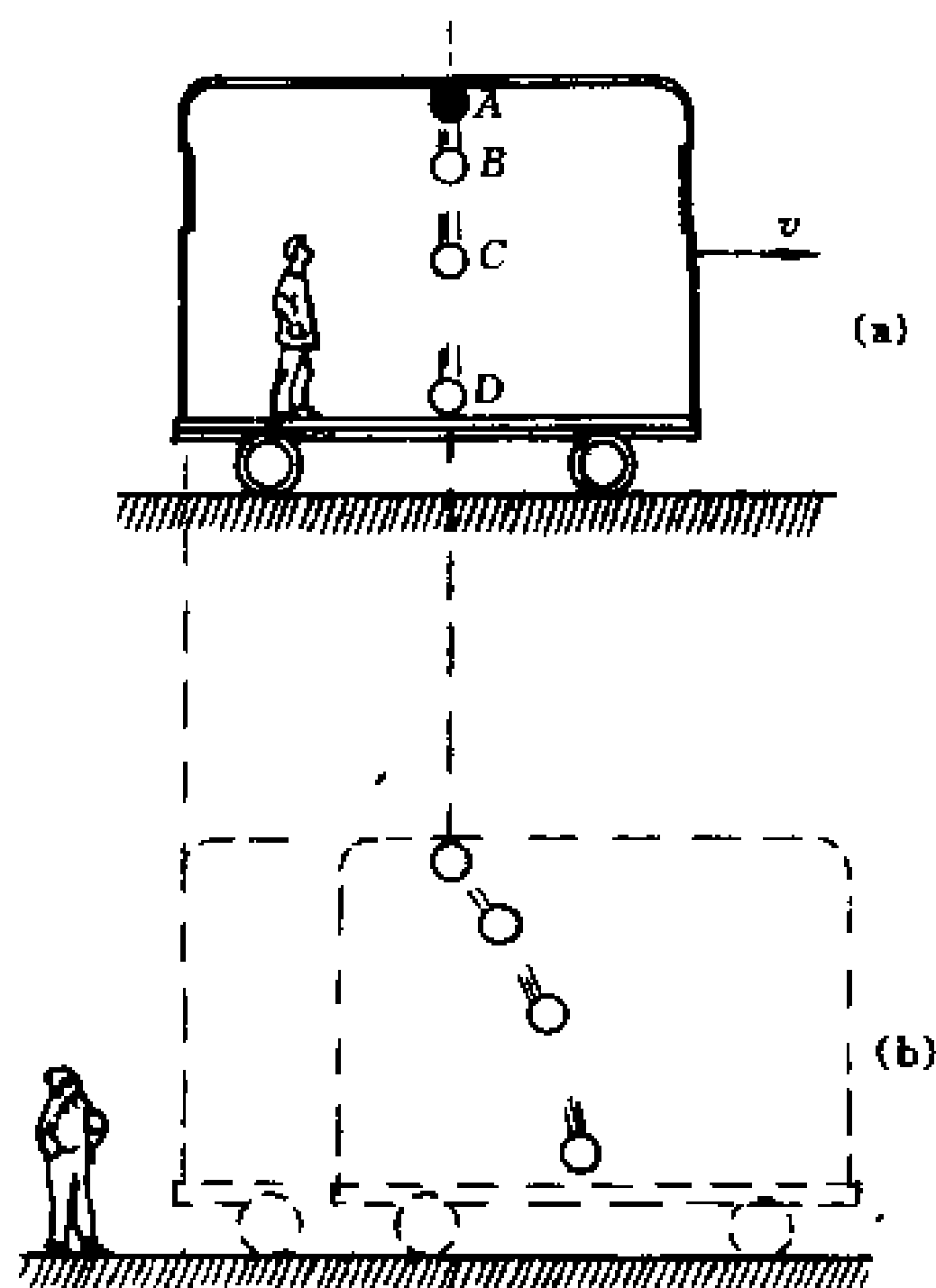


图5-6 相对性与绝对性

间为 t , 如图5-6(a)所示; 而从地面上的观察者来看, 质点作曲线运动, 经历的时间比 t 长, 如图5-6(b)所示. 曲线运动的轨迹, 运动所需的时间等, 都可用洛伦兹变换来计算. 这说明物体运动的描述和时空的量度, 的确是有相对性的, 并且是服从一定的客观规律的. 但是, 不论从那一个坐标系来看, 物体总是先和顶板的 A 点接触, 再和车厢壁的 B 、 C 等点接触, 直到最后才和地板的 D 点接触, 这个时空次序是不会颠倒的, 这就是物质运动和时空的绝对性的一面. 所以, 我们要正确认识相对论, 把它看成客观世界的重要规律, 是人类对自然界的认识发展到一定阶段的必然产物, 用它作为进一步认识自然和改造自然的重要工具.

§ 5-5 狭义相对论动力学基础

1. 相对论力学的基本方程

通过前面的讨论,我们知道在不同惯性系内,时空坐标遵守洛伦兹变换关系,所以要求物理规律符合相对性原理,也就是要求它们在洛伦兹变换下保持不变.牛顿运动方程对伽利略变换是不变式,对洛伦兹变换不是不变式.但是,容易想到,既然伽利略变换是洛伦兹变换在速度 v 与光速 c 相比为很小时的近似结果,那么,牛顿运动方程只能是低速时的近似规律,应该找出一个新的方程,它对洛伦兹变换是不变式,并且在 $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ 的条件下化为牛顿运动方程.

牛顿第二定律,按照牛顿自己的写法是

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

如果把上式中的质量 m 认作不变的,那么,上式对洛伦兹变换就不是不变的,因此它不适用于高速运动的物体.

在狭义相对论内,根据自然界的普遍规律之一的动量守恒定律,以及运用相对论速度变换的关系,从理论上证明物体的质量是随着速度而改变的,两者的关系如下:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5-8)$$

式中的 m_0 是物体在相对静止的惯性系中测出的质量,叫做静止质量. 而 m 则是物体对观察者有相对速度 v 时的质量. 这个式子通

过质量与速度的关系揭示了物质与运动的不可分割性. 显然, 当 $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ 时, m 趋近于 m_0 . 于是, 在相对论中, 动量的表达式是

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{v} \quad (5-9)$$

而相对论力学的基本方程应为

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{v} \right] \quad (5-10)$$

可以证明, 这一方程对洛伦兹变换的确是 invariant. 从形式上看, 式 (5-10) 也可写成

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (5-11)$$

似乎和经典力学中相应的公式并无不同, 但实质上, 我们对动量应作式 (5-9) 那样理解, 两者并不相同. 只有当 v 远小于 c 时, 才可认为质量基本上不变, 而等于 m_0 , 这样才从形式到实质上都回到了牛顿第二定律.

物体运动时的质量公式 (5-8), 早在人们研究电子的运动时就被发现了. 考夫曼 (W. Kaufmann) 曾用不同速度的电子, 观察电子在磁场作用下的偏转, 从而测定电子的质量. 实验证明, 电子的质量随速度不同而有不同的量值, 并且实验结果与式 (5-8) 十分符合 (图 5-7). 例如, 当 $v = 0.98c$ 时, 电子的质量变化是十分显著的, 此时

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} = 5m_0$$

但是, 物体在一般速度时, 质量的变化是微不足道的, 因此很难观测出来. 例如, 火箭以第二宇宙速度 $v = 11.2 \text{ km/s}$ 运动, 但这个速度和光速相比也还是很小的, 所以火箭的质量变化极为微小, 此时

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{11.2}{3 \times 10^5}\right)^2}}$$

$$= 1.000\,000\,000\,9m_0$$

如果物体以光速运动, $v=c$, 则当物体具有不等于零的静止质量(即 $m_0 \neq 0$)时, 从式(5-8)将得出 $m = \infty$, 这是没有实际意义的. 如果这个物体的静止质量等于零, 那么 m 就可以具有一定的量值, 光子就符合这种情况.

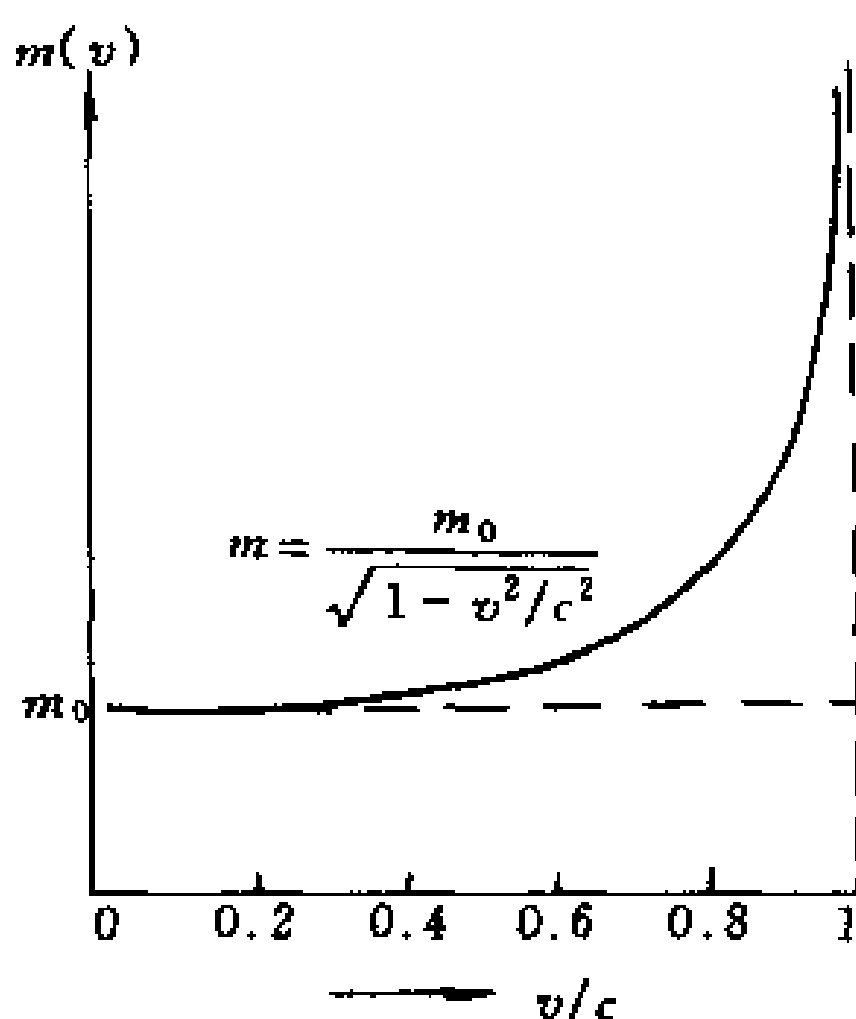


图5-7 电子和运动粒子的质量随速度变化

2. 质量和能量的关系

当外力作用在静止质量为 m_0 的自由质点上时, 质点每经历位移 ds , 其动能的增量是

$$dE_k = F \cdot ds$$

如果外力与位移同方向, 则上式成为

$$dE_k = F ds$$

设外力作用于质点的时间为 dt , 则质点在外力冲量 Fdt 作用下, 其动量的增量是

$$dp = Fdt$$

考虑到 $v = \frac{ds}{dt}$, 由上两式相除, 即得质点的速度表达式为

$$v = \frac{dE_k}{dp} \quad (5-12)$$

亦即 $dE_k = v d(mv) = v^2 dm + mvdv$

把式(5-8)平方, 得 $m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$, 对它微分求出

$$mvdv = (c^2 - v^2)dm$$

代入上式得

$$dE_k = c^2 dm \quad (5-13)$$

上式说明,当质点的速度 v 增大时,其质量 m 和动能 E_k 都在增加. 质量的增量 dm 和动能的增量 dE_k 之间始终保持式(5-13)所示的量值上的正比关系. 当 $v=0$ 时,质量 $m=m_0$, 动能 $E_k=0$, 据此,将式(5-13)积分,即得

$$\int_0^{E_k} dE_k = \int_{m_0}^m c^2 dm$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \quad (5-14)$$

上式是相对论中的动能表达式. 爱因斯坦在这里引入了经典力学中从未有过的独特见解,他把 m_0c^2 叫做物体的静止能量,把 mc^2 叫做运动时的能量,我们分别用 E_0 和 E 表示之:

$E = mc^2, \quad E_0 = m_0c^2$

(5-15)

上列式子叫做物体的质能关系式.

质量和能量都是物质的重要属性. 质量可以通过物体的惯性和万有引力现象而显示出来,能量则通过物质系统状态变化时对外做功、传递热量等形式而显示出来. 质能关系式揭示了质量和能量是不可分割的,这个公式建立了这两个属性在量值上的关系,它表示具有一定质量的物质客体也必具有和这质量相当的能量. 通常所说的物体的动能仅是 mc^2 和 m_0c^2 的差额,即

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right] \quad (5-16)$$

因为

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

所以

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

如果 $v \ll c$, 即当物体速度远小于光速时, 则

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

这时是和经典力学中动能表达式完全一样的. 在一般情况下, 动能要用式(5-16)计算. 关于静止能量的利用, 在近代原子能利用中已获实现. 事实上, 质能关系式在近代物理研究中非常重要, 对原子核物理以及原子能利用方面, 具有指导的意义, 是一项重要的理论支柱.

3. 动量和能量的关系

在经典力学中, 动能和动量有什么关系呢? 这个问题用式(5-12)极易解决. 在低速情形下, 质量可认作不变, 因此, 可将式(5-12)写成

$$dE_k = v dp = \frac{p}{m} dp$$

将上式积分, 即得

$$E_k = \int_0^{E_k} dE_k = \int_0^p \frac{p}{m} dp = \frac{p^2}{2m}$$

这就是经典力学中动量和动能的关系. 这个关系式对洛伦兹变换不是不变的, 所以不适用于高速运动, 缺乏普遍性. 为了求得一个相对子洛伦兹变换为不变的普遍关系式, 我们仍然从式(5-12)入手. 这时不能将质量 m 看作不变, 用 $E = mc^2$ 与式(5-13)相乘, 考虑到 $dE = dE_k$, 即得

$$EdE = mc^2 v dp = c^2 p dp$$

将上式积分, 由此得

$$\frac{1}{2} (E^2 - E_0^2) = \int_{E_0}^E E dE = \int_0^p c^2 p dp = \frac{1}{2} c^2 p^2$$

整理之, 得

$$\boxed{E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \quad (5-17)$$

上式叫做相对论动量和能量关系式，它对洛伦兹变换保持不变。对动能是 E_k 的粒子，用 $E = E_k + m_0 c^2$ 代入式(5-17)，可得

$$E_k = \frac{p^2}{m + m_0}$$

当 $v \ll c$ 时， $m \approx m_0$ ，于是

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

我们又回到了经典力学表示式。

关系式(5-17)有极重要的意义。进一步的分析表明，它不仅揭示了能量与动量间的关系，而且实际上它还反映了能量与动量的不可分割性与统一性，就像时间与空间的不可分割性与统一性那样。把它用到光子上去，因光子的静止质量 $m_0 = 0$ ，可得光子的动量等于光子能量除以光速 c 的结果： $p = \frac{E}{c}$ 。

例题5-3 原子核的结合能。已知质子和中子的质量分别为

$$M_p = 1.007\,28\,u$$

$$M_n = 1.008\,66\,u$$

两个质子和两个中子组成一氦核 ${}_2^4\text{He}$ ，实验测得它的质量为 $M_A = 4.001\,50\,u$ ，试计算形成一个氦核时放出的能量。(1u = 1.660×10^{-27} kg)

解 两个质子和两个中子组成氦核之前，总质量为

$$M = 2M_p + 2M_n = 4.031\,88\,u$$

而从实验测定，氦核质量 M_A 小于质子和中子的总质量 M ，这差额 $\Delta M = M - M_A$ 称为原子核的质量亏损。对于 ${}_2^4\text{He}$ 核，

$$\Delta M = M - M_A = 0.030\,38\,u$$

$$= 0.030\,38 \times 1.660 \times 10^{-27}\, \text{kg}$$

根据质能关系式得到的结论：物质的质量与能量之间有一定的关系，当系统质量改变 ΔM 时，一定有相应的能量改变

$$\Delta E = \Delta M c^2$$

由此可知,当质子和中子组成原子核时,将有大量的能量放出,该能量就是原子核的结合能.所以形成一个氦核时所放出的能量为

$$\begin{aligned}\Delta E &= 0.030\,38 \times 1.660 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 0.453\,9 \times 10^{-11} \text{ J}\end{aligned}$$

结合成1mol 氦核(即4.002g 氦核)时所放出的能量为

$$\begin{aligned}\Delta E &= 6.022 \times 10^{23} \times 0.453\,9 \times 10^{-11} \text{ J} \\ &= 2.733 \times 10^{12} \text{ J}\end{aligned}$$

这差不多相当于燃烧100 t 煤时所发生的热量.

例题5-4 设有两个静止质量都是 m_0 的粒子,以大小相同、方向相反的速度相撞,反应合成一个复合粒子.试求这个复合粒子的静止质量和运动速度.

解 设两个粒子的速率都是 v ,由动量守恒和能量守恒定律得

$$\begin{aligned}m_0 v - m_0 v &= MV \\ Mc^2 &= 2m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}\end{aligned}$$

式中 M 和 V 分别是复合粒子的质量和速度.显然 $V=0$,这样,

$$M = M_0$$

而

$$M_0 = 2m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$$

这表明复合粒子的静止质量 M_0 大于 $2m_0$,两者的差值

$$M_0 - 2m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 2m_0 = \frac{2E_k}{c^2}$$

式中 E_k 为两粒子碰撞前的动能.由此可见,与动能相应的这部分质量转化为静止质量,从而使碰撞后复合粒子的静止质量增大了.

例题5-5 一束具有能量为 $h\nu_0$ 、动量为 $\frac{h\nu_0}{c}$ 的光子流,与一个静止的电子作弹性碰撞,散射光子的能量成为 $h\nu$,动量成为 $\frac{h\nu}{c}$.试

证光子的散射角 φ 满足下式:

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

此处 m_0 是电子的静止质量, h 为普朗克常量.

解 在图5-8中, 入射光子的能量和动量分别为 $h\nu_0$ 和 $\frac{h\nu_0}{c}e_0$, 与

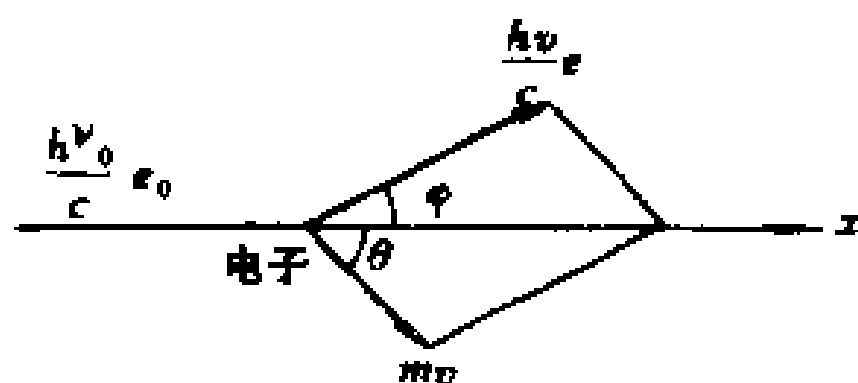


图5-8 光子与静止自由电子的完全弹性碰撞

物质中质量为 m_0 的静止自由电子发生碰撞. 碰撞后, 设光子散射开去而和原来入射方向成 φ 角, 这时它的能量和动量分别变为 $h\nu$ 和 $\frac{h\nu}{c}e$, e_0 和 e 代表在光子运动方向的单位矢量. 与此同时, 电子则向着某一角度 θ 的方向飞去, 它的能量和动量分别变成 mc^2 和 mv . 即在二者作弹性碰撞时, 应满足能量守恒和动量守恒两个定律,

$$h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2 \quad (1)$$

$$mv = \frac{h\nu_0}{c}e_0 - \frac{h\nu}{c}e \quad (2)$$

从图5-8可以看出, 矢量 $\frac{h\nu_0}{c}e_0$ 是矢量 mv 和 $\frac{h\nu}{c}e$ 所组成平行四边形的对角线, 所以

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu_0}{c}\frac{h\nu}{c}\cos\varphi$$

或

$$m^2 v^2 c^2 = h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu_0 \nu \cos \varphi \quad (3)$$

式(1)也可改写为

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2 \quad (4)$$

将式(4)平方再减去式(3),得到

$$m^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\varphi) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu)$$

根据式(5-8),上式可写成

$$m_0^2c^4 = m^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\varphi) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu)$$

由此可得

$$\frac{c(\nu_0 - \nu)}{\nu_0\nu} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

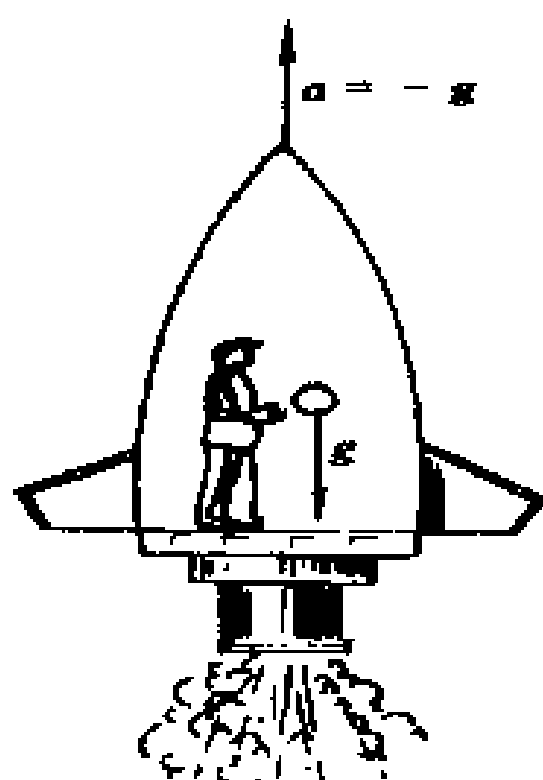
亦即

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

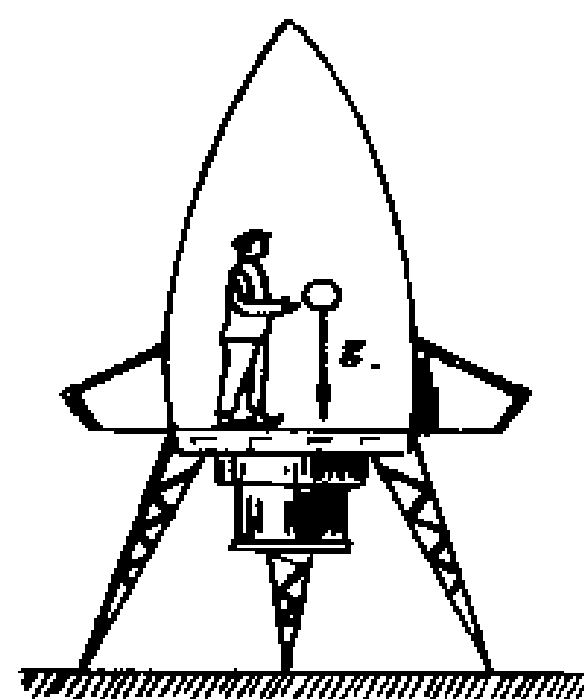
* § 5-6 广义相对论简介

上面我们介绍了狭义相对论的一些基本内容,说明在所有惯性坐标系中物理学定律(不仅是力学定律),都具有相同的表示式.现在的问题是,如果采用了非惯性系,物理规律又将如何?对此,爱因斯坦由非惯性系入手,研究与认识了等效原理,进而又建立了研究引力本质和时空理论的广义相对论.本节将只限于介绍广义相对论中的等效原理和广义相对论的相对性原理,因为这两个原理是广义相对论的基础.

参看图5-9,一位观察者在火箭舱里作自由落体实验.在(b)中,火箭静止在地面惯性系上,他将看到质点因引力作用而自由下落;在(a)中,火箭处于不受力的自由空间内,是个孤立火箭,质点是静止的,但当火箭突然获得一定的向上加速度时(非惯性系),他将看到质点的运动是和(b)中完全相同的自由落体运动.显然,如果他不知道舱外的情况,在这个局部范围内,单凭这实验,他将无法判断自己究竟是在自由空间相对于恒星作加速运动呢还是静止



(a) 具有加速度 a 的孤立火箭



(b) 静止于引力场中的火箭

图5-9

在引力场中!事实上,由于惯性质量与引力质量相等,我们无法根据上述两个实验来区分哪一个是在静止于地面的火箭舱内做的,哪一个是在自由空间中加速的火箭舱内做的. 因此,我们看到:在处于均匀的恒定引力场影响下的惯性系中,所发生的一切物理现象,可以和一个不受引力场影响,但以恒定加速度运动的非惯性系内的物理现象完全相同.这便是通常所说的等效原理. 由于引力场和加速效应等效,所以让火箭舱在引力场中自由下落,火箭舱里的观察者将处于失重状态之中,这时引力场的作用,在这个局部环境中,将被加速运动完全抵消. 爱因斯坦据此把相对性原理推广到非惯性系,认为物理定律在非惯性系中,可以和局部惯性系中完全相同,但在局部惯性系中要有引力场存在,或者说,所有非惯性系和有引力场存在的惯性系对于描述物理现象都是等价的.这叫做广义相对论的相对性原理. 考虑到引力场在大尺度上并不均匀,它在场中各点的强度(即质点在该处自由下落的加速度 g)是不同的. 因此,在引力场空间每一点上配置的自由下落的火箭舱实验室只代表那一点上的惯性系,这种惯性系叫做局部惯性系.

在引力场中,总存在着许许多多的局部惯性系,这些局部惯性

系之间是有相对速度的,虽然如此,我们在每一局部惯性系中都能应用狭义相对论的结论.

建立在广义相对论的相对性原理之上的广义相对论,其实是考虑了引力场的相对论.由于引入了场的概念,因而在广义相对论中,认识到物质、空间和时间之间,存在着比经典物理更为复杂和深刻的联系.在宇宙空间内物质积聚的地方,存在着较强的引力场,它将直接影响时空的性质.广义相对论证明,在某点上的引力场越强,则处于引力场内的“钟”走得愈慢.爱因斯坦由此预测了光谱线的红向移动(即由引力极强的远处恒星上所发射出来的某一元素的谱线在地球上测得的频率小于地球上所发射的).此外,由广义相对论还知道,光线经过质量较大的物体附近时,受其引力场的影响,应向该物体的方向偏转(图5-10).例如在太阳的情况下,这种偏转 φ 为 $1.75''$.从星球射来的光线,经过太阳附近然后再照射到地球上所发生的偏转,只能在日蚀时才可以观测到.作为广义相对论初期重大事实验证之一,我们应该介绍一下水星近日点的进动:天文观测发现行星的近日点有进动,它们的轨道不是严格闭合的.牛顿力学虽能作出解释,但计算值比观测值每世纪 $5600.73''$ 的进动相比少了 $43.11''$.用了广义相对论,考虑到时空弯曲引起的修正,就能得出水星近日点的进动应有每世纪 $43.03''$ 的附加值.

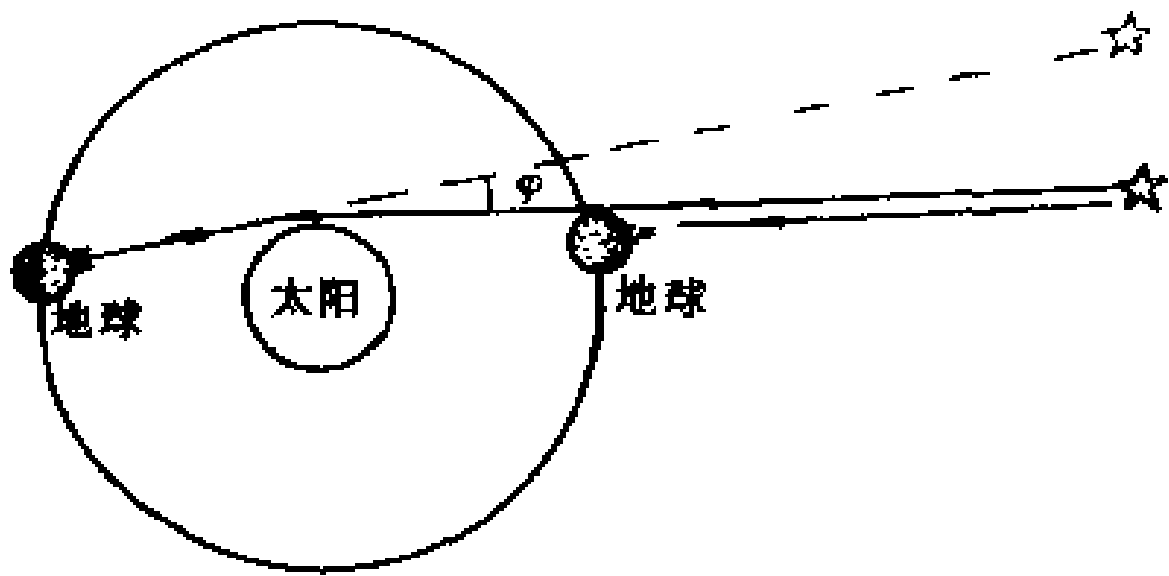


图5-10 引力使光线弯曲

相对论是关于空间、时间和引力的现代物理理论,在整个物理

学史上具有深远的革命意义,由于它一方面揭露了空间和时间之间的相互联系,另一方面还揭露了时空性质和运动物质性质之间的相互联系,所以为近代科学的发展指明了方向,注入了巨大的动力,它成为20世纪物理学中最伟大成就之一是当之无愧的.

思 考 题

5-1 相对论中运动物体长度缩短与物体线度的热胀冷缩是否是一回事?

5-2 有一枚接近于光速相对于地球飞行的宇宙火箭,在地球上的观察者将测得火箭上的物体长度缩短,过程的时间延长,有人因此得出结论说:火箭上观察者将测得地球上的物体比火箭上同类物体更长,而同一过程的时间缩短.这个结论对吗?

5-3 化学家经常说:“在化学反应中,反应前的质量等于反应后的质量”.以2 g 氢与16 g 氧燃烧成水为例,注意到在这个反应过程中大约放出了 2.5×10^7 J 热量,如考虑到相对论效应,则上面的说法有无修正的必要?

5-4 下面两种论断是否正确?

(1) 在某个惯性系中同时、同地发生的事件,在所有其他惯性系中也一定是同时、同地发生的.

(2) 在某个惯性系中有两个事件,同时发生在不同地点,而在对该系有相对运动的其他惯性系中,这两个事件却一定不同时.

5-5 两只相对运动的标准时钟 A 和 B,从 A 所在惯性系观察,哪个钟走得快?从 B 所在惯性系观察,又是如何呢?

5-6 洛伦兹变换与伽利略变换的本质差别是什么?如何理解洛伦兹变换的物理意义?

5-7 长度的量度和同时性有什么关系?为什么长度的量度和参考系有关?

5-8 在相对论中,对动量定义 $p = mv$ 和公式 $F = dp/dt$ 的理解,与在牛顿力学中的有何不同?在相对论中, $F = ma$ 一般是否成立?为什么?

5-9 什么叫质量亏损?它和原子能的释放有何关系?

5-10 相对论的能量与动量的关系式是什么?相对论的质量与能量的关系式是什么?静止质量与静止能量的物理意义是什么?

习 题

(下列各题中光速均以 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 计算)

5-1 一个质点,在惯性系 K' 中作匀速圆周运动,轨道方程为

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \quad z' = 0$$

试证:在惯性系 K 中的观察者测得该质点作椭圆运动,椭圆的中心以速度 v 移动.

5-2 一观察者测得运动着的米尺长 0.5 m ,问此尺以多大的速度接近观察者?

5-3 一张宣传画 5 m 见方,平行地贴于铁路旁边的墙上,一高速列车以 $2 \times 10^8 \text{ m/s}$ 速度接近此宣传画,这张画由司机测量将成为什么样子?

5-4 远方的一颗星以 $0.8c$ 的速度离开我们,接受到它辐射出来的闪光按5昼夜的周期变化,求固定在此星上的参考系测得的闪光周期.

5-5 假设宇宙飞船从地球射出,沿直线到达月球,距离是 $3.84 \times 10^8 \text{ m}$,它的速率在地球上被量得为 $0.30c$. 根据地球上的时钟,这次旅行花多长时间?根据宇宙飞船所做的测量,地球和月球的距离是多少?怎样根据这个算得的距离,求出宇宙飞船上时钟所读出的旅行时间?

5-6 在 K 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上,其间距离是 1 m ,在 K' 系中观察这两个事件之间的空间距离是 2 m ,求在 K' 系中这两个事件的时间间隔.

5-7 在 K 系中观察到的两事件发生在空间同一地点,第二事件发生在第一事件以后 2 s . 在另一相对 K 系运动的 K' 系中观察到第二事件是在第一事件 3 s 之后发生的,求在 K' 系中测量两事件之间的位置距离.

5-8 π^+ 介子是一不稳定粒子,平均寿命是 $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ (在它自己参考系中测得). (1) 如果此粒子相对于实验室以 $0.8c$ 的速度运动,那么实验室坐标系中测量的 π^+ 介子寿命为多长? (2) π^+ 介子在衰变前运动了多长距离?

5-9 地球上一观察者,看见一飞船 A 以速度 $2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$ 从他身边飞过,另一飞船 B 以速度 $2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 跟随 A 飞行. 求:

(1) A 上的乘客看到 B 的相对速度;

(2) B 上的乘客看到 A 的相对速度.

5-10 二只宇宙飞船相对某遥远的恒星以 $0.8c$ 的速率向相反方向移开. 试用速度变换法则证明,二飞船的相对速度是 $\frac{1.6}{1.64}c$, 并与伽利略变换所得的结果进行比较.

5-11 一原子核以 $0.5c$ 的速度离开一观察者而运动. 原子核在它运动方

向上向前发射一电子,该电子相对于核有 $0.8c$ 的速度;此原子核又向后发射了一光子指向观察者.对静止观察者来讲,(1)电子具有多大的速度;(2)光子具有多大的速度.

5-12 一光源在 K' 坐标系的原点 O' 发出一光线.光线在 $x'y'$ 平面内与 x' 轴的交角为 θ' .设 K' 相对 K 以速度 u 沿 x 轴运动.试求在 K 坐标中看到这光线的传播方向.

5-13 如一观察者测出电子质量为 $2m_0$,问电子速度为多少? (m_0 为电子的静止质量)

5-14 某人测得一静止棒长为 l ,质量为 m ,于是求得此棒线密度为 $\rho = \frac{m}{l}$.假定此棒以速度 v 在棒长方向上运动,此人再测棒的线密度应为多少?若棒在垂直长度方向上运动,它的线密度又为多少?

5-15 设有一静止质量为 m_0 、带电荷量为 q 的粒子,其初速为零,在均匀电场 E 中加速,在时刻 t 时它所获得的速度是多少?如果不考虑相对论效应,它的速度又是多少?这两个速度间有什么关系?讨论之.

5-16 设电子的速度为(1) 1.0×10^6 m/s;(2) 2.0×10^8 m/s,试计算电子的动能各是多少?如用经典力学公式计算电子动能又各为多少?

5-17 两个氦核组成质量数为4、原子量为4.0015 u 的氦核.试计算氦核放出的结合能.

5-18 太阳由于向四面空间辐射能量,每秒损失了质量 4×10^9 kg.求太阳的辐射功率.

5-19 在什么速度下粒子的动量比非相对论动量大两倍?在什么速度下的动能等于它的静止能量?

5-20 一个电子从静止开始加速到 $0.1c$ 的速度,需要对它作多少功?速度从 $0.9c$ 加速到 $0.99c$ 又要作多少功?

5-21 设有一 π^+ 介子,在静止下来后,衰变为 μ^+ 子和中微子 ν ,三者的静止质量分别为 m_π, m_μ 和0.求 μ^+ 子和中微子的动能.

5-22 一中性 π 介子相对于观察者以速度 $v = kc$ 运动,后衰变为两个光子.两光子的运动轨迹与 π 介子原来方向成相等的角度 θ (见题图).证明:

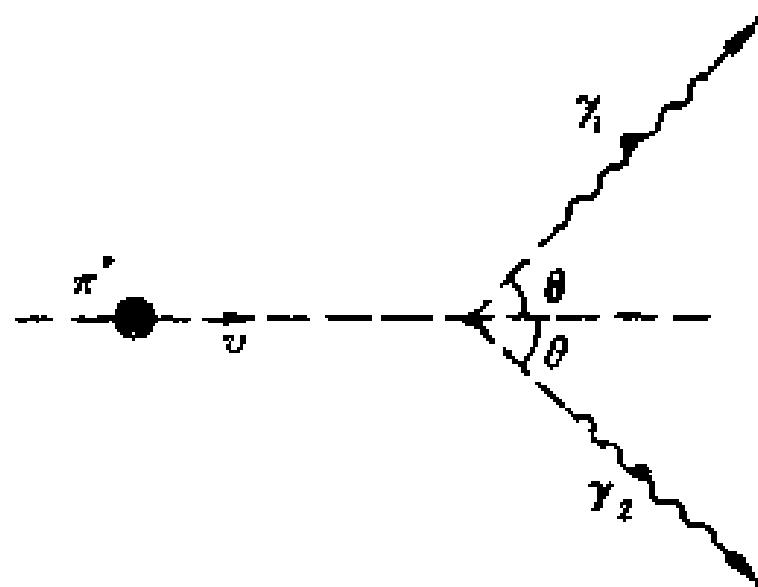
(1) 两光子有相等的能量;

(2) $\cos\theta = k$.

5-23 质量为 m_0 的一个受激原子,静止在参考系 K 中,因发射一个光子而反冲,原子的内能减少了 ΔE ,而光子的能量为 $h\nu$.试证:

$$h\nu = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right)$$

(目前,宏观物体如火箭、火车等的速度都远小于光速,因此,本章有关



习题5-22图

习题的数据大多是假想的.)

阅读材料

宋超新星爆发和光速不变性

超新星爆发,是恒星演化到晚期的一种极强烈的爆发过程.原来发光很弱的星体,在突然爆发时向外抛射出速率很高的物质,同时发出很强的光,其亮度会在几天内增加到可以和整个星系的亮度相比拟的程度.过一段不长的时间,再逐渐暗下去.这种天文现象极为罕见.但在我国两千年的古籍中,查证到可能是超新星爆发的记载却有好几次.其中宋朝的一次记载,较为详尽,可作为“光速不变”的一个佐证.

1731年,英国一位天文学爱好者用望远镜在南方夜空的金牛座上,发现了一团云雾状的东西.外形像只螃蟹,人称“蟹状星云”.后来观测表明,蟹状星云在膨胀,膨胀的速率为每年 $0.21''$.到1920年,它的半径达到 $180''$.推算起来,其膨胀开始的时刻应在 $180'' \div (0.21''/a) = 860 a$ 之前,即公元1060年左右.人们相信,蟹状星云是900多年前一次超新星爆发中抛出来的气体壳层.这一点在我国史籍里得到了证实.据《宋史》记载:“至和元年五月己丑出天关东南可数寸,岁余稍没”.《宋会要辑稿》也记载:“嘉佑元年三月,司天监言,客星没,客去之兆也.初,至和元年五月晨出东方,守天关.昼见如太白,芒角四出,色赤白,凡见二十三日”.它们的大意是:超新星(客星)最初出现于1054年(至和元年),位置在金牛座(天关)附近,白昼看起来赛过金星(太白),历时23天.往后慢慢暗下来,直到1056年(嘉佑元年),客星才隐没.当一颗恒星发生超新星爆发时,

它的外围物质向四面八方飞散。

现在已经确定,蟹状星云就是宋超新星的遗迹,它到地球的距离为 $L \approx 5\,000\text{ l. y.}$ 。爆发时,喷射物的速率至少为 $u \approx 1\,500\text{ km/s}$ 。在这些喷射物中,有些向着我们运动(如图 C-1 中的 A 点),有些则沿横向运动(如图中的 B 点)。根据经典速度合成公式, A

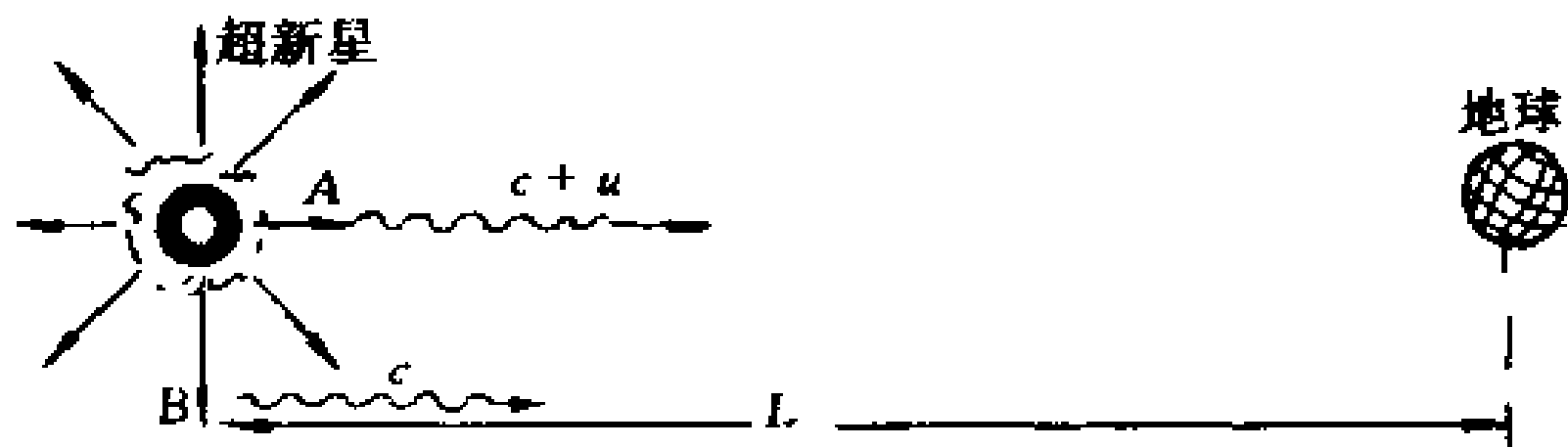


图 C-1 超新星喷射物

点向我们发出的光线传播速度为 $c+u$ 。以爆发瞬时为计时起点,则地球观测者看到 A 点发光的时刻为

$$t_1 = \frac{L}{c+u} \simeq \frac{L}{c} \left(1 - \frac{u}{c} \right)$$

同理, B 点向我们发出的光线传播速度为 c , 所以, 地球观测者看到 B 点发光的时刻为

$$t_2 = \frac{L}{c}$$

沿其它方向运动的喷射物所发的光到达地球所需时间将介于这二者之间。因此, 地球观测者看到超新星发光持续的时间至少应是

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{Lu}{c^2}$$

代入有关数据, 计算得

$$\Delta t = 25\text{ a}$$

这个时间与实际观测显然不相符合。错误的结果来自错误的假定。对于光的传播现象, 我们不能采用经典速度合成公式。现代实验精确地证明, 光速与光源速度无关, 即光速不随惯性参考系而变。超新星上 A、B 两点发出的光线传播速度都是 c 。若“爆发”作瞬时过程处理, 则 $\Delta t = 0$; 若不作瞬时过程处理, 则实际观测的发光时间取决于超新星爆发过程持续的时间, 这个时间远远小于 25 年而与史籍的记载相符。所以宋超新星爆发为光速不变性提供了例证。

第二篇 热 学

热学研究的是物质的分子热运动. 大量分子的无规则运动导致了物质热现象的产生. 本篇共有两章, 第六章介绍气体动理论, 第七章介绍热力学基础. 前者着重于阐明热现象的微观本质, 后者侧重于阐明热现象的宏观规律. 两者虽所用方法不同, 但对热运动的研究来说, 却相辅相成, 缺一不可.

在气体动理论中, 我们将首次运用统计方法进行概率性的描述, 以补经典力学决定论之不足. 热现象是大量分子运动的集体表现, 各个分子的位置、速度实际上无从一一测定, 但为了从大量分子运动和相互作用出发推导气体的宏观性质, 就必须引入这些分子位置、速度分布的概率假设, 并运用统计方法.

热力学定律是以大量实验事实为基础的, 它们从能量的观点出发, 分析研究热功转换的关系和条件, 以及消耗能量做功等一系列技术问题. 这种研究方法与气体动理论所采用的统计方法迥然不同. 它的实用价值很高. 通过对热力学理论的介绍, 将进一步证明能量、熵、功、热等概念的重要性和实用性. 这是学习物理学所必须掌握的.

第六章 气体动理论

气体动理论是在物质结构的分子学说的基础上,为说明人所熟知的气体的物理性质和气态现象而发展起来的.在这些熟知的性质和现象中,我们可以举出理想气体定律,微小悬浮粒子的布朗运动,流动气体的粘性,热的传导和比热,物体的热胀冷缩,固、液、气三态的相互转变,非理想气体的状态方程等等.这些与温度有关的物理性质的变化统称为热现象.和力学研究的机械运动不同,气体动理论的研究对象是分子的热运动.热现象就是组成物体的大量分子、原子热运动的集体表现.分子热运动由于分子的数目十分巨大和运动的情况十分混乱,而具有明显的无序性和统计性.就单个分子来说,由于它受到其他分子的复杂作用,其具体运动情况瞬息万变,显得杂乱无章,具有很大的偶然性,这就是无序性的表现.但就大量分子的集体表现来看,却存在一定的规律性.这种大量的偶然事件在宏观上所显示的规律性叫做统计规律性.正是由于这些特点,才使热运动成为有别于其他运动形式的一种基本运动形式.在本章,我们将根据所假定的气体分子模型,运用统计方法,研究气体的宏观性质和规律,以及它们与分子微观量的平均值之间的关系,从而揭示这些性质和规律的本质.

§ 6-1 状态 过程 理想气体

1. 状态参量

在一定条件下,物体的状态可以保持不变.为了描述物体的状态,我们常常采用一些物理量来表示物体的有关特性,例如体积、

温度、压强、浓度等. 这些描述状态的变量, 叫做状态参量. 对于一定质量的气体, 除它的质量 M 和摩尔^①质量 M_m 外, 它的状态一般可用下列三个量来表示: (1) 气体所占的体积 V , (2) 压强 p , (3) 温度 T 或 t . 这三个表示气体状态的量叫做气体的状态参量. 为了详尽地描述物体的状态, 有时还需知道别的参量. 如果系统是由多种物质组成的, 那就必须知道它们的浓度; 如果物体处在电场或磁场中, 那就必须知道电场强度或磁场强度. 一般地说, 我们常用几何参量、力学参量、化学参量和电磁参量等四类参量来描述系统的状态. 究竟用哪几个参量才能完全地描述系统的状态, 这是由系统本身的性质决定的.

在气体的上述三个状态参量中, 气体的体积是气体分子所能达到的空间, 与气体分子本身体积的总和是完全不同的. 气体体积的单位用 m^3 . 气体的压强是气体作用在容器壁单位面积上的指向器壁的垂直作用力, 是气体分子对器壁碰撞的宏观表现. 压强的单位用 Pa , 即 N/m^2 . 过去常用 atm (标准大气压) 作为压强的单位, $1\text{atm}=101\,325\text{Pa}$.

温度的概念比较复杂, 它的本质与物质分子运动密切相关, 温度的不同反映物质内部分子运动剧烈程度的不同. 在宏观上, 简单说来, 我们用温度表示物体的冷热程度, 并规定较热的物体有较高

① 摩尔是国际单位制中的基本单位之一. 按 1971 年国际计量大会决议, 摩尔是表示一系统的物质的量, 该系统中所包含的基本单元数与 0.012kg 碳-12 的原子数目相等. 在使用摩尔时, 基本单元应予指明, 可以是原子、分子、离子、电子及其它粒子, 或是这些粒子的特定组合.

0.012 kg C-12 中的原子数目通常记作 N_A , N_A 称为阿伏伽德罗常数, $N_A \approx 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. 1 个 C-12 原子的质量的 $\frac{1}{12}$ 定义为原子质量单位, 记作 u , $1u = \frac{0.012 \text{ kg}}{12N_A} = \frac{1}{N_A} \times 10^{-3} \text{ kg} = 1.660 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

这样, 对于由分子组成的物质系统来说, 该物质 1 mol 就是该物质 N_A 个分子的集合, 这集合的总质量称为该物质的摩尔质量, 记作 M_{mol} , 以 kg 为单位. 如以 m 表示该物质 1 个分子的质量, 显然有: $M_{\text{mol}} = N_A m$, $m = \frac{M_{\text{mol}}}{N_A}$.

的温度. 温度的分度方法即温标, 常用的有二种: 一是热力学温标 T , 单位是 K; 另一个是摄氏温标 t , 单位是 $^{\circ}\text{C}$. 热力学温度 T 和摄氏温度 t 的关系是: $t = T - 273.15$.

2. 平衡态和平衡过程

气体平衡状态的概念是个非常重要的概念. 一定质量的气体在一定容器内具有一定的体积 V , 不管气体内各部分原有的温度和压强如何, 经过相当长时间后, 气体内各部分终将达到相同的温度和压强. 如果它与外界没有能量交换、内部没有任何形式的能量转换(例如没有发生化学变化或原子核的变化等)、也没有外场作用, 则温度和压强将不随时间变化. 当整个气体处于均匀温度之下并且与它周围温度相同时, 该气体就处于热平衡之中. 当整个气体在外场不存在时处于均匀的压强之下, 该气体就处于力学平衡之中. 当整个气体化学成份处处均匀时, 该气体就处于化学平衡之中. 若某种气体处于热平衡、力学平衡与化学平衡之中, 我们就说它处在热力学平衡状态之中. 考虑到气体中热运动的存在, 气体的热力学平衡状态应该叫做热动平衡状态. 气体分子的热运动是永不停息的, 通过气体分子的热运动和相互碰撞, 在宏观上表现为气体各部分的密度均匀、温度均匀和压强均匀的热动平衡状态. 一定质量的气体的平衡状态, 可用状态参量 p 、 V 、 T 的一组参量值来表示, 例如一组参量值 p_1 、 V_1 、 T_1 表示某一状态, 另一组参量值 p_2 、 V_2 、 T_2 表示另一状态等等.

当气体的外界条件改变时, 它的状态就发生变化. 气体从一个状态不断地变化到另一状态, 所经历的是个状态变化的过程. 过程进展的速度可以很快, 也可以很慢. 实际过程常是比较复杂的. 如果过程进展得十分缓慢, 使所经历的一系列中间状态, 都无限接近平衡状态, 这个过程就叫做平衡过程. 显然, 平衡过程是个理想的过程, 它和实际过程毕竟是有差别的, 但在许多情况下, 可近似地把实际过程当作平衡过程处理, 所以平衡过程是个很有用的概念.

3. 理想气体的状态方程

实验表明,表示平衡态的三个参量 p 、 V 、 T 之间存在着一定的关系.我们把反映气体的 p 、 V 、 T 之间的关系式叫做气体的状态方程.一般气体,在密度不太高、压强不太大(与大气压比较)和温度不太低(与室温比较)的实验范围内,遵守玻意耳(R. Boyle)定律、盖-吕萨克(J. L. Gay-Lussac)定律和查理(J. A. C. Charles)定律.应该指出,对不同气体来说,这三条定律的适用范围是不同的,不易液化的气体,例如氮、氢、氧、氮等适用的范围比较大.实际上在任何情况下都服从上述三条实验定律的气体是没有的.我们把实际气体抽象化,提出理想气体的概念,认为理想气体能无条件地服从这三条实验定律.理想气体状态的三个参量 p 、 V 、 T 之间的关系即理想气体状态方程,可从这三条实验定律导出.当质量为 M 、摩尔质量为 M_{mol} 的理想气体处于平衡态时,它的状态方程为

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT \quad (6-1)$$

式中的 R 叫做摩尔气体常量.在国际单位制中,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1.013 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \times 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}{273.15 \text{ K}} \\ &= 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \end{aligned}$$

从式(6-1)可以看到,如果气体的温度 T 一定,则 p 、 V 之间的关系,在 p - V 图上是一条等轴双曲线的关系,这曲线叫做理想气体的等温线.图 6-1 中所示是不同温度下的几条等温线,位置愈高的等温线,相应的温度愈高.上面曾指出,一定质量气体的每一个平衡状态可用一组(p 、 V 、 T)的量值来表示,由于 p 、 V 、 T 之间存在着式(6-1)所示的关系,所以通常用 p - V 图上的一点表示气体的平衡状态.而气体的一个平衡过程,在 p - V 图上则用一条相应的曲线来表示.如图 6-2 中所示,曲线 I、II 表示从初状态(p_1 、 V_1 、

T_1)向末状态(p_2, V_2, T_2)缓慢变化的一个平衡过程.

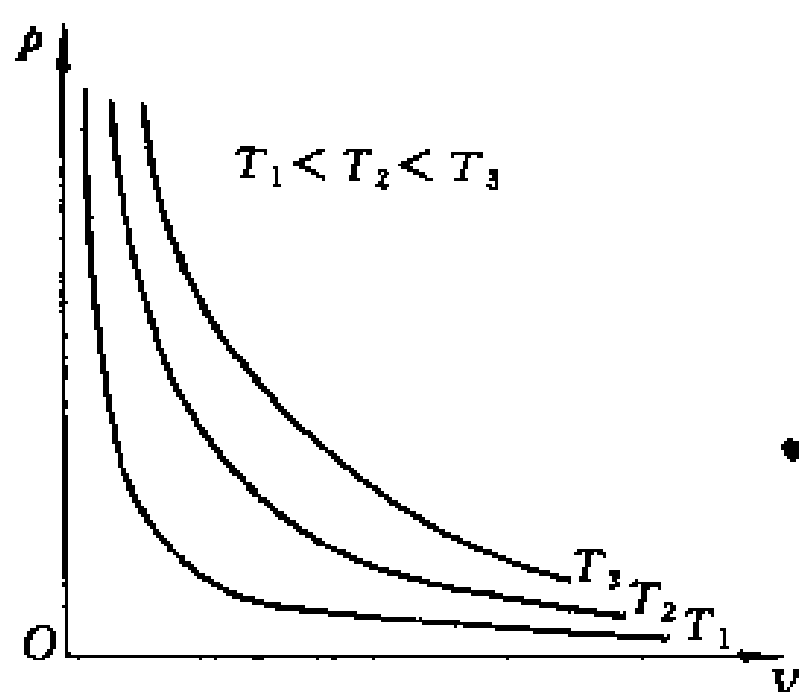


图 6-1 一定质量理想气体的等温线

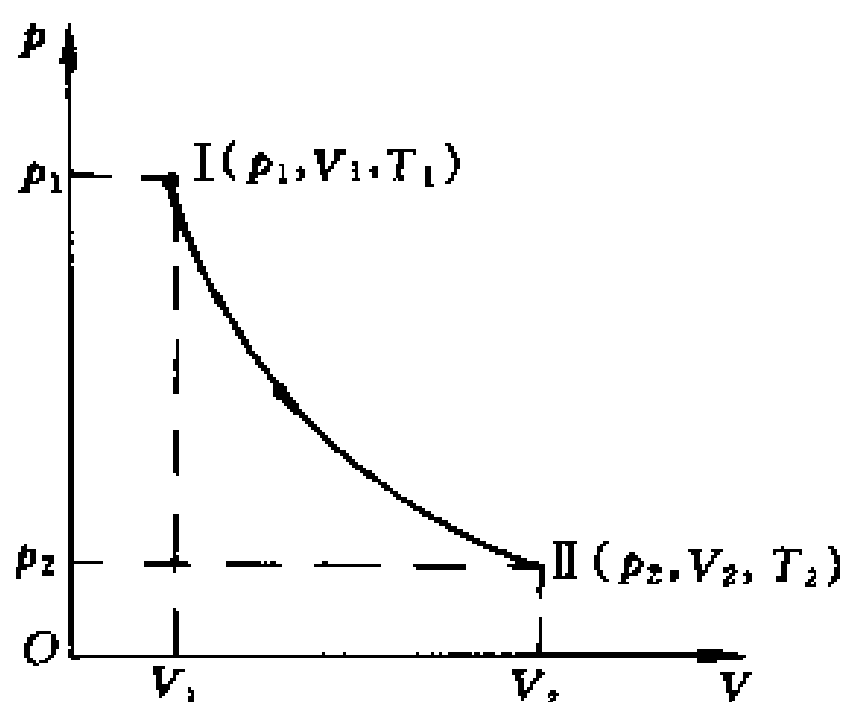


图 6-2 平衡状态和平衡过程的示意图

例题 6-1 某种柴油机的气缸容积为 $0.827 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. 设压缩前其中空气的温度是 47°C , 压强为 $8.5 \times 10^4 \text{ Pa}$. 当活塞急剧上升时, 可把空气压缩到原体积的 $\frac{1}{17}$, 使压强增加到 $4.2 \times 10^6 \text{ Pa}$, 求这时空气的温度. 如把柴油喷入气缸, 将会发生怎样的情况? (假设空气可看作理想气体.)

解 本题只需考虑空气的初状态和末状态, 并且把空气作为理想气体. 由式(6-1), 我们有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

已知 $p_1 = 8.5 \times 10^4 \text{ Pa}$, $p_2 = 4.2 \times 10^6 \text{ Pa}$, $T_1 = 273 \text{ K} + 47 \text{ K} = 320 \text{ K}$, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{17}$, 所以

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = 930 \text{ K}$$

这一温度已超过柴油的燃点, 所以柴油喷入气缸时就会立即燃烧, 发生爆炸, 推动活塞做功.

例题 6-2 容器内装有氧质量为 0.10 kg , 压强为 $10 \times 10^5 \text{ Pa}$,

温度为 $47\text{ }^{\circ}\text{C}$. 因为容器漏气, 经过若干时间后, 压强降到原来的 $\frac{5}{8}$, 温度降到 $27\text{ }^{\circ}\text{C}$. 问: (1) 容器的容积有多大? (2) 漏去了多少氧气? (假设氧气可看作理想气体.)

解 (1) 根据理想气体状态方程, $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT$, 求得容器的容积 V 为

$$V = \frac{MRT}{M_{\text{mol}}p} = \frac{0.10 \times 8.31 \times 10^{-5} \times (273 + 47)}{0.032 \times 10} \text{ m}^3 \\ = 8.31 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

(2) 设漏气若干时间之后, 压强减小到 p' , 温度降到 T' . 如果用 M' 表示容器中剩余的氧气的质量, 从状态方程求得

$$M' = \frac{M_{\text{mol}}p'V}{RT'} = \frac{0.032 \times \frac{5}{8} \times 10 \times 8.31 \times 10^{-3}}{8.31 \times 10^{-5}(273 + 27)} \text{ kg} \\ = 6.67 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

所以漏去的氧气的质量为

$$\Delta M = M - M' = (0.10 - 6.67 \times 10^{-2}) \text{ kg} = 3.33 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

§ 6-2 分子热运动和统计规律

物质的分子原子结构学说是气体动理论的重要基础之一. 按照物质结构理论, 自然界所有物体都由许多不连续的、相隔一定距离的分子组成, 而分子则由更小的原子组成. 所有物体的原子和分子都处在永不停息的运动之中. 实验告诉我们, 热现象是物质中大量分子无规则运动的集体表现, 因此人们把大量分子的无规则运动叫做分子热运动. 布朗(R. Brown)在 1827 年, 用显微镜观察到浮悬在水中的植物颗粒(如花粉等), 不停地在作纷乱的无定向运动(见图 6-3), 这就是所谓布朗运动. 布朗运动是由杂乱运动的流体分子碰撞植物颗粒引起的, 它虽不是流体分子本身的热运动, 却

如实地反映了流体分子热运动的情况. 流体的温度愈高, 这种布朗运动就愈剧烈.

在标准状态下, 对同一物质来说, 气体的密度大约为液体的 $1/1000$. 设液体分子是紧密排列着的, 那么气体分子之间的距离大约是分子本身线度 (10^{-10} m) 的 $\sqrt[3]{1000}$ 倍, 亦即 10 倍左右. 所以, 可把气体看作是彼此相距很大间隔的分子集合. 在气体中, 由于分子的分布相当稀疏, 分子与分子间的相互作用力, 除了在碰撞的瞬间以外, 极为微小. 在连续两次碰撞之间分子所经历的路程, 平均约为 10^{-7} m, 而分子的平均速率很大,

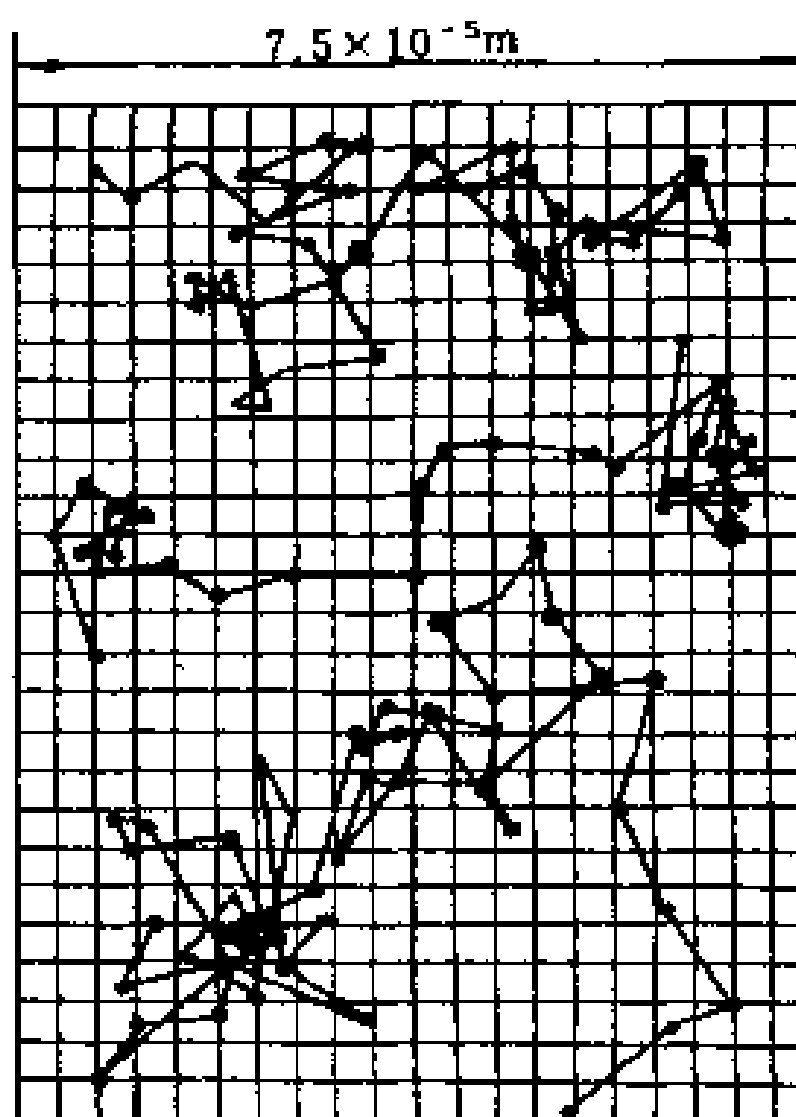


图 6-3 布朗运动

约为 500 m/s. 因此, 平均大约经过 10^{-10} s, 分子与分子之间碰撞一次, 即在 1 s 钟内, 一个分子将遭到 10^{10} 次碰撞. 分子碰撞的瞬间, 大约等于 10^{-13} s, 这一时间远比分子自由运动所经历的平均时间 10^{-10} s 为小. 因此, 在分子的连续两次碰撞之间, 分子的运动可看作由其惯性支配的自由运动. 每个分子由于不断地经受碰撞, 速度的大小跳跃地改变着, 运动的方向也或前或后, 忽左忽右, 不断地无定向地改变着, 在连续两次碰撞之间所自由运行的路程也或长或短, 参差不齐. 它们在我们面前呈现出一幅纷繁动乱的图象. 至于上述数据的由来, 我们以后自会明白.

1. 分子热运动的基本特征

上面的图象告诉我们: 分子热运动的基本特征是分子的永恒运动和频繁的相互碰撞. 显然, 具有这种特征的分子热运动是一种比较复杂的物质运动形式, 它与物质的机械运动有本质上的区别.

因此,我们不能简单地用力学方法来解决它.如果我们想追踪气体中某个分子的运动,那么,我们将看到它忽而东,忽而西,或者上,或者下,有时快,有时慢.对它列出运动方程是很困难的.而且,在大量分子中,每个分子的运动状态和经历(状态变化的历程)都可以和其他分子有显著的差别,这些都说明了分子热运动的混乱性或无序性.值得注意的是,尽管个别分子的运动是杂乱无章的,但就大量分子的集体来看,却又存在着一定的统计规律,这是分子热运动统计性的表现.例如,在热力学平衡状态下,气体分子的空间分布,按密度来说是均匀的.据此,我们假设:分子沿各个方向运动的机会是均等的,没有任何一个方向上气体分子的运动比其他方向更占优势.也就是说,沿着各个方向运动的平均分子数应该相等,分子速度在各个方向上的分量的各种平均值也应该相等.气体分子数目愈多,这个假设的准确度就愈高.当然,这并不意味着我们所假设的分子数目的精确度能达到一个分子.由于运动的分子的数目非常巨大,如果该数目有几百个,甚至有几万个分子的偏差,在百分比上仍是非常微小的.这一切说明分子热运动除了具有无序性外,还服从统计规律,具有鲜明的统计性.两者的关系十分密切.

每一个运动着的分子或原子都有大小、质量、速度、能量等,这些用来表征个别分子性质的物理量叫做微观量.一般在实验中测得的是表征大量分子集体特征的量,叫做宏观量.气体的温度、压强、热容等就是宏观量.分子热运动的无序性和统计性,使我们认识到:在气体动理论中,必须运用统计方法,求出大量分子的某些微观量的统计平均值,并用以解释在实验中直接观测到的物体的宏观性质.用对大量分子的平均性质的了解代替个别分子的真实性质,这是统计方法的一个特点.与这个特点密切相关的统计方法的另一个特点是起伏现象的存在.例如,我们多次测量某体积中的气体密度,可以发现,各次测得的分子数都略有差别.根据多次的测量值,可以建立分子数的平均值.对此平均值而言,个别测量值

都有微小的偏差,这种相对于平均值所出现的偏离,就是起伏现象.当分子数目很大时,测量值对平均值的起伏是极为微小的.在很稀薄的气体中,起伏将显著起来.上面提到的布朗运动是一种起伏现象.在测量电信号时出现的噪音,也是一种起伏现象.

2. 分布函数和平均值

现在,我们将注意力转到分布函数与平均值的计算上来.凡是不能预测而又大量出现的事件,叫做偶然事件.多次观察同样的事件,就可获得该事件的分布知识.现在举一个简单的例子,我们讨论某城市中每个商店里职工的分布情况,为此而引入分布数的概念.设 N_i 表示该城市中有 i 名职工的商店数,我们就把 N_i 叫做分布数,而 $N = \sum N_i$ 则为商店总数.知道了分布数,我们对该城市中商店职工的分布情况就有所了解.进一步还可引入“归一化的分布数” $f_i = N_i/N$,用以说明有 i 名职工的商店的百分数.根据百分数的含义,显然下式应当成立:

$$\sum f_i = \sum \frac{N_i}{N} = \frac{\sum N_i}{N} = 1$$

这个关系表明,把所有百分数全部相加,其总和只能是 100%,即等于 1.通常把上式叫做归一化条件.

在上面的讨论中, i 的值只可能是正整数或等于零.如果 i 所取的是连续间隔内的值,这时用公式来描述要稍许困难些.假定我们要想知道某一团体中年龄为 21 岁的成人的高度分布情况,这时就不能应用上式.因为恰好具有某个高度 h ——例如恰好是 1.800 m——的人数几乎为零.但是,如果要问高度在某一间隔,例如在 1.700 m 与 1.800 m 之间的人数,就能得到一个肯定而有意义的回答.因此,有关高度分布的知识可这样求得:将整个高度范围分成许多大小相等的微小间隔 Δh ,测定每个微小高度间隔内的人数.我们把各个微小间隔取得相等,为的是便于进行比较,从而突出分布的意义;所取间隔愈小,有关分布的情况就愈详细,对分布

情况的描述也就愈精确. 这样调查出来的结果可以画成方块形的图, 横坐标表示高度及其间隔, 而纵坐标则为每个高度间隔内人数的百分数. 这个图示将有许多相比邻的矩形, 每个矩形的宽度均为 Δh , 而高度则为在这间隔内人数的百分数. 实际上, 更适合于取作纵坐标的并不是在一定间隔内人数的百分数, 而是在这间隔内人数的百分数除以间隔的大小 Δh . 这样做的好处是, 由每个矩形的面积即可得出在该特定间隔内人数的百分数. 我们用 ΔF_i 表示高度在 h_i 与 $h_i + \Delta h$ 间隔之内人数的百分数, 这样, 引入 $f_i = \Delta F_i / \Delta h$, 其意义为在高度 h_i 附近单位高度间隔内人数的百分数, 再画出 f_i 对 h_i 的图 6-4(a).

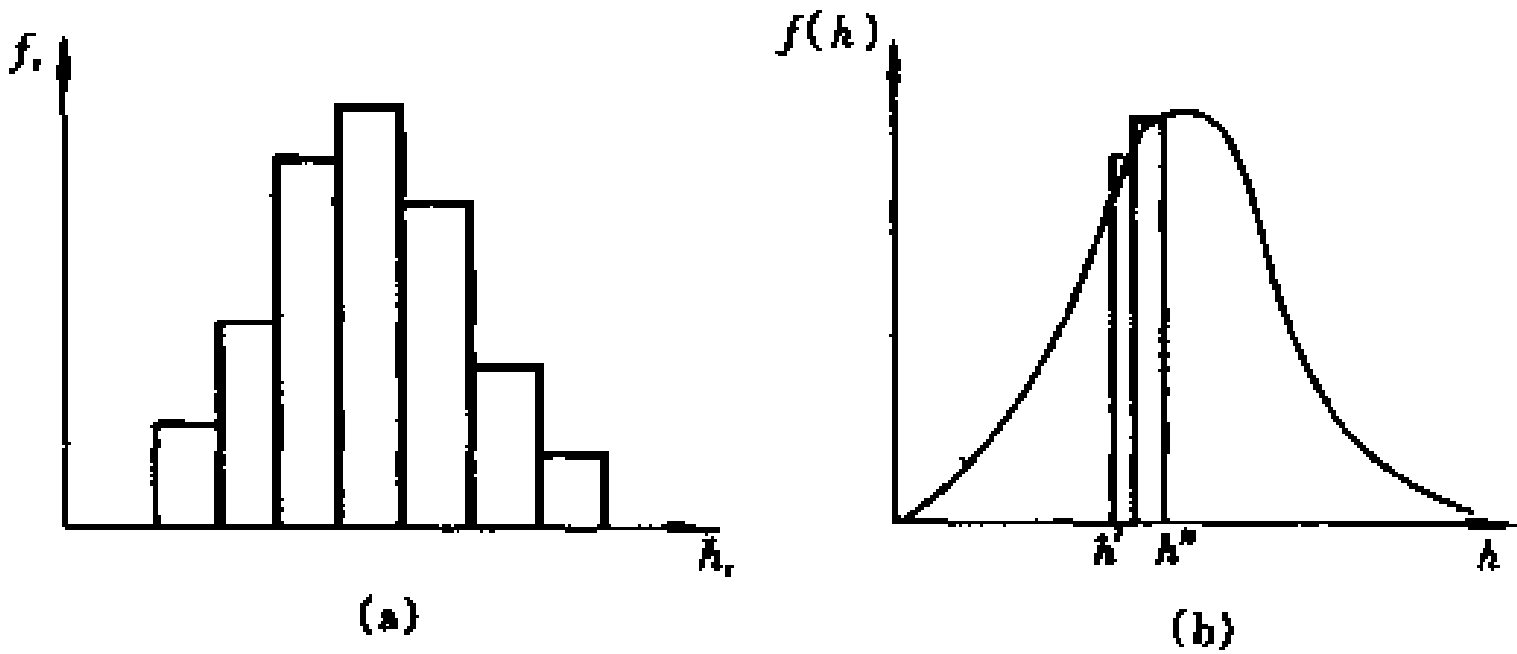


图 6-4 分布图示法

在人口数非常大的情况下, 我们可将间隔 Δh 连续地缩小, 直到这些矩形成极窄的条纹, 它们顶部的梯形轮廓将显得趋近于光滑的曲线, 这条曲线揭示了 f_i 与 h 的函数关系. 我们以后将用 $f(h)$ 代替 f_i , 把 $f(h)$ 叫做相对于高度的归一化分布函数, 而由 $f(h)$ 对 h 所画出的曲线则叫做分布曲线, 如图 6-4(b) 所示. 分布曲线的令人注目的特性是它的重演性. 如多年分析人口的身长, 可以相信这些分布曲线是相似的. 如果身材高度分布曲线不是以大量观察为基础, 那么, 就没有这种相似性. 如果增加构成每条曲线的资料, 这样, 各年的曲线就愈加相似. 这种情况对于任何偶然事件的分布曲线都适用, 只要事件是偶然发生的以及获得分布曲线的条件没有改变. 在整个曲线下的面积按归一化条件为

$$\int f(h)dh = 1 \quad (6-2)$$

而介乎 $h=h'$ 与 $h=h''$ 之间的那部分面积,则表示高度在 h' 与 h'' 之间人数的百分数. 对某一个任意选定的人来说, $f(h)dh$ 也可理解为他的高度在 h 与 $h+dh$ 之间的概率. 知道了 $f(h)$ 和人口总数 N , 则高度在 h 与 $h+dh$ 之间的人数 dN 即可求得为

$$dN = Nf(h)dh \quad (6-3)$$

不仅如此,知道了分布函数 $f(h)$, 我们还可计算人口的平均高度 $\bar{h}$. 按式(6-3), 高度在 h 与 $h+dh$ 间隔内的 dN 个人的总高度为 hdN , 这样, N 个人的平均高度当为 N 个人的总高度除以人口总数, 即

$$\bar{h} = \frac{\int hdN}{N} = \frac{\int Nh f(h)dh}{N} = \int h f(h)dh \quad (6-4)$$

对具有统计性的事物来说, 在一定的宏观条件下, 总存在着确定的分布函数. 因此, 由式(6-4)所表示的知道分布函数求平均值的方法是有普遍意义的, 不仅仅适用于高度的计算. 在物理学中, 我们可把 h 理解为要求平均值的任一物理量.

§ 6-3 气体动理论的压强公式

1. 理想气体的微观模型

从气体动理论的观点来看, § 6-1 所讲的理想气体是和物质分子结构的一定微观模型相对应的, 根据这种模型就能在一定程度上解释宏观实验的结果. 我们从气体分子热运动的基本特征出发, 认为理想气体的微观模型应该是这样的:

(1) 气体分子的大小与气体分子间的距离相比较, 可以忽略

不计. 这个假设体现了气态的特性.

(2) 气体分子的运动服从经典力学规律. 在碰撞中, 每个分子都可看作完全弹性的小球. 这个假设的实质是, 在一般条件下, 对所有气体分子来说, 经典描述近似有效, 不需要采用量子论.

(3) 因气体分子间的平均距离相当大, 所以除碰撞的瞬间外, 分子间相互作用力可忽略不计. 除非研究气体分子在重力场中的分布情况, 否则, 因分子的动能平均说来远比它在重力场中的势能为大, 所以这时分子所受重力也可忽略.

总之, 气体被看作是自由地、无规则地运动着的弹性球分子的集合. 这种模型就是理想气体的微观模型. 提出这种模型, 是为了便于分析和讨论气体的基本现象. 在具体运用时, 鉴于分子热运动的统计性, 还必须作出统计的假设. 例如, 根据气体处在平衡状态时, 气体分子的频繁碰撞以及气体在容器中密度处处均匀的事实, 可以假定: 对大量气体分子来说, 分子沿各个方向运动的机会是均等的, 任何一个方向的运动并没有比其他方向更占优势. 换句话说, 我们假定, 对处于热力学平衡状态中的气体来说, 分子在容器内既没有突出的位置, 也没有突出的运动方向. 在具体运用这个统计性假设时, 可以认为沿各个方向运动的分子数目相等, 分子速度在各个方向的分量的各种平均值也相等.

2. 速率分布函数

现在, 我们将引入分子数密度与分子的速率分布函数的概念, 为推导压强公式作准备. 设一定量的气体占有的体积为 V , 它的总分子数为 N , 则分子数密度 $n = \frac{N}{V}$. 应该指出, n 是个平均值. 在任一时刻, 一个特定体积内的分子数, 可以和平均值相差很大, 或者说, 分子数密度经历着起伏. 其次, 让我们把注意力转向分子的速率分布问题. 设 dN 为速率分布在某一间隔 $v \sim v + dv$ (例如 $500 \sim 510$ m/s 或 $600 \sim 610$ m/s) 内的分子数, 它的大小与间隔的大小

dv 成正比, 则 dN/N 就表示分布在这一间隔内的分子数占总分子数的百分数. 显然 dN/N 也与 dv 成正比. 当我们在不同的速率 v (例如 500m/s 与 600m/s) 附近取相等的间隔 (如 $dv=10\text{m/s}$) 时, 不难发现, 百分数 dN/N 的数值一般是不相等的. 所以 dN/N 还与速率 v 有关. 这样, 我们有

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv \quad (6-5)$$

式中的 $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ 就是上节中所介绍的分布函数, 它表示速率分布在 v 附近单位速率间隔内的分子数占总分子数的百分数. 对于处在一定温度下的气体, $f(v)$ 只是速率 v 的函数, 叫做气体分子的速率分布函数. 根据分布函数的定义, 归一化条件成立:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1 \quad (6-6)$$

在气体理论中有些问题的研究可不需要函数 $f(v)$ 的具体形式, 理想气体的压强公式就是其中一例.

3. 理想气体压强公式的推导

让我们考察器壁上的一个面积元 dS . 在弹性球分子和 dS 的一次弹性碰撞中, 接触力垂直地作用在 dS 上, 因此分子速度平行于 dS 的分量不因碰撞而改变. 又因碰撞是弹性的, 所以速度的垂直分量将因碰撞而反向. 于是, 分子就像从光滑镜面上所见的那样从 dS 反射回来; 这就是说, 反射角等于入射角 [参看图 6-5(a)]. 设我们采用原点在 dS 中心, 而极轴 (z) 沿 dS 法线的球坐标系 r 、 θ 、 φ . 质量为 m , 速度为 v 的分子的动量改变是沿 z 方向的. 分子在碰撞前的 z 方向动量为 $-mv_z$, 碰撞后的 z 方向动量为 mv_z , 该分子的动量的增量等于 $2mv_z$; 由动量定理, 在弹性碰撞中, 分子给予器壁的冲量的大小也等于 $2mv_z$.

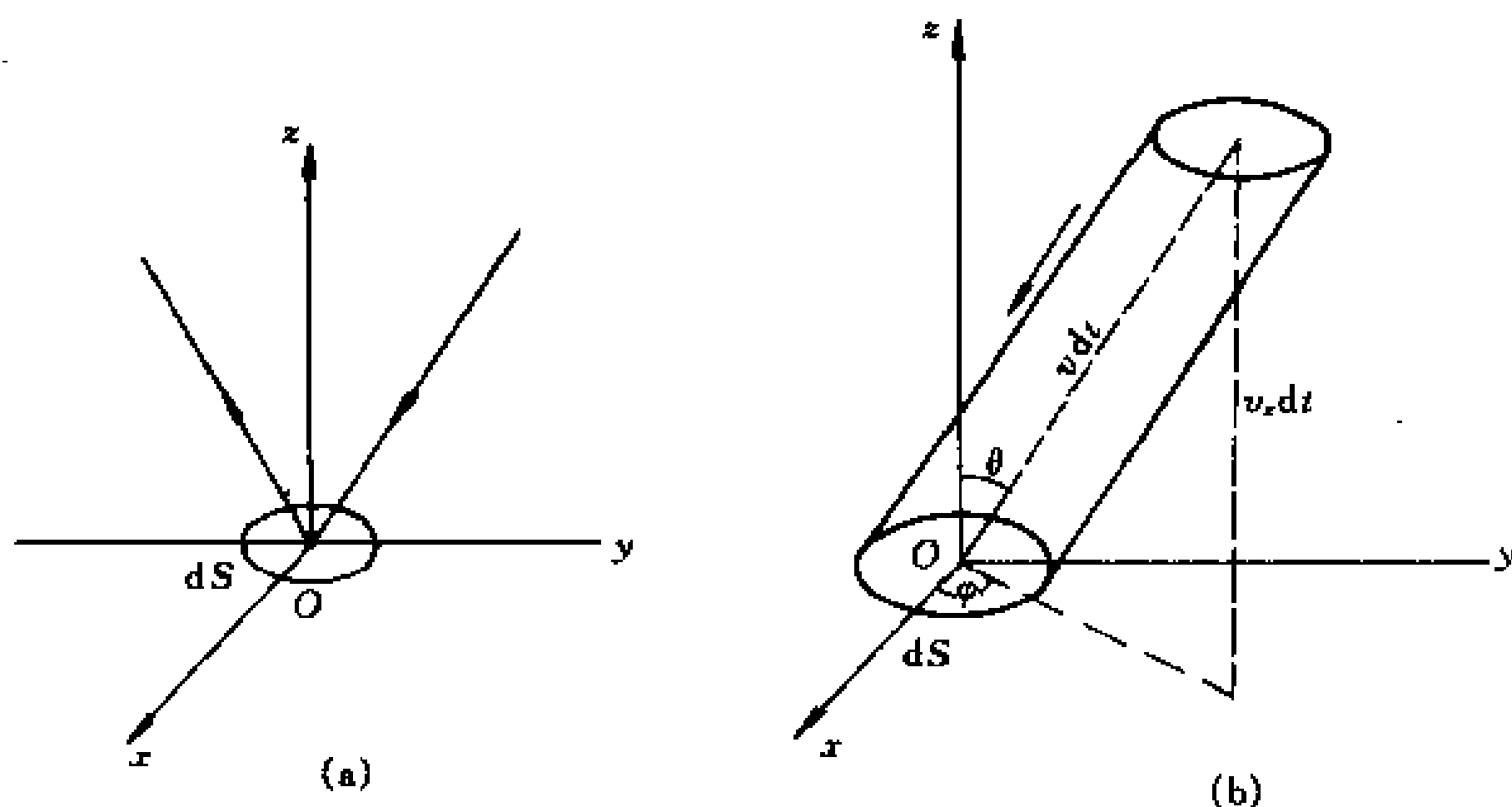


图 6-5

为了考虑在 dt 时间内,所有以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动而能够碰到 dS 的分子数目,我们在空间划取一个以 dS 为底,几何轴平行于 $\boldsymbol{v}$ 方向,倾斜长度为 $v dt$ 的斜柱体,如图 6-5(b)所示.斜柱体的高度为 $v_z dt$,而体积为 $v_z dt dS$.凡是速度矢量无限邻近 $\boldsymbol{v}$,并能在 dt 时间内碰到 dS 的分子,都应容纳在这个斜柱体之内.因单位体积内的分子数为 n ,在其中速度矢量邻近于 $\boldsymbol{v}$ 的分子数目有多少呢?考虑到 $f(v)$ 表示分布在速率 v 附近单位速率间隔内的分子百分数,则速率在 v 与 $v + dv$ 间隔内分子百分数应该是 $f(v)dv$.所以,在 n 个分子内,速率在 v 与 $v + dv$ 间隔内的分子数就是 $nf(v)dv$.但是,我们需要的是速度矢量在 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$ 间隔内的分子数.两者数值是不同的.前者不考虑速度的方向,只考虑速度的大小,相应的分子数来得大;后者既考虑速度的方向,又考虑速度的大小,这个分子数应是前面分子数的一部分,可从 $nf(v)dv$ 乘一个小于 1 的因子而求得.我们曾假设分子运动没有突出的方向,因此,速度矢

量处在围绕 $\boldsymbol{v}$ 的立体角元 $d\Omega$ 内的几率就是 $d\Omega/4\pi$ ^①。用这个小于1的 $d\Omega/4\pi$ 乘 $nf(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}$ ，即得单位体积内速度在 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ 间隔内的分子数为

$$nf(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}(d\Omega/4\pi)$$

因每个分子在弹性碰撞中给予器壁冲量的量值为 $2mv_x$ ，所以，在斜柱体内相应分子给予器壁的总冲量为

$$nf(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}(d\Omega/4\pi) \cdot 2mv_x \cdot v_x dt \cdot dS \quad (6-7)$$

用 dp' 表示斜柱体内这群分子作用在器壁上的压强，则上述总冲量也可表示为 $dp' \cdot dS \cdot dt$ ，于是得

$$dp' = nf(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v} \cdot 2mv_x^2(d\Omega/4\pi) \quad (6-7a)$$

采用速度 $\boldsymbol{v}$ 的极角 θ 与方位角 φ ，可得 $v_x = v\cos\theta$ 与 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 。对 $\boldsymbol{v}$ 的所有可能方向积分，求得速率在 v 与 $v+dv$ 之间的分子对压强的贡献为

$$\begin{aligned} dp &= \frac{1}{2\pi} nf(\boldsymbol{v})dv \cdot mv^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} nmv^2 f(\boldsymbol{v})dv \end{aligned} \quad (6-8)$$

此处对 θ 的积分从0伸展到 $\pi/2$ ，因为分子只是从一侧趋近 dS 的。由上式的积分，求出所有以不同速度碰撞器壁的分子所作用的压强

$$p = \frac{1}{3} nm \int_0^\infty v^2 f(\boldsymbol{v}) dv \quad (6-9)$$

与式(6-4)比较，不难看出

① 在球心为 O 、半径为 r 的球面上，任取一面积 S ，把 S 边缘上各点与 O 连结起来，即得一锥体，锥体的顶角即为面积 S 对 O 点所张的立体角 Ω ，它的大小以比值 $\Omega = \frac{S}{r^2}$ 来定义。因 S 的最小值与最大值分别为0与 $4\pi r^2$ ， Ω 就取0与 4π 间的数值。立体角元被写成 $d\Omega = \frac{dS_0}{r^2}$ ，此处 dS_0 是半径为 r 的球面上所张开的面积元。采用球坐标，可得 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 。

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

是速率的平方的平均值，因而有

$$p = \frac{1}{3}nm \overline{v^2} \quad (6-9a)$$

我们引入分子的平均平动动能

$$\overline{w} = \frac{1}{2}m \overline{v^2} \quad (6-10)$$

而把式(6-9a)写成

$$p = \frac{2}{3}n \left(\frac{1}{2}m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3}n \overline{w} \quad (6-11)$$

式(6-11)是气体动理论的压强公式，我们从这个式子看出，气体作用在器壁上的压强，既和单位体积内的分子数 n 有关，又和分子的平均平动动能 $\overline{w}$ 有关。由于分子对器壁的碰撞是断断续续的，分子给予器壁的冲量是有起伏的，所以，压强是个统计平均量。在气体中，分子数密度 n 也有起伏，所以 n 也是个统计平均量。式(6-11)表示三个统计平均量 p 、 n 和 $\overline{w}$ 之间的关系，是个统计规律，而不是力学规律。

4. 压强公式的简单推导

上面采用统计方法推导压强公式，具有一定的代表性。现在介绍一种常用的推导方法。

为计算方便，我们选一个边长分别为 l_1 、 l_2 、 l_3 的长方形容器（图 6-6），并设容器中有 N 个同类气体的分子，作不规则的热运动，每个分子的质量都是 m 。

在平衡状态下，器壁各处的压强完全相同。现在我们计算器壁 A_1 面上所受的压强。先选一分子 a 来考虑，它的速度是 v ，在 x 、 y 、 z 三个方向上的速度分量分别为 v_x 、 v_y 、 v_z 。当分子 a 撞击器壁 A_1 面时，它将受到 A_1 面沿 $-x$ 方向所施的作用力。因为碰撞是弹性

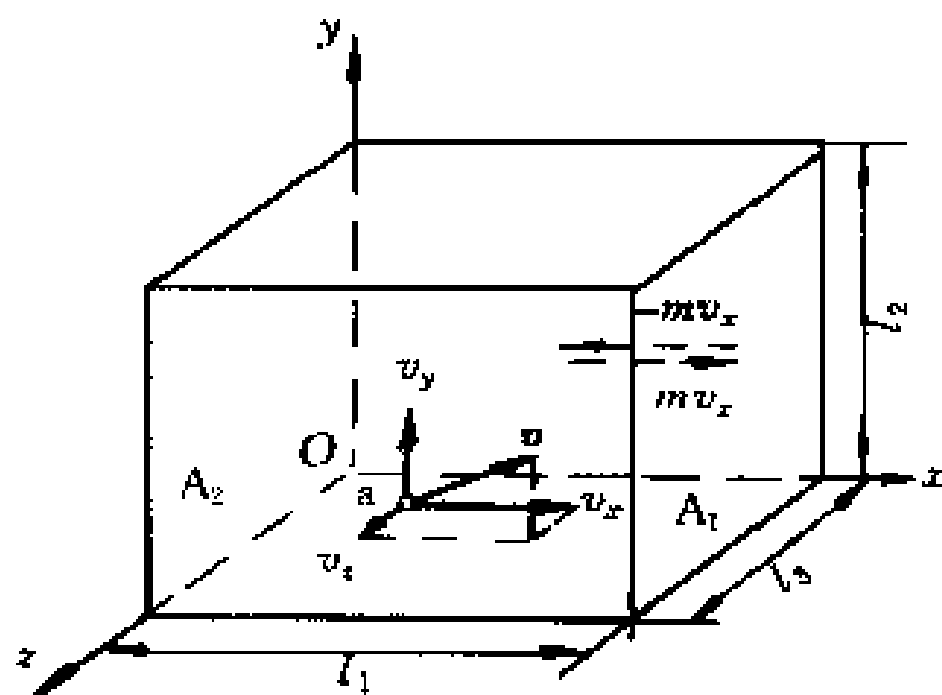


图 6-6 推导压强公式用图

的,所以就 x 方向的运动来看,分子 a 以速度 v_x 撞击 A_1 面,然后以速度 $-v_x$ 弹回. 这样,每与 A_1 面碰撞一次,分子动量的改变为 $(-mv_x - mv_x) = -2mv_x$. 按动量定理,这一动量的改变等于 A_1 面沿 $-x$ 方向、作用在分子 a 上的冲量. 根据牛顿第三运动定律,这时分子 a 对 A_1 面也必有一个沿 $+x$ 方向的同样大小的反作用冲量. 分子 a 从 A_1 面弹回,飞向 A_2 面,碰撞 A_2 面后,再回到 A_1 面. 在与 A_1 面作连续两次碰撞之间,由于分子 a 在 x 方向的速度分量 v_x 的大小不变,而在 x 方向上所经过的路程是 $2l_1$,因此所需时间为 $\frac{2l_1}{v_x}$. 在单位时间内,分子 a 就要与 A_1 面作不连续的碰撞共 $\frac{v_x}{2l_1}$ 次. 因为每碰撞一次,分子 a 作用在 A_1 面上的冲量是 $2mv_x$,所以,在单位时间内,分子 a 作用在 A_1 面上的冲量总值也就是作用在 A_1 面上的力即为 $2mv_x \cdot \frac{v_x}{2l_1}$.

从以上讨论可知,每一分子对器壁的碰撞以及作用在器壁上的力是间歇的、不连续的. 但是,事实上容器内所有分子对 A_1 面都在碰撞,使器壁受到一个连续而均匀的压强,正与密集的雨点打到雨伞上,我们感到一个均匀的作用力相似. A_1 面所受的平均力 $\bar{F}$ 的大小应该等于单位时间内所有分子与 A_1 面碰撞时所作用的冲量的总和,即

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \left(2mv_{ix} \frac{v_{ix}}{2l_1} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{l_1} = \frac{m}{l_1} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2$$

式中 v_{ix} 是第 i 个分子在 x 方向上的速度分量. 按压强定义得

$$\begin{aligned} p &= \frac{\bar{F}}{l_2 l_3} = \frac{m}{l_1 l_2 l_3} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \frac{m}{l_1 l_2 l_3} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2) \\ &= \frac{Nm}{l_1 l_2 l_3} \left(\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2}{N} \right) \end{aligned}$$

式中括弧内的量是容器内 N 个分子沿 x 方向速度分量的平方的平均值, 可写作 $\overline{v_x^2}$. 又因气体的体积为 $l_1 l_2 l_3$, 单位体积内的分子数

$n = \frac{N}{l_1 l_2 l_3}$, 所以上式可写作

$$p = nm \overline{v_x^2}$$

按上面所说的统计假设, 沿各个方向速度分量平方的平均值应该相等, 即 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. 又因为 $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$, 所以

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

此处 $\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2}{N}$ 为 N 个分子的速度平方的平均值. 考虑

到分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$, 代入上式得

$$p = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$$

§ 6-4 理想气体的温度公式

根据理想气体的压强公式和状态方程, 可以导出气体的温度与分子的平均平动动能之间的关系, 从而揭示宏观量温度的微观本质.

1. 温度的本质和统计意义

设每个分子的质量是 m , 则气体的摩尔质量 M_{mol} 与 m 之间应

有关系 $M_{\text{mol}} = N_A m$, 而气体质量为 M 时的分子数为 N , 所以 M 与 m 之间也有关系 $M = Nm$. 把这两个关系代入理想气体状态方程

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT, \text{ 消去 } m \text{ 而得}$$

$$p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T$$

式中 $\frac{N}{V} = n$, R 与 N_A 都是常量, 两者的比值常用 k 表示, k 叫做玻尔兹曼 (L. Boltzman) 常量.

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.31}{6.022 \times 10^{23}} \text{ J/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

因此, 理想气体状态方程可改写作

$$p = nkT \quad (6-12)$$

将上式和气体压强公式(6-11)比较, 得

$$\bar{w} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad (6-13)$$

上式是宏观量温度 T 与微观量 $\bar{w}$ 的关系式, 说明分子的平均平动动能仅与温度成正比. 换句话说, 该公式揭示了气体温度的统计意义, 即气体的温度是气体分子平均平动动能的量度. 由此可见, 温度是大量气体分子热运动的集体表现, 具有统计的意义; 对个别分子, 说它有温度是没有意义的.

当两种气体有相同的温度时, 这就意味着这两种气体的分子的平均平动动能相等. 若一种气体的温度高些, 这意味着这一种气体分子的平均平动动能大些. 按照这个观点, 热力学温度零度将是理想气体分子热运动停止时的温度, 然而实际上分子运动是永远不会停息的. 热力学温度零度也是永远不可能达到的, 而且近代理论指出, 即使在热力学温度零度时, 组成固体点阵的粒子也还保持着某种振动的能量, 叫做零点能量. 至于气体, 则在温度未达到热力学温度零度以前, 已变成液体或固体, 公式(6-13)也早就不能适

用.

皮兰(J. B. Perrin)对布朗运动的研究,进一步证实浮悬在温度均匀的液体中的不同微粒,不论其质量的大小如何,它们各自的平均平动动能都相等. 气体分子的运动情况和浮悬在液体中的布朗微粒相似,所以皮兰的实验结果,也可作为在同一温度下各种气体分子的平均平动动能都相等的一个证明.

2. 气体分子的方均根速率

从气体分子的平均平动动能公式(6-13),我们可以计算在任何温度下气体分子的方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$,它是气体分子速率的一种平均值.

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{mol}}} \tag{6-14}$$

表 6-1 列出了几种气体在温度 0℃时的方均根速率.

表 6-1 在 0℃时气体分子的方均根速率

气 体 种 类	方均根速率/(m·s ⁻¹)	摩尔质量/(10 ⁻³ kg·mol ⁻¹)
O ₂	4.61×10 ²	32.0
N ₂	4.93×10 ²	28.0
H ₂	1.84×10 ³	2.02
CO ₂	3.93×10 ²	44.0
H ₂ O	6.15×10 ²	18.0

注意在相同温度时虽然各种分子的平均平动动能相等,但它们的方均根速率并不相等.

例题 6-3 一容器内贮有气体,温度为 27℃. 问:(1)压强为 1.013×10⁵ Pa 时,在 1 m³ 中有多少个分子;(2)在高真空时,压强为 1.33×10⁻⁵ Pa,在 1 m³ 中有多少个分子?

解 按公式 $p=nkT$ 可知,

$$(1) \quad n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \text{ m}^{-3} = 2.45 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$(2) \quad n = \frac{p}{kT} = \frac{1.33 \times 10^{-5}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \text{ m}^{-3} = 3.21 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$$

可以看到,两者相差 10^{10} 倍.

例题 6-4 试求氮气分子的平均平动动能和方均根速率,设(1)在温度 $t=1000^\circ\text{C}$ 时,(2)在温度 $t=0^\circ\text{C}$ 时,(3)在温度 -150°C 时.

解 (1) 在 $t=1000^\circ\text{C}$ 时,

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 1273 \text{ J} = 2.63 \times 10^{-20} \text{ J}$$

$$\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 1273}{28 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 1.06 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(2) 同理,在 $t=0^\circ\text{C}$ 时,

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273 \text{ J} = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 273}{28 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 493 \text{ m/s}$$

(3) 在 $t=-150^\circ\text{C}$ 时,

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 123 \text{ J} = 2.55 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 123}{28 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 331 \text{ m/s}$$

§ 6-5 能量均分定理 理想气体的内能

1. 分子的自由度

我们在研究大量气体分子的无规则运动时,只考虑了每个分子的平动.实际上,气体分子具有一定大小和比较复杂的结构,不能看作质点.因此,分子的运动不仅有平动,还有转动与分子内原子间的振动.分子热运动的能量应将这些运动的能量都包括在

内. 为了说明分子无规则运动的能量所遵从的统计规律, 并在这个基础上计算理想气体的内能, 我们将借助于力学中自由度的概念.

现在根据力学中的概念来讨论分子的自由度数. 气体分子的情况比较复杂. 按分子的结构, 气体分子可以是单原子的、双原子的、三原子的或多原子的 (图 6-7). 由于原子很小, 单原子的分子

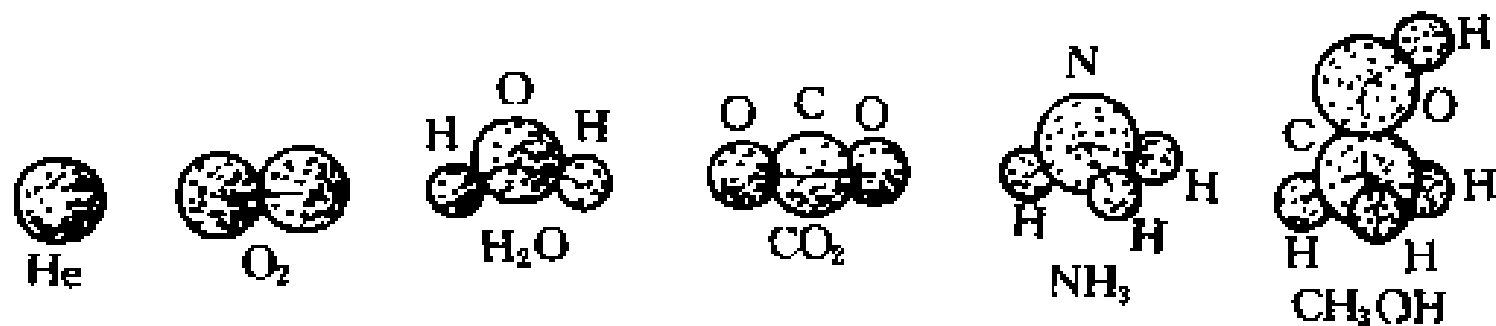


图 6-7 不同分子的结构

可以看作一质点; 又因气体分子不可能限制在一个固定轨道或固定曲面上运动, 因此单原子气体分子有 3 个自由度. 在双原子分子中, 如果原子间的相对位置保持不变, 那么, 这分子就可看作由保持一定距离的两个质点组成. 由于质心的位置需要用 3 个独立坐标决定, 连线的方位需用 2 个独立坐标决定, 而两质点以连线为轴的转动又可不计, 所以, 双原子气体分子共有 5 个自由度, 其中有 3 个平动自由度与 2 个转动自由度. 在 3 个及 3 个以上原子的多原子分子中, 如果这些原子之间的相对位置不变, 则整个分子就是个自由刚体, 它共有 6 个自由度, 其中 3 个属于平动自由度, 3 个属于转动自由度. 事实上, 双原子或多原子的气体分子一般不是完全刚性的, 原子间的距离在原子间的相互作用下, 要发生变化, 分子内部要出现振动. 因此, 除平动自由度和转动自由度外, 还有振动自由度. 但在常温下, 振动自由度可以不予考虑.

2. 能量均分定理

从理想气体分子的平均平动动能的公式

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

出发, 考虑到大量气体分子作杂乱无章的运动时, 各个方向运动的

机会均等的统计假设,我们就能推广而得到气体动理论中的一个重要原则——能量按自由度均分定理. 因为上式中 $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$, 此处 $\overline{v_x^2}$ 、 $\overline{v_y^2}$ 、 $\overline{v_z^2}$ 分别表示气体分子沿 x 、 y 、 z 三个方向上速度分量的平方的平均值. 又因分子运动没有突出的方向, 所以, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$, 这就是说

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{1}{2}kT$$

该式表明, 气体分子沿 x 、 y 、 z 三个方向运动的平均平动动能完全相等; 可以认为, 分子的平均平动动能 $\frac{3}{2}kT$ 是均匀地分配在每一个平动自由度上的. 因为分子平动有 3 个自由度, 所以相应于每一个平动自由度的能量是 $\frac{1}{2}kT$.

这个结论可以推广到刚性气体分子的转动上去. 由于气体分子热运动的无序性, 我们知道, 对于个别分子来说, 它在任一瞬时的各种形式的动能和总能量完全可与其他分子相差很大, 而且每一种形式的动能也不见得相等. 但是, 我们不要忘记分子之间进行着十分频繁的碰撞. 通过碰撞, 出现能量的传递与交换. 如果在全体分子中分配于某一运动形式或某一自由度上的能量多了, 那么, 在碰撞中能量由这种运动形式或这一自由度转换到其他运动形式或其他自由度的概率也随之增大. 因此, 在平衡状态时, 由于分子间频繁的无规则碰撞, 平均地说, 不论何种运动, 相应于每一自由度的能量都应该相等. 不仅各个平动自由度上的能量应该相等, 各个转动自由度上的能量也应该相等, 而且每个平动自由度上的能量与每个转动自由度上的能量都应该相等. 气体分子任一自由度的平均能量都等于 $\frac{1}{2}kT$. 如果气体分子有 i 个自由度, 则每个分子的总平均动能就是 $\frac{i}{2}kT$. 能量按照这样分配的原则, 叫做能量均分定理, 这个原则是关于分子无规则运动动能的统计规律, 是大量

分子统计平均所得出的结果,也是分子热运动统计性的一种反映.

如果气体分子不是刚性的,那么,除上述平动与转动自由度以外,还存在着振动自由度. 对应于每一个振动自由度,每个分子除有 $\frac{1}{2}kT$ 的平均动能外,还具有 $\frac{1}{2}kT$ 的平均势能,所以,在每一振动自由度上将分配到量值为 kT 的平均能量.

实际气体的分子运动情况视气体的温度而定. 例如氢分子,在低温时,只可能有平动,在室温时,可能有平动和转动,只有在高温时,才可能有平动、转动和振动. 又例如氯分子,在室温时已可能有平动、转动和振动.

3. 理想气体的内能

除了上述的分子平动(动能)、转动(动能)和振动(动能、势能)以外,实验还证明,气体的分子与分子之间存在着一定的相互作用力,所以气体的分子与分子之间也具有一定的势能. 气体分子的能量以及分子与分子之间的势能构成气体内部的总能量,称为气体的内能. 对于理想气体来说,不计分子与分子之间的相互作用力,所以分子与分子之间相互作用的势能也就忽略不计. 理想气体的内能只是分子各种运动能量的总和. 应该注意,内能与力学中的机械能有着明显的区别. 静止在地球表面上的物体的机械能(动能和重力势能)可以等于零,但物体内部的分子仍然在运动着和相互作用着,因此内能永远不会等于零. 下面我们只考虑刚性分子.

因为每一个分子总平均动能为 $\frac{i}{2}kT$, 而 1 mol 理想气体有 N_A 个分子,所以 1 mol 理想气体的内能是

$$E_0 = N_A \left(\frac{i}{2} kT \right) = \frac{i}{2} RT \quad (6-15)$$

而质量为 M (摩尔质量为 M_{mol}) 的理想气体的内能是

$$E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT$$

(6-16)

由此可知,一定量的理想气体的内能完全决定于分子运动的自由度 i 和气体的热力学温度 T ,而与气体的体积和压强无关.应该指出,这一结论与“不计气体分子之间的相互作用力”的假设是一致的,所以有时也把“理想气体的内能只是温度的单值函数”这一性质作为理想气体的定义内容之一.一定质量的理想气体在不同的状态变化过程中,只要温度的变化量相等,那么它的内能的变化量就相同,而与过程无关.以后,我们在热力学中,将应用这结果计算理想气体的热容量.

§ 6-6 麦克斯韦速率分布律

我们在讨论气体分子的平均平动动能时,求得了气体分子的方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$,它是分子速率的一种统计平均值.气体在平衡状态下,并非所有分子都以方均根速率运动,而是以各种大小的速度沿着各个方向运动着,而且由于相互碰撞,每一分子的速度都在不断地改变.因此,若在某一特定时刻去观察某一特定分子,它的速度具有怎样的量值和方向,完全是偶然的.然而从大量分子的整体来看,在平衡状态下,它们的速率分布却遵从着一定的统计规律.有关规律早在 1859 年由麦克斯韦(J. C. Maxwell)应用统计概念首先导出.因受技术条件的限制,气体分子速率分布的实验,直到本世纪 20 年代才实现.为了说明方便起见,我们先来考察测定气体分子速率的实验.

1. 分子速率的实验测定

图 6-8 所示是一种用来产生分子射线并可观测射线中分子速率分布的实验装置,全部装置放在高真空的容器里.图中 A 是一个恒温箱,其中产生着金属蒸气(金属蒸气可用电炉将金属加热而得到),蒸气分子从 A 上小孔射出,经狭缝 S 形成一束定向的细窄

射线. B 和 C 是两个共轴圆盘, 盘上各开一狭缝, 两缝略为错开, 成一小角 φ (约 2°). P 是一个接受分子的胶片屏.

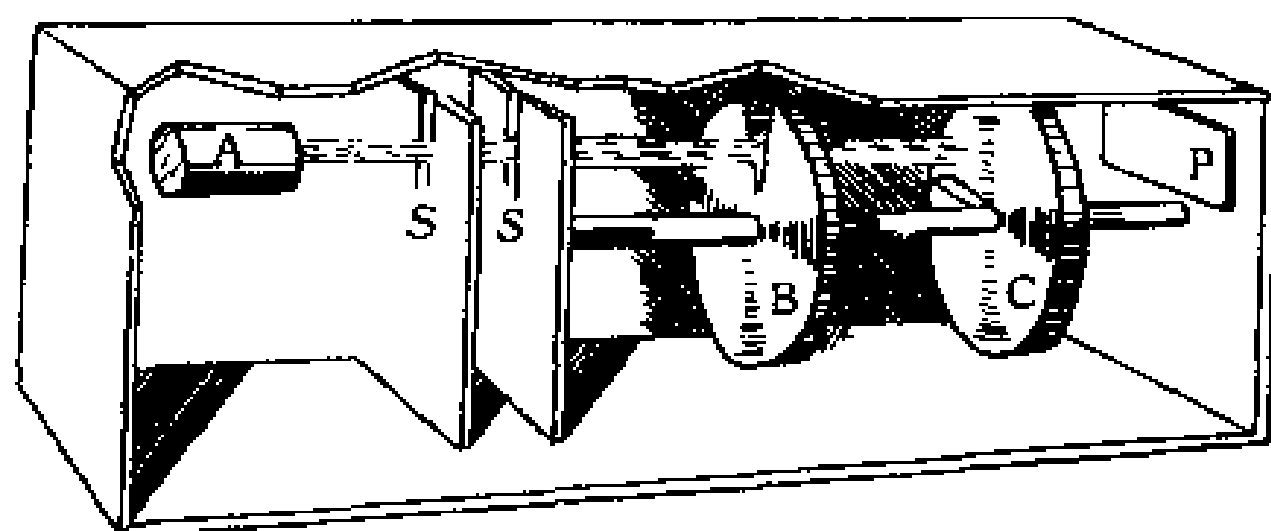


图 6-8 测定分子速率的实验装置的示意图

当圆盘以角速度 ω 转动时, 圆盘每转一周, 分子射线通过 B 的狭缝一次. 由于分子的速度大小不同, 分子自 B 到 C 所需的时间也不同, 所以并非所有通过 B 盘狭缝的分子, 都能通过 C 盘狭缝而射到 P 上. 如果以 l 表示 B 和 C 之间的距离, φ 表示 B 和 C 两狭缝所成的角度, 设分子速度的大小为 v , 分子从 B 到 C 所需的时间为 t , 则只有满足 $vt=l$ 和 $\omega t=\varphi$ 关系的分子才能通过 C 的狭缝射到屏 P 上. 因为

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\varphi}{\omega}$$

所以

$$v = \frac{\omega}{\varphi} l$$

这就是说, B 和 C 起着速度选择器的作用, 改变 ω (或 l 及 φ), 可使速度大小不同的分子通过. 由于 B 和 C 的狭缝都有一定的宽度, 所以实际上当角速度 ω 一定时, 能射到 P 上的分子的速度大小并不严格相同, 而是分布在一个区间 $v \sim v + \Delta v$ 内的.

实验时, 令圆盘先后以各种不同的角速度 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 转动, 用光度学的方法测量各次在胶片上所沉积的金属层的厚度, 从而可以比较分布在不同间隔 (如 $v_1 \sim v_1 + \Delta v_1, v_2 \sim v_2 + \Delta v_2, \dots$) 内分子数的相对比值.

实验结果表明：一般地说，分布在不同间隔内的分子数是不相同的，但在实验条件（如分子射线强度、温度等）不变的情况下，分布在各个间隔内分子数的相对比值却是完全确定的。尽管个别分子的速度大小是偶然的，但就大量分子整体来说，其速度大小的分布却遵守着一定的规律。这种规律叫做统计分布规律。

2. 麦克斯韦速率分布律

研究气体分子速率的分布情况，与 § 6-3 中研究一般的分布问题相似，需要把速率按其大小分成若干相等的间隔。例如从 $0 \sim 100 \text{ m/s}$ 为一个间隔， $100 \sim 200 \text{ m/s}$ 为次一间隔， $200 \sim 300 \text{ m/s}$ 为又一间隔等等。我们要知道，气体在平衡状态下，分布在各个间隔之内的分子数各占气体分子总数的百分数为多少，以及大部分分子的速率分布在哪个间隔之内等等。一句话，就是要知道气体分子的速率分布函数 $f(v)$ 。设气体分子总数为 N ，速率在 v 与 $v + \Delta v$ 间隔内的分子数为 ΔN ，则按定义， $f(v) = \frac{\Delta N}{N \Delta v}$ 为在速率 v 附近单位速率间隔内气体分子数所占的百分数；对单个分子来说，它表示分子具有速率在该单位速率间隔内的概率。麦克斯韦经过理论研究，指出在平衡状态中气体分子速率分布函数的具体形式是

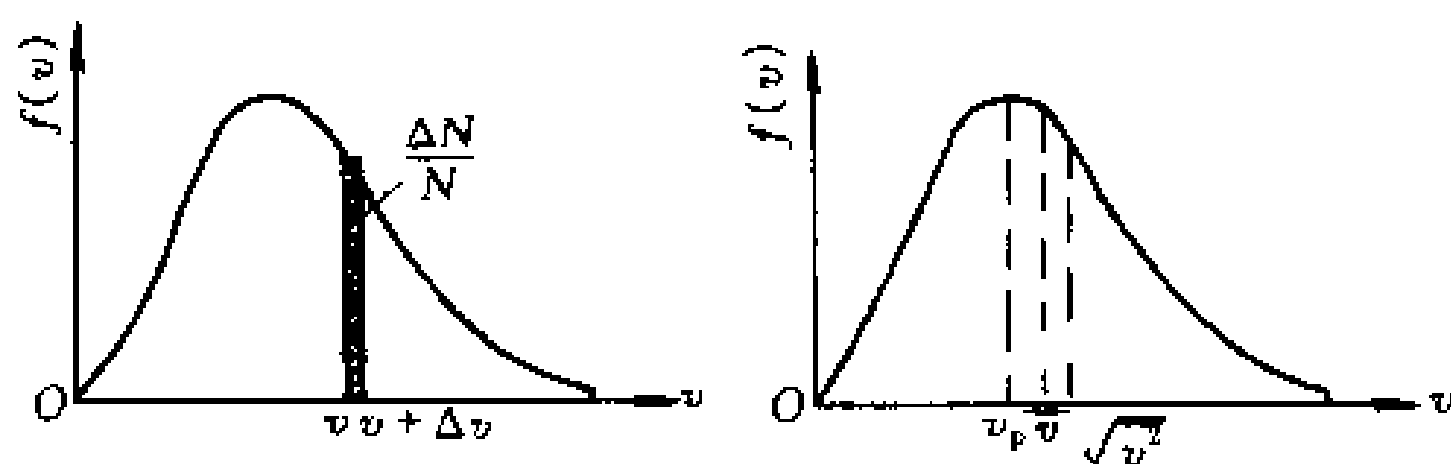
$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (6-17)$$

上面的 $f(v)$ 叫做麦克斯韦速率分布函数。表示速率分布函数的曲线叫做麦克斯韦速率分布曲线，如图 6-9 所示。

从图 6-9(a)中可以看出，深色的小长方形的面积为

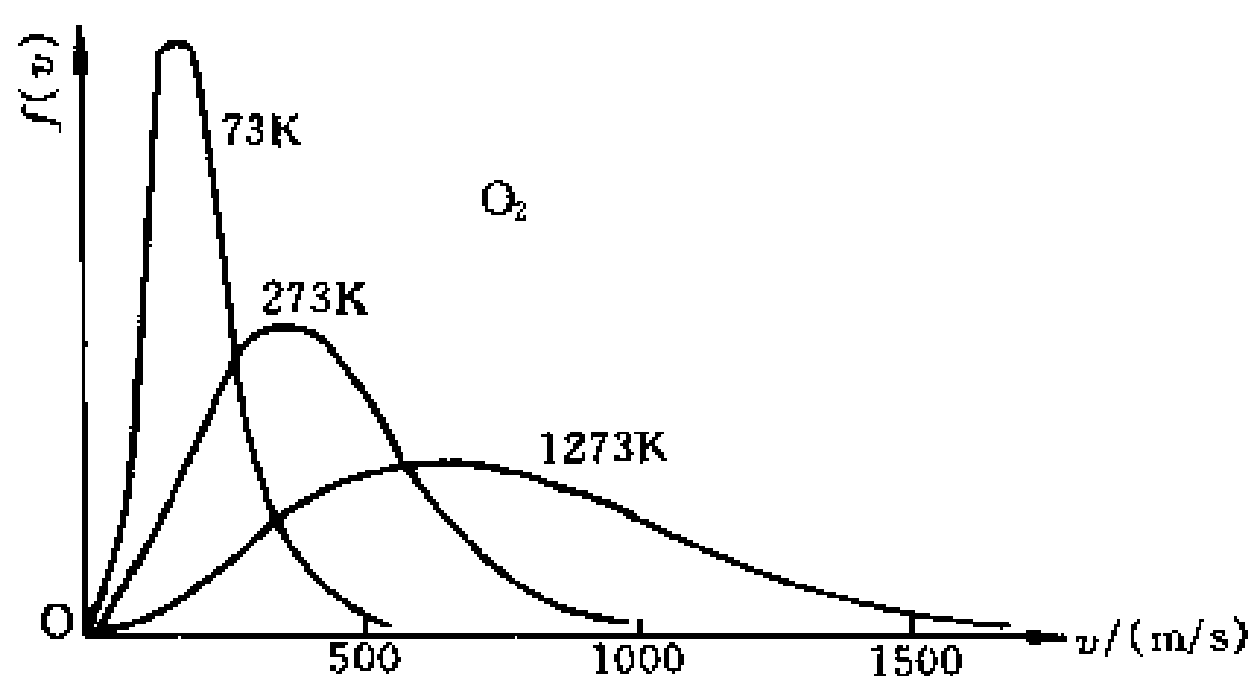
$$f(v)\Delta v = \frac{\Delta N}{N \Delta v} \Delta v = \frac{\Delta N}{N}$$

表示某分子的速率在间隔 $v \sim v + \Delta v$ 内的概率，也表示在该间隔



(a) 某一温度下速率分布曲线

(b) 某一温度下, 分子速率的 3 个统计值



(c) 不同温度下的速率分布曲线

图 6-9 麦克斯韦速率分布曲线

内的分子数占总分子数的百分数. 在不同的间隔内, 有不同面积的小长方形, 说明不同间隔内的分布百分数不相同. 面积较大, 表示分子具有该间隔内的速率值的概率也愈大. 当 Δv 足够微小时, 无数矩形的面积总和将渐近于曲线下的面积, 这个面积表示分子在整个速率间隔 ($0 \sim \infty$) 的概率的总和, 按归一化条件, 应等于 1; 用公式表示时, 就是已经讲过的式 (6-6),

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

从速率分布曲线我们还可以知道, 具有很小速率或很小速率的分子为数较少, 其百分数较低, 而具有中等速率的分子为数很多, 百分数很高. 值得我们注意的是曲线上有一个最大值, 与这个最大值相应的速率值 v_p , 叫做最概然速率. 它的物理意义是, 在一

定温度下,速度大小与 v_p 相近的气体分子的百分数为最大,也就是,以相同速率间隔来说,气体分子中速度大小在 v_p 附近的概率为最大.除了方均根速率和最概然速率以外,还有一个有关气体分子速率的平均值——算术平均速率,即分子速率大小的算术平均值(用 $\bar{v}$ 表示),也是十分有用的.图 6-9(b)显示出了最概然速率、方均根速率和平均速率.

不同温度下的分子速率分布曲线,约如图 6-9(c)所示.当温度升高时,气体分子的速率普遍增大,速率分布曲线上的最大值也向量值增大的方向迁移,亦即最概然速率增大了;但因曲线下的总面积,即分子数的百分数的总和是不变的,因此分布曲线在宽度增大的同时,高度降低,整个曲线将变得“较平坦些”.

3. 从速率分布函数 $f(v)$ 推算分子速率的三个统计值

前面,我们介绍了麦克斯韦速率分布律的主要内容,由于速率分布函数的具体数学表示式比较复杂一些,所以我们着重于从速率分布函数的曲线来形象地说明其物理意义.在理论讨论和计算中,有时有必要用到速率分布函数的表达式.作为例子,我们应用速率分布函数计算分子速率的三个统计值.

(1) 算术平均速率 $\bar{v}$ 利用式(6-4),可得算术平均速率如下:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv$$

在上式中,令 $b = \frac{m}{2kT}$,即可算得①

$$\begin{aligned} \text{①} \quad & \int_0^{\infty} v^2 e^{-bv^2} dv = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{b^3}} \\ & \int_0^{\infty} v^3 e^{-bv^2} dv = \frac{1}{2b^2} \\ & \int_0^{\infty} v^4 e^{-bv^2} dv = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{b^5}} \end{aligned}$$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{b}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-bv^2} dv = 2 \sqrt{\frac{1}{b\pi}}$$

將 b 值代入得

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (6-18)$$

(2) 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 与算术平均速率相似, 我们有

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{b}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-bv^2} dv = \frac{3}{2b}$$

將 b 值代入, 得

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}}$$

这与前面由压强公式推得的结果相一致.

(3) 最概然速率 v_p 最概然速率是指在任一温度 T 时, 气体中分子最可能具有的速度值. 亦即在 $v=v_p$ 时, 分布函数 $f(v)$ 应有极大值, 所以 v_p 可由极大值条件 $\left. \frac{df}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$ 求得. 因

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv} &= 4\pi \left(\frac{b}{\pi} \right)^{3/2} [2ve^{-bv^2} - v^2 2bve^{-bv^2}]_{v=v_p} \\ &= 8\pi \left(\frac{b}{\pi} \right)^{3/2} v_p e^{-bv_p^2} [1 - bv_p^2] = 0 \end{aligned}$$

所以

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\text{mol}}}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (6-19)$$

当温度升高时, 三者都随 $T^{1/2}$ 而增加. 这三种速率, 就不同的问题有着各自的应用. 在讨论速率分布时, 就要用到大量分子的最概然速率; 计算分子运动的平均距离时, 就要用算术平均速率; 计算分子的平均平动动能时, 就要用方均根速率.

例题 6-5 试计算气体分子热运动速率的大小介于 $v_p - \frac{v_p}{100}$

和 $v_p + \frac{v_p}{100}$ 之间的分子数占总分子数的百分数.

解 按题意, $v = v_p - \frac{v_p}{100} = \frac{99}{100} v_p$, $\Delta v = \left(v_p + \frac{v_p}{100} \right) - \left(v_p - \frac{v_p}{100} \right) = \frac{v_p}{50}$. 在此, 利用 v_p , 引入 $W = \frac{v}{v_p}$, 把麦克斯韦速率分布律改写成如下简单形式:

$$\frac{\Delta N}{N} = f(W) \Delta W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} W^2 e^{-W^2} \Delta W \quad (6-20)$$

现在, $W = \frac{v}{v_p} = \frac{99}{100}, \quad \Delta W = \frac{\Delta v}{v_p} = \frac{1}{50}$

把这些量值代入式(6-20), 即得

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{99}{100} \right)^2 e^{-\left(\frac{99}{100} \right)^2} \times \frac{1}{50} = 1.66\%$$

§ 6-7 玻尔兹曼分布律 重力场中粒子按高度的分布

在提出理想气体的微观模型时, 我们曾指出, 理想气体分子只参与分子间的、分子和器壁间的碰撞, 而不考虑其他相互作用, 即不考虑分子力, 也不考虑外场(如重力场、电场、磁场等)对分子的作用. 这时, 气体分子只有动能而没有势能, 并且在空间各处密度相同. 麦克斯韦速率分布适用于描述这种情形.

1. 玻尔兹曼分布律

玻尔兹曼把麦克斯韦速率分布律推广到气体分子在任意力场中运动的情形. 在麦克斯韦分布律中, 指数项只包含分子的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

这是考虑分子不受外力场影响的情形. 当分子在保守力场中运动时, 玻尔兹曼认为应以总能量 $E = E_k + E_p$ 代替式(6-17)中的 E_k ,

此处 E_p 是分子在力场中的势能. 由于势能一般随位置而定, 分子在空间的分布将是不均匀的, 所以这时我们应该考虑这样的分子, 不仅它们的速度限定在一定速度间隔内, 而且它们的位置也限定在一定的坐标间隔内. 最后, 玻尔兹曼所作的计算表明: 气体处于平衡状态时, 在一定温度下, 在速度分量间隔 ($v_x \sim v_x + \Delta v_x, v_y \sim v_y + \Delta v_y, v_z \sim v_z + \Delta v_z$) 和坐标间隔 ($x \sim x + \Delta x, y \sim y + \Delta y, z \sim z + \Delta z$) 内的分子数为

$$\begin{aligned}\Delta N' &= n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-E/kT} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-(E_k + E_p)/kT} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z \quad (6-21)\end{aligned}$$

式中 n_0 表示在 $E_p = 0$ 处单位体积内具有各种速度值的总分子数. 这个公式叫做玻尔兹曼分布律.

式(6-21)表明, 在上述间隔内的这些分子, 总能量大致都是 E , 其总数 $\Delta N'$ 正比于 $e^{-E/kT}$, 也正比于 $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z$. 这个因子 $e^{-E/kT}$ 叫做概率因子, 是决定分布分子数 $\Delta N'$ 多少的重要因素. 玻尔兹曼分布律告诉我们: 在平衡状态中, 当 $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z$ 的大小相同时, $\Delta N'$ 的多少决定于分子能量 E 的大小, 分子能量 $E = E_k + E_p$ 愈大, 分子数 $\Delta N'$ 就愈少. 这表明, 就统计的意义而言, 气体分子将占据能量较低的状态. 当 T 一定时, 气体分子的平均动能值是一定的, 因此, 这也意味着分子将优先占据势能较低的状态.

如果把上式对位置积分, 就可得到麦克斯韦速率分布律, 这应在意料之中, 因为玻尔兹曼分布是由麦克斯韦速率分布推广得来的. 如果把上式对速度积分, 并考虑到分布函数应该满足归一化条件:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z = \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv = 1$$

那么, 玻尔兹曼分布律也可写成如下常用形式:

$$\Delta N_B = n_0 e^{-E_p/kT} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (6-22)$$

它表明分子数是如何按位置而分布的. 与 $\Delta N'$ 不同, 此处的 ΔN_B 是分布在坐标间隔 ($x \sim x + \Delta x, y \sim y + \Delta y, z \sim z + \Delta z$) 内具有各种速率的分子数. 显然, ΔN_B 比 $\Delta N'$ 大得多.

玻尔兹曼分布律是个重要的规律, 它对实物微粒 (气体、液体和固体分子、布朗粒子等) 在不同力场中运动的情形都是成立的.

2. 重力场中粒子按高度的分布

在重力场中, 气体分子受到两种互相对立的作用. 无规则的热运动将使气体分子均匀分布于它们所能到达的空间, 而重力则要使气体分子聚拢在地面上, 当这两种作用达到平衡时, 气体分子在空间作非均匀的分布, 分子数随高度减小.

根据玻尔兹曼分布律, 可以确定气体分子在重力场中按高度分布的规律. 如果取坐标轴 z 垂直向上, 并设在 $z=0$ 处势能为零, 单位体积内的分子数为 n_0 , 则分布在高度为 z 处的体积元 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 内的分子数为 [将 $E_p = mgz$ 代入式 (6-22) 即得]

$$\Delta N_B = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (6-23)$$

以 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 除上式, 即得分布在高度为 z 处单位体积内的分子数

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (6-24)$$

式 (6-24) 表明, 在重力场中气体分子的密度 n 随高度 z 的增加按指数而减小. 分子的质量 m 越大, 重力的作用越显著, n 的减小就越迅速, 气体的温度越高, 分子的无规则热运动越剧烈, n 的减小就越缓慢, 图 6-10 是根据式 (6-24) 画出的分布曲线.

应用式 (6-24) 很容易确定气体压强随高度变化的关系. 在一定的温度下, 理想气体的压强 p 与分子的密度 n 成正比, 即

$$p = nkT$$

由此可得

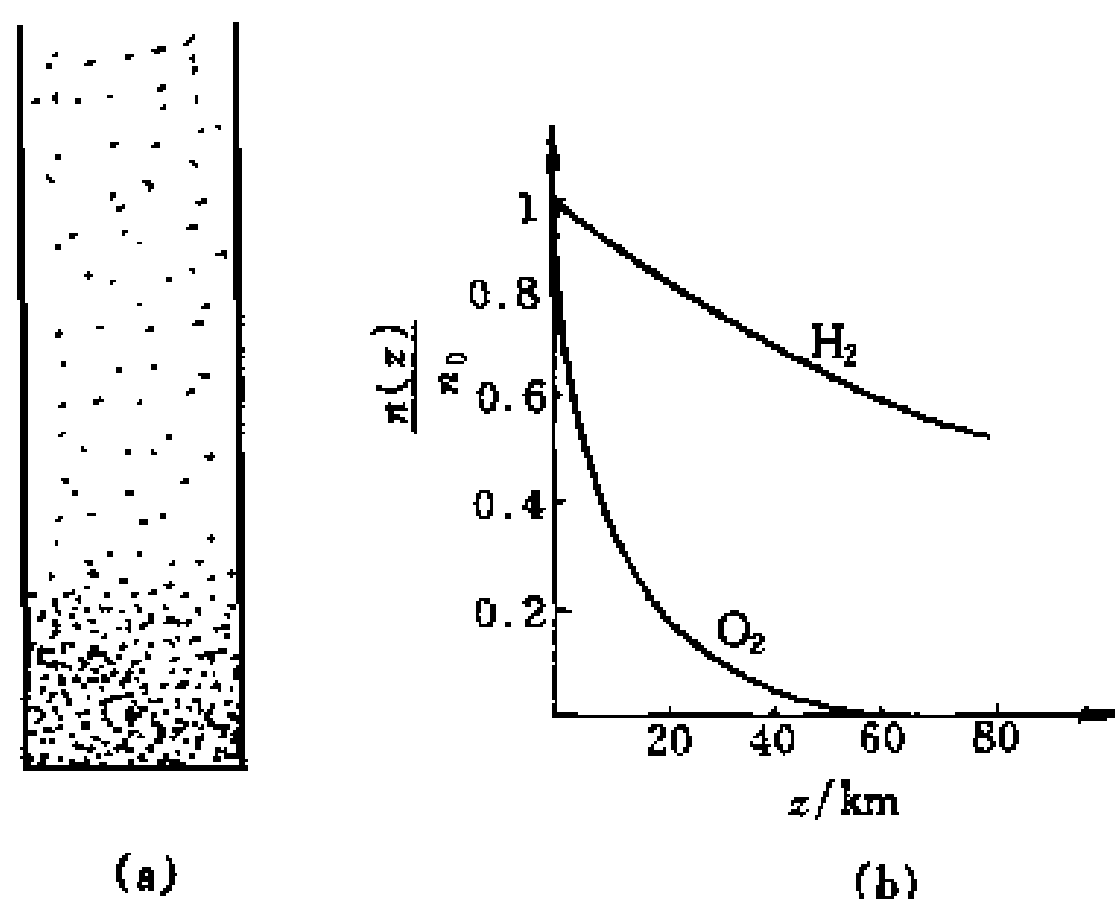


图 6-10 粒子数按高度递减曲线

$$p = nkT = n_0 kT e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{M_{\text{mol}}gz}{RT}} \quad (6-25)$$

式中 $p_0 = n_0 kT$ 表示在 $z=0$ 处的压强, M_{mol} 为气体的摩尔质量. 式 (6-25) 称为气压公式, 这公式表示在温度均匀的情形下, 大气压强随高度按指数减小, 如图 6-10 所示. 但是大气的温度是随高度变化的, 所以只有在高度相差不大的范围内计算结果才与实际情形符合. 在爬山和航空中, 还应用这公式来估算上升的高度 z , 将上式取对数, 可得

$$z = \frac{RT}{gM_{\text{mol}}} \ln \frac{p_0}{p}$$

因此测定大气压强随高度而减小的量值, 即可确定上升的高度. 式 (6-25) 不但适用于地面的大气, 还适用于浮悬在液体中的胶体微粒按高度的分布.

§ 6-8 分子的平均碰撞次数及平均自由程

分子的平均碰撞次数及平均自由程

如上所说,在常温下,气体分子是以每秒几百米的平均速率运动着的.这样看来,气体中的一切过程,好象都应在一瞬间就会完成.但实际情况并不如此,气体的混合(扩散过程)进行得相当慢.例如经验告诉我们,打开汽油瓶以后,汽油味要经过几分钟的时间才能传过几米的距离.

原来,在分子由一处(如图 6-11 中的 A 点)移至另一处(如 B

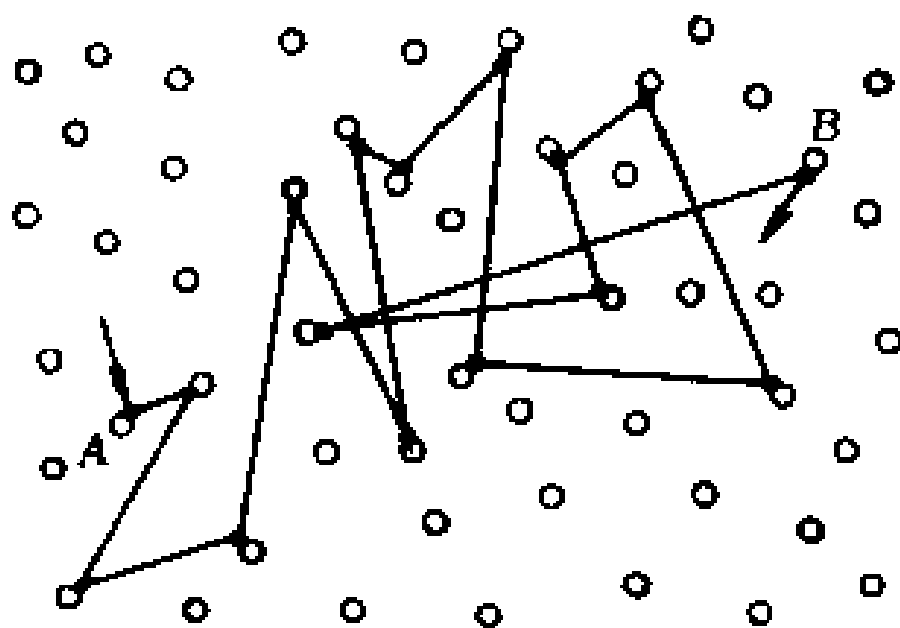


图 6-11 气体分子的碰撞

点)的过程中,它要不断地与其他分子碰撞,这就使分子沿着迂回的折线前进.气体的扩散、热传导过程等进行的快慢都取决于分子相互碰撞的频繁程度.

气体分子在运动中经常与其他分子碰撞,在任意两次连续的碰撞之间,一个分子所经过的自由路程的长短显然不同,经过的时间也是不同的.我们不可能也没有必要一个个地求出这些距离和时间来,但是我们可以求出在 1 s 内一个分子和其他分子碰撞的平均次数,以及每两次连续碰撞间一个分子自由运动的平均路程.前者叫做分子的平均碰撞次数或平均碰撞频率,以 $\bar{Z}$ 表示,后者

叫做分子的平均自由程，以 $\bar{\lambda}$ 表示， $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 的大小反映了分子间碰撞的频繁程度。

平均自由程是气体动理论中最有用的概念之一，借助于它，我们可以不用速率分布函数，而对气体中的某些热现象作出相当简单而又成功的论证，对此，我们将在 § 6-9 中进行介绍。

现在，我们从计算分子的平均碰撞次数 $\bar{Z}$ 入手，导出平均自由程的公式。为使计算简单起见，我们假定每个分子都是直径为 d 的小球。因对碰撞来说，重要的是分子间的相对运动，所以，再假定除一个分子外其他分子都静止不动，只有那一个分子以平均相对速率 $\bar{v}_r$ 运动。当这个分子与其他分子作一次弹性碰撞时，两个分子的中心相隔的距离就是 d 。围绕分子的中心，以 d 为半径画出的球叫做分子的作用球。这样，在该作用球内就不会有其他同类分子的中心。

运动分子的作用球在单位时间内扫过一长度为 $\bar{v}_r$ 、横截面为 πd^2 的圆柱体。凡是中心在该圆柱体内的其他分子，都将在 1 s 内和运动分子碰撞。由于碰撞，运动分子的速度方向要有改变，所以圆柱体并不是直线的，在碰撞之处要出现曲折，如图 6-12 中的折线 $ABCD$ 那样。曲折的存在不会很大地影响圆柱体的体积。当平均自由程远大于分子直径时，可以不必对体积进行修正。

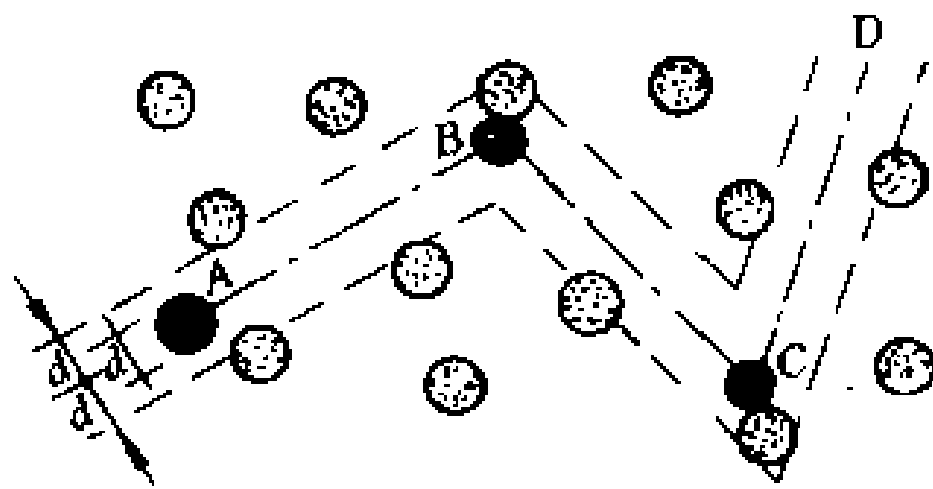


图 6-12 $\bar{Z}$ 及 $\bar{\lambda}$ 的计算

设单位体积内的分子数为 n ，则静止分子的中心在圆柱体内的数目为 $\pi d^2 \bar{v}_r n$ ，此处 $\pi d^2 \bar{v}_r$ 是圆柱体的体积。因中心在圆柱体内的所有静止分子，都将在 1 s 内与运动分子相撞，所以，我们所求

的运动分子在 1 s 内与其他分子碰撞的平均次数 $\bar{Z}$ 就是

$$\bar{Z} = \pi d^2 \bar{v}_r n$$

根据麦克斯韦速率分布律, 平均相对速率与算术平均速率有关系:

$\bar{v}_r = \sqrt{2} \bar{v}$ (推导从略), 代入上式即得分子的平均碰撞次数为

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n \tag{6-25}$$

接下来, 我们可计算分子平均自由程 $\bar{\lambda}$. 由于 1 s 内每个分子平均走过的路程为 $\bar{v}$ (此处为什么不用 $\bar{v}_r$), 而 1 s 内每一个分子和其他分子碰撞的平均次数则为 $\bar{Z}$, 所以分子平均自由程应为

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

(6-26)

上式给出了平均自由程 $\bar{\lambda}$ 和分子直径及分子数密度 n 的关系 (参看表 6-2). 根据 $p = nkT$, 我们可以求出 $\bar{\lambda}$ 和温度 T 及压强 p 的关系为

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \tag{6-27}$$

由此可见, 当温度一定时, $\bar{\lambda}$ 与 p 成反比, 压强愈小, 则平均自由程愈长 (参看表 6-3).

表 6-2 标准状态下几种气体的 $\bar{\lambda}$ 和 d

	氢	氮	氧	氨
$\bar{\lambda}/\text{m}$	1.123×10^{-7}	0.599×10^{-7}	0.648×10^{-7}	1.793×10^{-7}
d/m	2.3×10^{-10}	3.1×10^{-10}	2.9×10^{-10}	1.9×10^{-10}

表 6-3 0℃时不同压强下空气分子的 $\bar{\lambda}$

压强/(133.3 Pa)	760	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$\bar{\lambda}/\text{m}$	7×10^{-8}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	0.5	50

应该注意,分子并不是真正的球体,它是由电子与原子核组成的复杂系统;分子与分子之间的相互作用力的性质(部分是属于电性的),也相当复杂.当分子相距极近时,它们之间的相互作用力是斥力,并且这种斥力是随分子间距离的继续减小而很快地增大.所以两分子在运动中相互靠近后,由于相斥又使它们改变原来的运动方向而飞开,这一相互作用的过程我们就叫它是碰撞.所以,碰撞实质上是在分子力作用下相互间的散射过程.分子间的相互斥力开始起显著作用时,两分子质心间的最小距离的平均值就是 d , 所以 d 叫做分子的有效直径.实验证明,气体密度一定时,分子的有效直径将随速度的增加而减小,所以当 T 与 p 的比值一定, $\bar{\lambda}$ 将随温度而略有增加.

例题 6-6 求氢在标准状态下,在 1 s 内分子的平均碰撞次数.已知氢分子的有效直径为 2×10^{-10} m.

解、按气体分子算术平均速率公式 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}$ 算得

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{3.14 \times 2 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 1.70 \times 10^3 \text{ m/s}$$

按 $p = nkT$ 算得单位体积中分子数为

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} \text{ m}^{-3} = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{1}{1.41 \times 3.14 \times (2 \times 10^{-10})^2 \times 2.69 \times 10^{25}} \text{ m} \\ &= 2.10 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (\text{约为分子直径的 } 1000 \text{ 倍}) \end{aligned}$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{1.70 \times 10^3}{2.10 \times 10^{-7}} \text{ s}^{-1} = 8.10 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

即在标准状态下,在 1 s 内,一个氢分子的平均碰撞次数约有 80 亿次.

§ 6-9 气体内的迁移现象

我们在前面所讨论的都是气体在平衡状态下的性质. 实际上, 许多问题都牵涉到气体在非平衡状态下的变化过程. 如果气体各部分的物理性质原来是不均匀的(例如密度、流速或温度等的不相同), 则由于气体分子不断地相互碰撞和相互搀和, 分子之间将经常交换质量、动量和能量, 分子速度的大小和方向也不断地改变, 最后气体内各部分的物理性质将趋向均匀, 气体状态将趋向平衡. 这种现象叫做气体内的迁移现象.

气体内的迁移现象有三种, 即粘滞现象、热传导现象和扩散现象. 实际上, 三种迁移现象可以同时存在. 我们为了看出各自的实质, 把它们分开来讨论.

1. 粘滞现象

流动中的气体, 如果各气层的流速不相等, 那么相邻的两个气层之间的接触面上, 形成一对阻碍两气层相对运动的等值而反向的摩擦力, 其情况与固体接触面间的摩擦力有些相似, 叫做粘性力. 气体的这种性质, 叫做粘性. 例如用管道输送气体, 气体在管道中前进时, 紧靠着管壁的气体分子附着于管壁, 流速为零, 稍远一些的气体分子才有流速, 但不很大. 在管道中心部分的气体流速为最大. 这正是由于从管壁到中心各层气体之间有粘性作用的表现.

粘性力所遵从的实验定律, 可用图 6-13 来说明. 设有一气体, 限制在两个无限大的平行平板 A、B 之间, 平板 B(在 $y=0$ 处) 是静止的, 而平板 A(在 $y=h$ 处) 以速度 u_0 沿 x 轴方向运动. 我们把这一气体想象为许多平行于平板的薄层, 其中顶层附着在运动平板 A 上, 底层附着在静止平板 B 上. 由于顶层的流速(正 x 方向) 比下层大, 顶层将对它的下一层作用一个沿 x 轴正方向的拉力, 并依次对下一层作用这样一个拉力; 与之同时, 下一层将依次对上

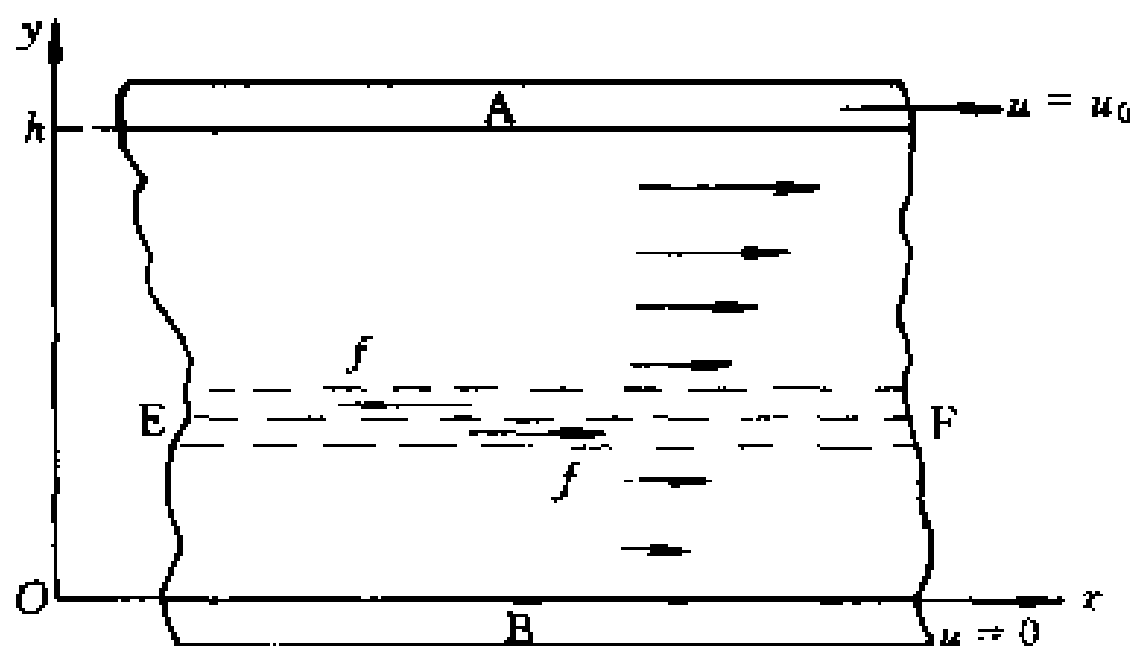


图 6-13 限制在两个无限大的平行平板之间的粘性气体

一层作用一个沿 x 轴负方向的阻力. 于是, 气体就出现粘性. 在这个例子中, 流速变化最大的方向是沿着 y 轴的. 我们把流速在它变化最大的方向上每单位间距上的增量 $\frac{du}{dy}$ 叫做流速梯度. 实验证明, 在图中 EF 平面处, 粘性力 f 与该处的流速梯度成正比, 同时也与 EF 的面积 ΔS 成正比, 即

$$f = \pm \eta \frac{du}{dy} \Delta S \quad (6-28)$$

式中比例系数 η 叫做动力粘度或粘度. 式中的正负号表明粘性力是成对出现的, 当取 y 轴向上为正时, 式中 f 分别表示上层对下层的作用力与下层对上层的反作用力.

图 6-14 所示是测定粘度的实验装置的简图. 圆筒 B 用细丝 C 悬挂着, 圆筒 A 装在竖直的转轴上. A、B 之间为某种待测气体. 当 A 筒绕轴旋转时, B 筒也将绕悬丝偏转. 到达稳定时, A 筒保持一恒定的转速, B 筒则相应地偏转一定的角度. 偏转角度的大小, 可由附在细丝 C 上的小镜 M 所反射的光线来测得. 悬丝 C 的扭转系数和

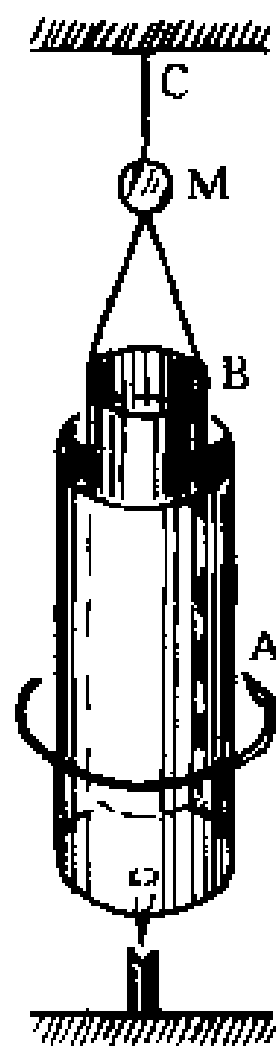


图 6-14 测定 η 的实验

B 筒的半径都是已知的,从偏转角的大小就可算出粘性力.流速梯度和面积 ΔS 量值也是可以测定的.因此从公式(6-28)就可算出粘度 η .在 0°C 时,实验测得空气的粘度为 $18.1 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$,氢为 $8.6 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$,氧为 $18.7 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

从气体动理论的观点来看,对粘滞现象可作如下的解释.参看图 6-15,在既作整体流动,又有分子热运动的气体中,沿着流速的

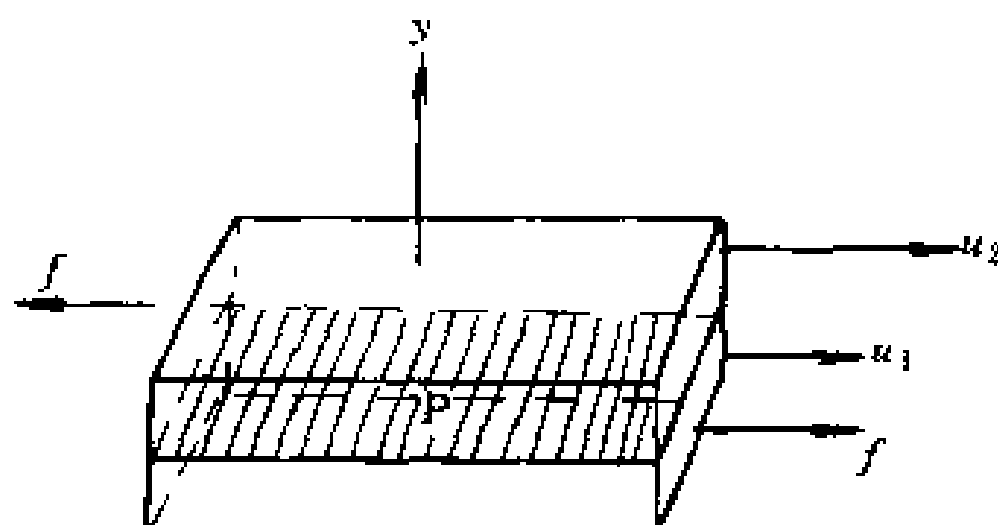


图 6-15 粘性力

方向任选一平面 P .在这一平面上、下两侧,将有许多分子穿过这一平面.在同一时间内,自上而下和自下而上穿过 P 平面的分子数目,平均地说,是相等的,这些分子除了带着它们热运动的动量和能量之外,同时还带着它们的定向运动的动量.由于上侧的流速大于下侧的流速,所以上、下两侧这样交换分子的结果,是每秒内都有定向动量从上面气层向下面气层的净迁移,也就是说,上面气层的定向动量减少,下面气层的定向动量有等量的增加.因此,在宏观上来说,这一效应正与上层对下层作用一个沿 x 轴方向的摩擦拉力相似.所以,气体粘性起源于:气体分子的定向动量,在垂直于流速的方向上,向流速较小气层的净迁移.

2. 热传导现象

如果气体内各部分的温度不同,从温度较高处向温度较低处,将有热量的传递,这一现象叫做热传导现象.

如图 6-16 所示, x 轴是气体温度变化最大的方向,在这个方

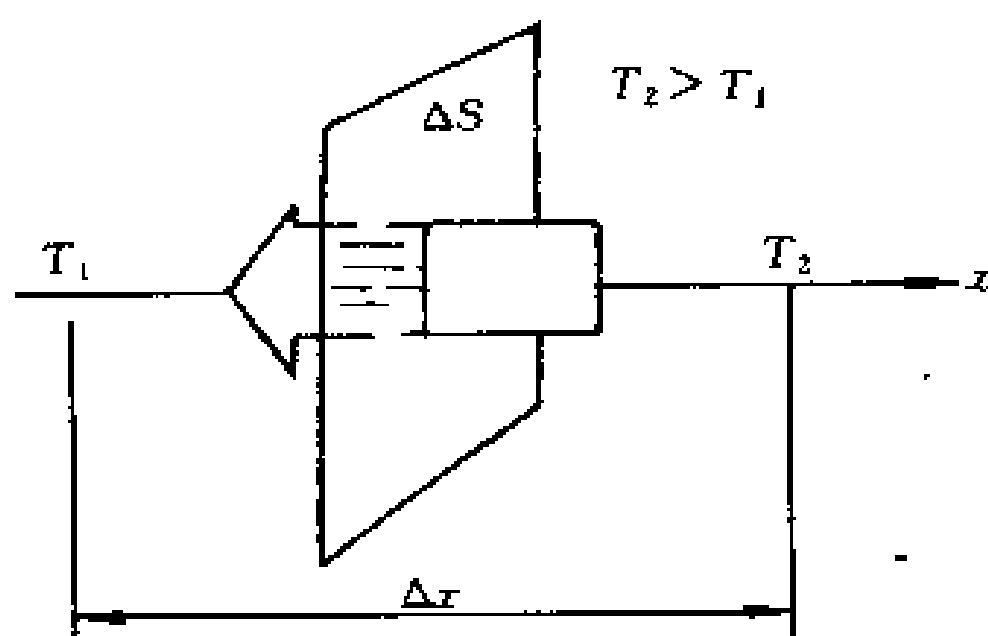


图 6-16 热传导现象

向上气体温度的空间变化率 $\frac{dT}{dx}$, 叫做温度梯度. 设 ΔS 为垂直于 x 轴的某指定平面的面积. 实验证明, 在单位时间内, 从温度较高的一侧, 通过这一平面, 向温度较低的一侧所传递的热量, 与这一平面所在处的温度梯度成正比, 同时也与面积 ΔS 成正比, 即

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{dT}{dx} \Delta S \quad (6-29)$$

比例系数 κ 叫做热导率或导热系数. 式中负号表示热量传递的方向是从高温处传到低温处, 和温度梯度的方向是相反的. 热导率的单位是 $W/(m \cdot K)$. 实验测得, 在 $0^\circ C$ 时, 氢的热导率为 $16.8 \times 10^{-3} W/(m \cdot K)$, 氧为 $2.42 \times 10^{-3} W/(m \cdot K)$, 空气为 $2.23 \times 10^{-3} W/(m \cdot K)$. 在 $100^\circ C$ 时, 水气的热导率为 $2.18 \times 10^{-3} W/(m \cdot K)$. 显然, 气体的热导率都很小, 所以, 当气体中不存在对流时, 气体可用作很好的绝热材料.

在气体动理论中, 气体热传导现象是这样解释的: 在温度较高的热层中, 分子平均动能较大; 而在温度较低的冷层中, 分子平均动能较小. 由于冷热两层分子的互相搀和与相互碰撞的结果, 从热层到冷层出现热运动能量的净迁移. 迁移的热运动能量, 对单原子气体来说, 只是分子的平动动能; 而对多原子气体来说, 还包含转动和振动的能量在内.

3. 扩散现象

如果容器中各部分的气体种类不同,或同一种气体在容器中各部分的密度不同,经过一段时间后,容器中各部分气体的成分以及气体的密度都将趋向均匀一致,这种现象叫做扩散现象.

为了使问题简化,我们考虑两种气体,在总密度均匀和没有宏观气流的条件下相互扩散的情况.此处假定相互扩散的两种气体的分子质量极为相近,例如 N_2 和 CO 的情形.

现在,我们只考察两种气体中一种气体的质量迁移.设这种气体的密度沿 x 轴方向改变着,沿着这个密度变化最大的方向,气体密度的空间变化率 $\frac{d\rho}{dx}$,叫做密度梯度.在气体内任取一个垂直于 x 轴的面积 ΔS .实验证明,在单位时间内,从密度较大的一侧通过该面积向密度较小的一侧扩散的质量与该面积所在处的密度梯度成正比,同时也与面积 ΔS 成正比,即

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \quad (6-30)$$

式中比例系数 D 叫做扩散系数.式中负号表示气体的扩散从密度较大处向密度较小处进行,与密度梯度的方向恰好相反.扩散系数的单位是 m^2/s .

扩散现象的定性解释又是怎样的呢?从气体动理论的观点来看,扩散现象是气体分子无规则热运动的结果.分子既有从较高密度的气层运动到较低密度气层的,也有在相反方向上进行着的.因为在较高密度气层的分子为数较多,所以,向较低密度气层迁移的分子也就较相反方向的为多了.这样,通过 ΔS 面就有了质量的净迁移.

在气体动理论中,可得出如下的粘度、热导率与扩散系数:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$$

(6-31)

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{C_v}{M_{\text{mol}}} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$$
(6-32)

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$$
(6-33)

式中 C_v 为气体的摩尔定体热容,它将在下章中介绍.

因为 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M_{\text{mol}}}}$, 平均自由程 $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$, 从扩散系数 $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$ 可知, D 与 $T^{3/2}$ 成正比, 而与压强 p 成反比. 这说明, 温度越高, 气体压强越低, 扩散就进行得越快. 这个结论可由气体动理论予以解释, 温度 T 越高时, 分子运动速度越大, 压强 p 越低时分子平均自由程 $\bar{\lambda}$ 越大, 所以碰撞机会少, 扩散进行得越快. 此外, 还可以看出, 在相同温度下, 对两种不同质量的气体分子来说, 它们的算术平均速率和它们质量的平方根成反比; 即

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}}{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_2}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

所以分子质量小的气体扩散得快, 而分子质量大的气体扩散得慢. 在化学上常根据这一原理来分离同位素. 例如, 在分离铀的同位素 ^{238}U 和 ^{235}U 时, 先将铀变成氟化铀 (UF_6), UF_6 在室温下是气体, 将它进行多次扩散最后便得到分离了的 ^{235}U 和 ^{238}U .

表 6-4 几种气体的粘度、热导率和自扩散系数

	$\frac{\eta \times 10^6}{(\text{Pa} \cdot \text{s})} \quad (300 \text{ K})$	$\frac{\kappa \times 10^4}{(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})} \quad (273 \text{ K})$	$\frac{D \times 10^5}{(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})} \quad (273 \text{ K})$
Ne	31.73	46.5	4.52
Ar	22.70	16.5	1.57
N ₂	17.81		1.85
O ₂	20.71	25.0	1.87
CO ₂	14.93	15.1	0.97

续表

	$\frac{\eta \times 10^6}{(\text{Pa} \cdot \text{s})} (300 \text{ K})$	$\frac{\kappa \times 10^4}{(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})} (273 \text{ K})$	$\frac{D \times 10^5}{(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})} (273 \text{ K})$
CH ₄	11.16	31.6	2.06
Xe	22.64	51.5	0.93

在式(6-31)和式(6-32)中可看到, η 与 κ 和 ρ 、 $\bar{\lambda}$ 的乘积成正比. 因 $\bar{\lambda}$ 与 n 成反比, 而 ρ 则与 n 成正比, 所以 ρ 、 $\bar{\lambda}$ 与 n 无关. 因此, 在温度一定时, η 、 κ 应与压强无关. 这一关系在压强不太低时, 例如 133Pa 以上, 已为实验所证实. 在很低的压强下, 分子运动的平均自由程受到容器线度的限制, 不能再按理论公式计算, 它几乎不随压强而变. 这时, η 与 κ 就变得与压强有关了. 由于 ρ 在减少, κ 与 η 也随压强的减小而减小. 日常生活中必备的杜瓦瓶(保温瓶), 就是根据这个原理制造的. 它由内外两层玻璃制成, 两层的间距很小, 中间抽成真空, 使热传率充分降低, 以保证瓶的隔热作用.

4. 气体内迁移现象的统一处理

我们知道, 麦克斯韦速率分布律对于平衡态才是成立的. 上述三种气体内的迁移现象都是处于非平衡态中的气体向平衡态转化的过渡过程. 因此, 严格地讲, 在三种迁移现象中, 分子的速率分布是非麦克斯韦的. 即使利用速率分布函数, 也只是对迁移现象作近似的研究. 但借助于平均自由程, 我们可相当简单而又成功地推导出迁移系数的公式. 在气体中, 这三种现象是紧密相关的, 它们的关系也体现在三种迁移现象的统一论述之中.

我们用 $A(y)$ 表示气体分子的平均特性, 例如用 A 表示分子的平均动能 $\frac{i}{2}kT$, 它沿着 y 轴方向均匀地变化着, 亦即存在梯度 $\frac{dA(y)}{dy}$. 现在考察 $A(y)$ 在单位时间内通过位于 $y=y_0$ 处的一个面积 ΔS 的净迁移. 为此, 我们在 ΔS 两侧各取一个以 ΔS 为底面而高度为 $\bar{v}$ 的柱体(图 6-17 中的上、下两部分). 凡是处于这个体积

为 $\bar{v}\Delta S$ 的柱体内的分子,都有可能在 1s 内通过这个面积 ΔS . 设单位体积内的分子数为 n ,则在该柱体内的分子总数就是 $n\bar{v}\Delta S$. 在这么多分子中,考虑到分子运动的无序性,它们不可能全部向着 ΔS 运动. 既然分子运动沿各个方向的机会是均等的,那么,向着 ΔS 运动的分子就只能是总数的 $1/6$,亦即相应分子数为 $\frac{1}{6}n\bar{v}\Delta S$. 当

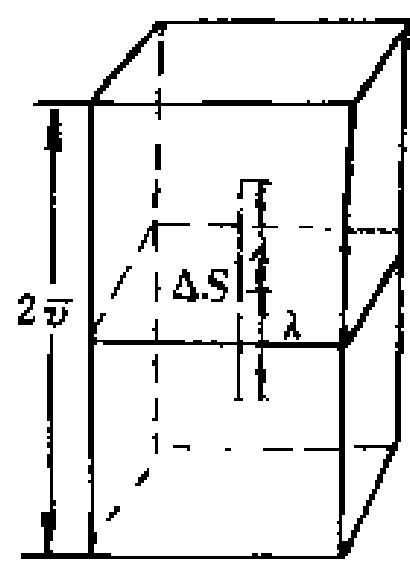


图 6-17 迁移现象

这些分子通过 ΔS 时,带过去的 A 值主要由在通过 ΔS 前分子最后一次碰撞的位置所决定. 因平均自由程是分子连续两次碰撞中的平均距离,所以,这 $\frac{1}{6}n\bar{v}\Delta S$ 个分子虽对 ΔS 的距离有远有近,但平均地说,却可以认为它们都是在离 ΔS 的距离为 $\bar{\lambda}$ 处发生最后一次碰撞而通过该 ΔS 面的. 这情况对 ΔS 上下两侧都是一样的. 上下两侧分子作最后一次碰撞的位置因此将相距 $2\bar{\lambda}$,因两侧分子的相对迁移而在这段距离上每个分子带过来的 A 的迁移量就是 $2\bar{\lambda} \frac{dA}{dy}$. 用柱体内通过 ΔS 的分子数乘 $2\bar{\lambda} \frac{dA}{dy}$,即得单位时间内通过 ΔS 面积沿 y 轴方向迁移的 A 的净数量

$$\Gamma_A = -\frac{1}{6}n\bar{v}\Delta S \left(2\bar{\lambda} \frac{dA}{dy} \right) = -\frac{1}{3}n\bar{v}\bar{\lambda} \frac{dA}{dy} \Delta S \quad (6-34)$$

负号表示 A 沿 y 轴负方向迁移,与梯度 $\frac{dA}{dy}$ 的方向相反.

在扩散的情况中,设分子质量 m 相近的两种气体的分子数密度各为 n_1 与 n_2 ,它们都随 y 而变化,但 $n=n_1+n_2$ 却是均匀的气体分子数总密度. 现在,我们计算在 n 个分子的迁移中所带过来的第一种分子的质量. 为此,令 $\Gamma_A = \frac{\Delta M}{\Delta t}$,以及 $A = \frac{n_1 m}{n}$,由式(6-34)得

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -\frac{1}{3}n\bar{v}\bar{\lambda} \frac{d}{dy} \left(\frac{n_1 m}{n} \right) \Delta S = -\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda} \frac{d(n_1 m)}{dy} \Delta S$$

与式(6-30)相比,考虑到 $n_1 m = \rho$, 不难得到

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$$

在粘滞现象中,令 $\Gamma_A = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, p 为气流的定向动量. 因 $\frac{\Delta p}{\Delta t} = f$, 所以 $\Gamma_A = f$. 再令 A 等于分子的定向动量, 即 $A = mu$. 代入式(6-34), 即得单位时间内动量的净迁移或粘性力为

$$f = - \frac{1}{3} n \bar{v} \bar{\lambda} \frac{d(mu)}{dy} \Delta S = - \frac{1}{3} n m \bar{v} \bar{\lambda} \frac{du}{dy} \Delta S$$

与式(6-28)相比, 即得

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$$

式中 $\rho = nm$ 是气体的密度.

在热传导的情况中, 令 $\Gamma_A = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, A 表示分子的平均动能, 即 $A = \frac{i}{2} kT$, 由式(6-34)得

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \frac{1}{3} n \bar{v} \bar{\lambda} \frac{d}{dy} \left(\frac{i}{2} kT \right) \Delta S = - \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} k \right) n \bar{v} \bar{\lambda} \frac{dT}{dy} \Delta S$$

引入摩尔定体热容 C_v , 把 $\frac{i}{2} k$ 改写为 $\frac{m}{M_{\text{mol}}} C_v$. 与式(6-29)相比, 即得

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{C_v}{M_{\text{mol}}} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$$

从上述迁移现象的分析中我们发现, 迁移过程具有明显的单方向性. 例如, 气体中的扩散只能沿着从高密度区到低密度区的方向进行, 虽然从分子无规则运动来说, 沿相反方向的分子运动也是可能的. 又如, 热量只能自动地从高温区向低温区传递, 却不能自动地从低温区移到高温区去. 不仅迁移过程如此, 我们还可举出不少例子说明过程的单方向性, 其中有气体可以自动地膨胀, 但不能自动地压缩等等. 过程的单方向性的存在, 是分子热运动现象的特征, 为了描述这种特征, 我们还需要采用新的物理量——熵, 这将

在下章进行介绍.

§ 6-10 真实气体 范德瓦耳斯方程

1. 真实气体的等温线

前面讲过,真实气体只是在温度不太低、压强不太高的条件

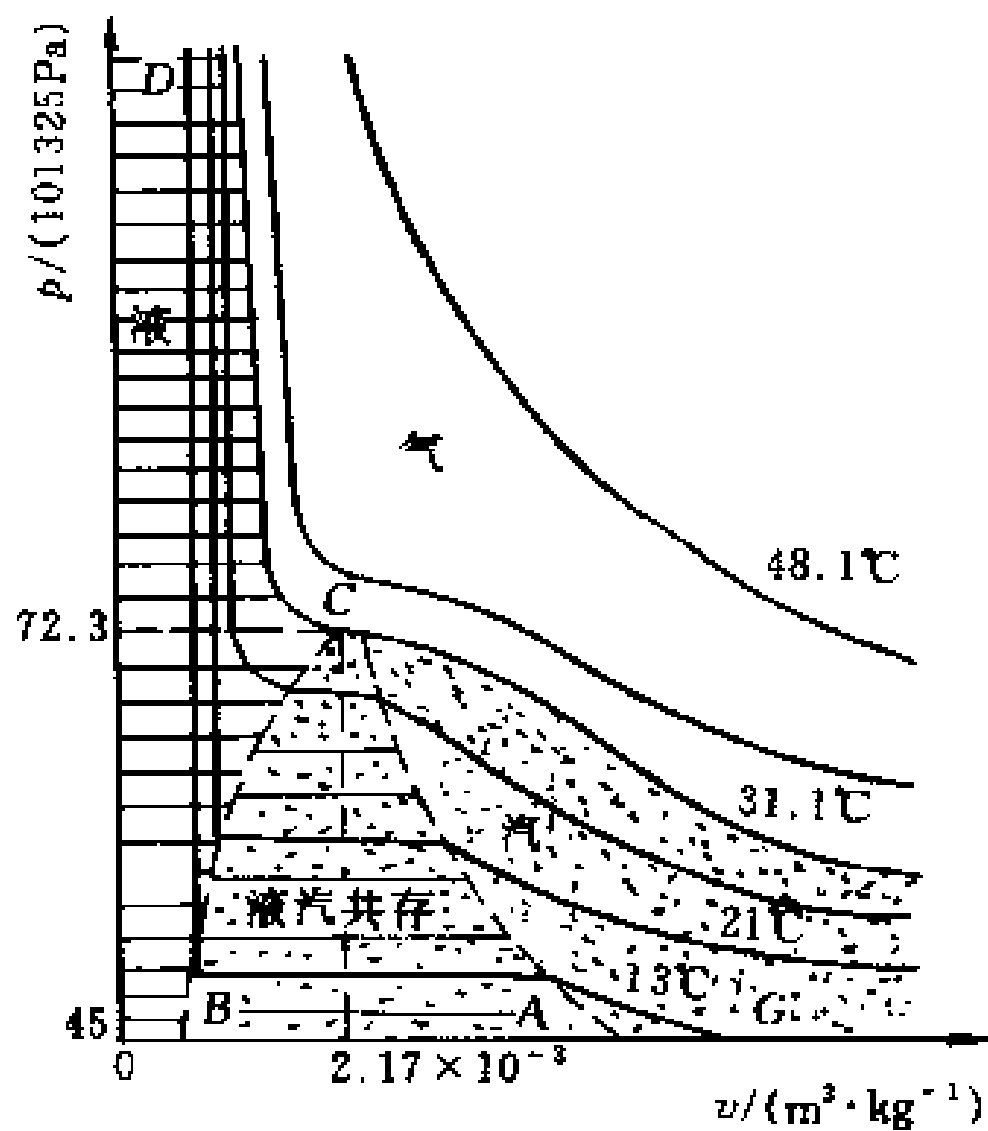


图 6-18 CO_2 的实验等温线

下,才能遵守理想气体的状态方程.在 p - v 图上,理想气体的等温线是等轴双曲线,而真实气体的等温线并非都是等轴双曲线.研究真实气体的等温线,就可了解真实气体偏离理想气体定律的情况,从而对真实气体的性质得到进一步的认识.

以二氧化碳为例,实验得出在不同温度下的等温线如图 6-18 所示.图中以压强为纵坐标,单位为 Pa,以比体积(单位质量的气体所占有的体积)为横坐标,单位为 m^3/kg .

现在我们先看 13°C 的等温线,在曲线 GA 部分,比体积随压

强增加而减小,与理想气体的等温线相似.在 A 点处,即在压强约为 $4.9 \times 10^6 \text{ Pa}$ 时,二氧化碳开始液化,这时的气体叫做饱和蒸气.在从 A 到 B 的液化过程中,液气混合物的平均比体积减小了,但压强保持不变, AB 是一条平直线.在 B 点处,二氧化碳全部液化.等温线的平直部分就是气液共存状态的范围.可见,在一定温度下,饱和蒸气压强是个定值.从 B 点到 D 点, BD 线几乎与压强轴平行,这表示压强虽然不断增加,而比体积却减少不多,反映了液体不易压缩的事实.等温线 ABD 部分与理想气体的等温线相差悬殊,换句话说,二氧化碳在这种温度和压强下,不遵守理想气体状态方程.相应于 21°C 的等温线,形式与 13°C 的等温线相似,只是平直部分较短,而饱和蒸气压较高.温度逐渐升高,等温线的平直部分逐渐缩短,相应的饱和蒸气压也逐渐升高.由此可见,饱和蒸气压是温度的函数.当温度升至 31.1°C ,等温线的平直部分缩成一点,在气体压强与比体积的关系曲线上出现一个拐点.如果温度继续升高,无论压强多大,二氧化碳再也不可能液化.值得注意的是,温度愈高,相应的等温线愈接近于等轴双曲线.从图上可以看出, 48.1°C 的等温线与等轴双曲线相差无几.可知二氧化碳在高温时,它近似地遵守理想气体状态方程.其他的真实气体也都有类似的情况.

当等温线的平直部分正好缩成一拐点时的温度,叫做临界温度,以 T_k 表示,与临界温度相对应的等温线称为临界等温线.所谓临界温度,就是在这温度以上,压强无论怎样加大,气体不再可能液化.温度 31.1°C 为二氧化碳的临界温度,相应于 31.1°C 的等温线叫做二氧化碳的临界等温线.临界等温线上的拐点叫做临界点.临界点处的压强叫做临界压强,以 p_k 表示,相应的比体积叫做临界比体积.以 v_k 表示.上述 3 个物理量叫做气体的临界常量.实验结果指出,不同的气体具有不同的临界常量(参见表 6-5).氮的临界温度特别低,液化很不容易,直到 1908 年才把氮加以液化.

临界等温线把 p - v 图分成上下两个不同区域,上面只可能有

气体状态;下面又可分作三个区域.参看图 6-18,不同等温线上开始液化和液化终了的各点,可以连成虚曲线 ACB .虚线 AC 的右边完全是气体状态,在 ACB 虚线以内是气液共存的区域,虚线 BC 的左边完全是液体状态.

表 6-5 几种气体的临界数据

气 体	沸 点 T_B/K	$p_k/(10^5Pa)$	T_k/K	$\rho_k^{①}/(kg \cdot m^{-3})$
He	4.2	2.26	5.3	69
H ₂	20.4	12.8	33.3	31
Ne	27.2	25.9	44.5	481
N ₂	77.3	33.5	126.1	331
O ₂	90.1	49.7	154.4	430
CO ₂	194.6	72.3	304.3	460
SO ₂	263.0	77.7	430.4	520
H ₂ S	213.0	88.9	273.6	—
H ₂ O	373.1	217.7	647.2	400

① ρ_k 是气体在临界温度时的密度,即临界比体积的倒数.

2. 范德瓦耳斯方程

在近代工程技术和科学研究中,经常需要处理高压或低温条件下的气体问题,因此,在应用理想气体状态方程时,必须考虑到真实气体的特征而予以必要的修正.上世纪以来,许多物理学家先后提出了各种不同的修正意见,建立了各种不同形式的气体状态方程,其中形式较为简单物理意义比较清楚的就是范德瓦耳斯(Van der Waals)方程.

前面我们讨论压强时,曾对理想气体作如下假设:(1)气体分子可当作质点,分子本身体积忽略不计;(2)气体分子间的相互作用,除在碰撞时以外可以忽略.范德瓦耳斯认为这些假设是引起偏差的主要原因,对于真实气体必须考虑分子本身体积和分子间的作用力.

气体分子是个复杂系统,分子与分子之间有相互作用的引力和斥力存在,它们统称分子力.分子力随分子间距而变化的情况,如图 6-19 所示.图中 r_0 为分子间的平衡距离,当两分子彼此相距 r_0 时,每个分子上所受的斥力 f_1 与引力 f_2 恰好平衡[图 6-19(a) I], r_0 的数量级约为 10^{-10} m.当两分子的间距小于 r_0 时,分子力表现为斥力[图 6-19(a) II, (斥力) $f'_1 > (\text{引力})f'_2$].所谓分子本身

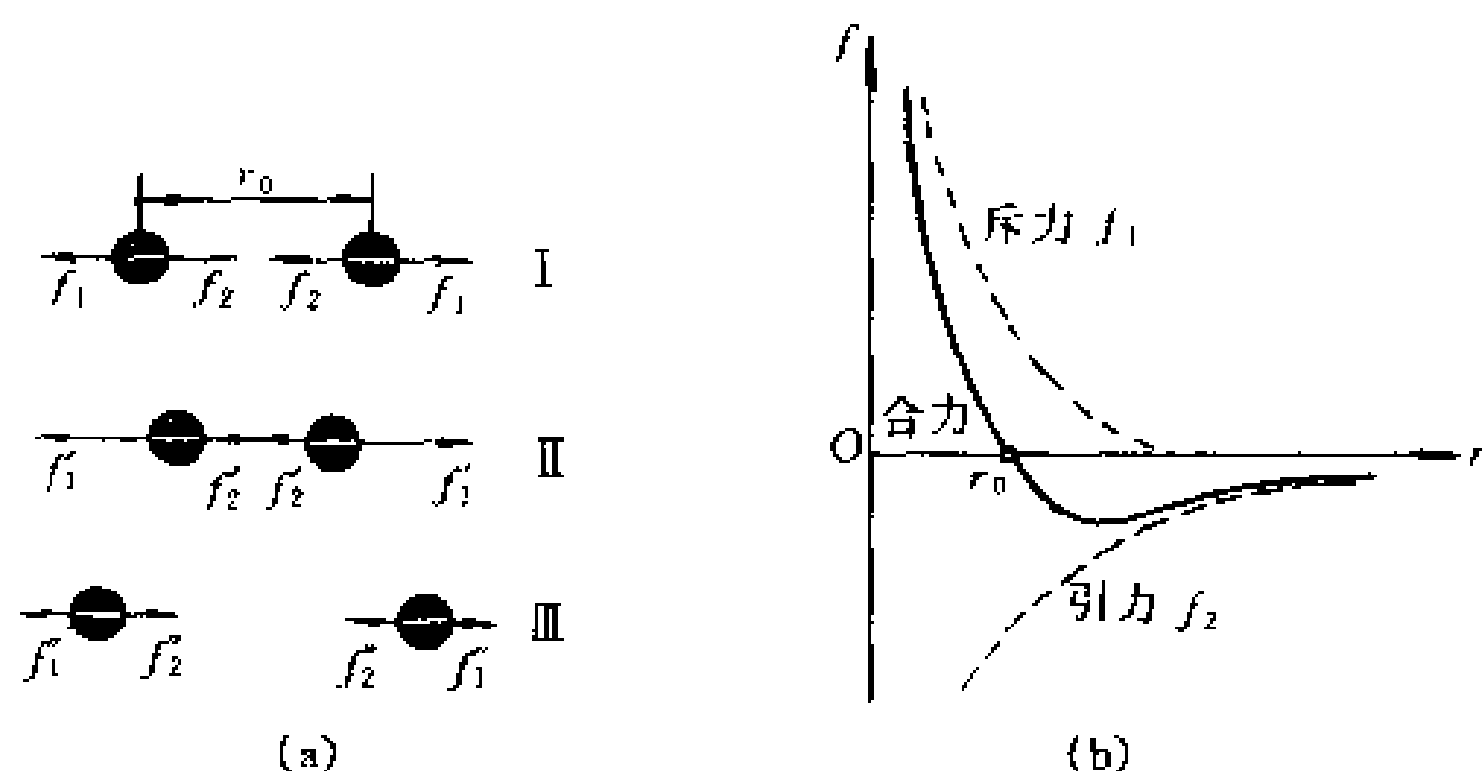


图 6-19 分子力示意图

有体积,不能尽量压缩,正反映了这种斥力的存在.当两分子的间距大于 r_0 时,分子力表现为引力[图 6-19(a) III, (引力) $f''_2 > (\text{斥力})f''_1$].这种引力随着距离增大时,很快地趋近于零.在一般压强下,气体分子间的力是引力.在低压状态下,分子间距离相当大,这种引力几乎可以忽略不计.

在 1 mol 的理想气体状态方程

$$pV_m = RT$$

中, V_m 表示 1 mol 气体可被压缩的空间;对理想气体来说,分子本身的体积略而不计,所以气体可被压缩的空间就是容器整个的容积.但对真实气体来说,分子占有一定的体积,所以气体可被压缩的空间应小于容器的容积一个量值 b , b 是与分子本身体积有关的量.对于给定的气体, b 是个恒量,可由实验来测定(参看表 6-5).据此,气体的状态方程应修正为

$$p(V_m - b) = RT$$

或写成

$$p = \frac{RT}{V_m - b}$$

以上考虑的是分子间斥力的存在,导致了气体可被压缩的空间的减少.

现在,我们要研究分子间引力对气体压强的影响.在容器中气体内部认定一个分子 β ,如图 6-20 所示.以 β 为中心,取分子间相互引力为零的距离 r 为半径作一球.对 β 有引力作用的其他分子,都分布在这个球内.这个球叫做分子引力作用球, r 叫做分子引力的作用半径.

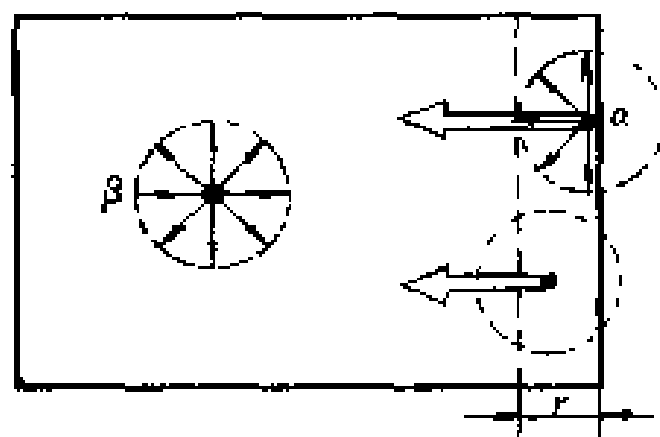


图 6-20 气体分子所受的力

在引力作用球内其他分子对 β 是对称分布的,因此,对 β 分子的作用正好抵消.至于靠近器壁分子,情况就与 β 不同了,每个分子的引力作用球都是不完整的.例如, α 分子的引力作用球在气体内外各居一半.在外面的那一半,没有气体分子对 α 分子起引力作用;而在里面半个引力作用球内的气体分子,都对 α 分子有引力作用,这些引力的合力与边界面垂直且指向气体内部.当分子从气体内部进入这个分子层中,就要受到指向内部的引力作用,因而削弱了碰撞器壁时的动量,也就削弱了施予器壁的压强.因 $p = \frac{RT}{V_m - b}$ 是不考虑分子引力作用的结果,如考虑分子间的引力则分子施予器壁的压强应减少一个量值 p_i .所以,器壁所受到的压强亦即实际的压强应为

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - p_i$$

整理之,得

$$(p + p_i)(V_m - b) = RT \quad (1)$$

p_i 叫做内压强，它表示真实气体表面层所受到的内部分子的引力压强。因为引力压强一方面与器壁附近被吸引的气体分子数成正比，另一方面又与内部的吸引分子数成正比，而这两者又都是与单位体积内的分子数成正比的。因此， p_i 正比于 n^2 。考虑到 n 与气体的体积成反比，所以 p_i 与气体体积的平方成反比，即

$$p_i = \frac{a}{V_m^2}$$

式中的比例系数 a 取决于气体的性质，也可由实验来测定（参看表 6-6）。

表 6-6 气体的范德瓦耳斯常数

气 体	分子式	$a/(0.1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-2})$	$b \times 10^6/(\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$
氢	H_2	0.244	27
氦	He	0.034	24
氮	N_2	1.39	39
氧	O_2	1.36	32
氩	A	1.34	32
水	H_2O	5.46	30
二氧化碳	CO_2	3.59	43
正戊烷	C_5H_{12}	19.0	146
正辛烷	C_8H_{18}	37.3	237

将 p_i 的表式代入式(1)，即得范德瓦耳斯方程：

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT \tag{6-35}$$

式(6-35)适用于 1 mol 的气体。如果气体的质量为 M ，每摩尔质量为 M_{mol} ，那么，在同温度同压强的条件下，气体的体积 V 和 1 mol 时的体积 V_m 的关系为 $V = \frac{M}{M_{\text{mol}}} V_m$ 。所以 $V_m = \frac{M_{\text{mol}}}{M} V$ ，把它代入式(6-35)，就可得到适用于气体质量为 M 的范德瓦耳斯方程

$$\left(p + \frac{M^2}{M_{\text{mol}}^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{M}{M_{\text{mol}}} b \right) = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \tag{6-36}$$

关于范德瓦耳斯方程与理想气体状态方程准确度的比较，可

参看表 6-7. 显然, 范德瓦耳斯方程虽非绝对准确, 但与理想气体状态方程相比, 已能较好地反映客观实际.

表 6-7 范德瓦耳斯方程与理想气体状态方程准确度的比较(0℃时的 N₂)

$p/(10^{-5}\text{Pa})$	$pV/(10^{-5}\text{Pa} \cdot \text{m}^3)$	$\frac{\left(P + \frac{M^2}{M_{\text{mol}}^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{M}{M_{\text{mol}}} b\right)}{10^{-5}\text{Pa} \cdot \text{m}^3}$
1	1.0000	1.000
100	0.9941	1.000
200	1.0483	1.009
500	1.3900	1.014
1000	2.0685	0.893

3. 范德瓦耳斯方程的等温线和真实气体的等温线

如果温度 T 保持恒定, 改写范德瓦耳斯方程为

$$V_{\text{m}}^3 - \left(\frac{pb + RT}{p}\right)V_{\text{m}}^2 + \frac{a}{p}V_{\text{m}} - \frac{ab}{p} = 0$$

可见 p 与 V_{m} 的关系是一个三次方程. 在不同温度下的 p - V 曲线如图 6-21 所示.

当我们把范德瓦耳斯等温线与真实气体的实验等温线作比较时, 就可发现二者都有一条临界等温线, 线上拐点处的切线和横轴平行. 在临界等温线以上, 二者比较接近; 在温度很高时, 二者之间没有区别; 在临界等温线以下, 却有显著的区别. 真实气体的等温线有一个液化过程, 即图 6-21 中的平直的虚线 AB , 在这过程中比体积减小而压强不变. 但在范德瓦耳斯等温线上, 与这一部分相应的却并不是直线, 而是曲线 $AA'B'B$. 液化的起点与终点也不明显.

曲线的 AA' 和 $B'B$ 部分在实验中是可以实现的, 但状态并不稳定. 如果真实气体内没有丝毫尘埃和自由电荷等, 那么在 A 点到达饱和状态以后, 可以继续压缩到 A' 点而暂时不发生液化. 这时蒸气密度大于该温度时的正常饱和蒸气密度, 这种蒸气称为过饱和蒸气, 即图 6-21 中的 AA' 部分. 如果先能驱尽溶解在液体中的气体, 这液体在 B 点仍可随压强的减小而继续膨胀, 暂时还不

汽化. 这种液体称为过热液体, 就是图 6-21 中的 $B'B$ 部分. 这时, 液体的密度减小, 甚至小于在较高温度的时的固有密度. 至于 $A'B'$ 部分所表示的比体积随压强的降低而继续缩小的情况, 实际上是不存在的.

4. 临界点

现在我们来说明如何从临界体积 V_k 和临界压强 p_k 的实验数据求出常数 a 、 b . 根据范德瓦耳斯方程, 1mol 物

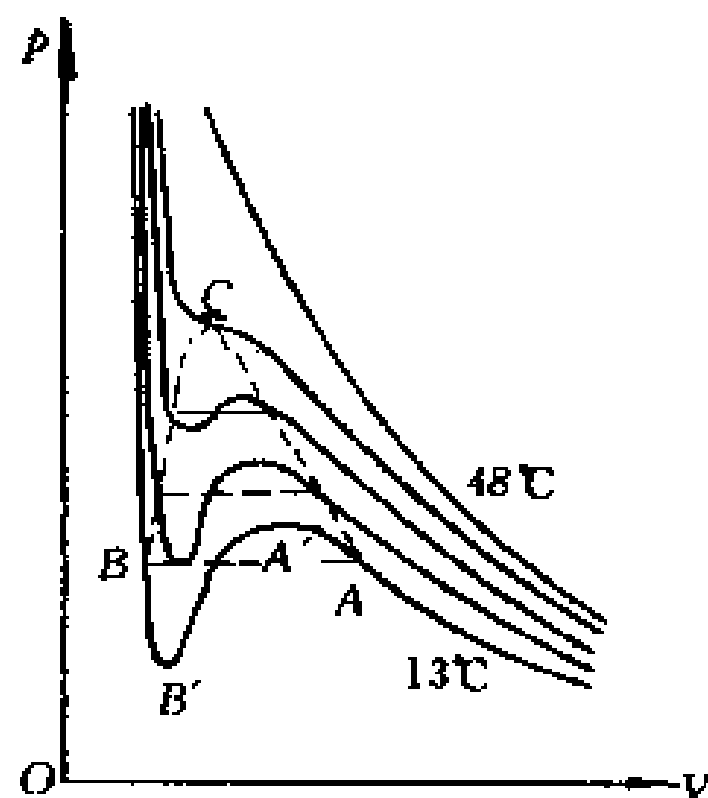


图 6-21 范德瓦耳斯等温线

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT_k \quad (2)$$

因为临界点位在这条等温线的拐点处, 根据拐点的数学条件, 要求 $\left.\frac{dp}{dV_m}\right|_{V_k} = 0$ 和 $\left.\frac{d^2p}{dV_m^2}\right|_{V_k} = 0$, 将方程(2)对 V_m 求导数, 我们可得到

$$\left(\frac{dp}{dV_m} - \frac{2a}{V_m^3}\right)(V_m - b) + \left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) = 0 \quad (3)$$

对 V 再次求导数,

$$\left(\frac{d^2p}{dV_m^2} + \frac{6a}{V_m^4}\right)(V_m - b) + \left(\frac{dp}{dV_m} - \frac{2a}{V_m^3}\right) + \left(\frac{dp}{dV_m} - \frac{2a}{V_m^3}\right) = 0 \quad (4)$$

将 $p = p_k$, $V_m = V_k$, $\frac{dp}{dV_m} = 0$ 和 $\frac{d^2p}{dV_m^2} = 0$ 同时代入式(3)和式(4), 可得

$$p_k + \frac{a}{V_k^2} = \frac{2a(V_k - b)}{V_k^3} \quad (5)$$

$$\frac{6a}{V_k^4}(V_k - b) = \frac{4a}{V_k^3} \quad (6)$$

解式(5)和式(6)即得

$$a = 3V_k^2 p_k, \quad b = \frac{V_k}{3} \quad (6-37)$$

范德瓦耳斯方程在实用中也不够精确. 近年来, 常用各种经验与半经验的真实气体状态方程进行计算, 虽然计算繁复, 但准确度较高.

§ 6-11 物态和相变

物质是由原子和分子等大量微观粒子构成的. 在一定的温度和压强下形成的具有某种稳定结构的粒子聚集态叫做物态. 气态、液态与固态是三种常见的物态. 随着观察研究的深入发展, 人们发现物质远不止三种物态, 它们可以有晶态、非晶态、液晶态、等离子态、超导态、超固态和中子态等等. 物质从一种物态向另一种物态的转变叫做相变. 现在, 我们研究物质在相变时发生的物理现象.

1. 液体的汽化

液体中的分子逸出液面向空间扩散的过程叫做汽化. 液体中各个分子的速度不同, 因而动能也有大有小. 即将逸出液面的分子受到液体表面层分子的引力, 必须克服这个引力而消耗能量才能逸出; 因此, 只有那些速度足够大, 亦即动能足够大的分子, 才能逸出液面. 这样, 汽化的结果, 所剩下的液体分子的平均动能将要减小, 液体的温度将要降低. 汽化时, 要维持液体的温度恒定, 必须向液体传递热量. 1kg 液体在给定温度下完全汽化所需的热量叫做汽化热. 因液体分子紧密结合的程度在高温时比在低温时来得差, 需要把分子拆散的能量随温度的增加而变小. 例如, 水的汽化热在 $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时为 $2.47 \times 10^6 \text{ J/kg}$, 在 $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时为 $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$. 汽化的逆过程是液化. 在液化中, 蒸汽分子相互吸引而凝结为液体, 这时要释放出汽化热.

当液体盛放在封闭容器中时, 液体汽化后, 分子留在液面上空, 有一些会因接触液面而再回到液体中, 这时, 液化与汽化将同时进行. 如果单位时间内离开液体的分子数等于从蒸气回到液体中的分子数, 这时, 宏观的汽化现象就停止了, 容器中的蒸气达到

饱和,我们把这时蒸气的压强定义为饱和蒸气压,上节提到的就是这种平衡状态的压强.

在上节已经看到,饱和蒸气压是随温度的升高而增大的.在图 6-22 的 p - T 图中,表示饱和蒸气压与温度的变化关系的曲线 AD ,叫做汽化曲线.按饱和蒸气压的定义;可知汽化曲线上任一点的 p 、 T 的量值是表示这种物质液汽平衡共存的条件.

2. 固体的熔解及汽化

在一定的温度与压强下,固体将熔解为液体.固体熔解时,分子之间的势能增加,因此也要从外界吸取能量.

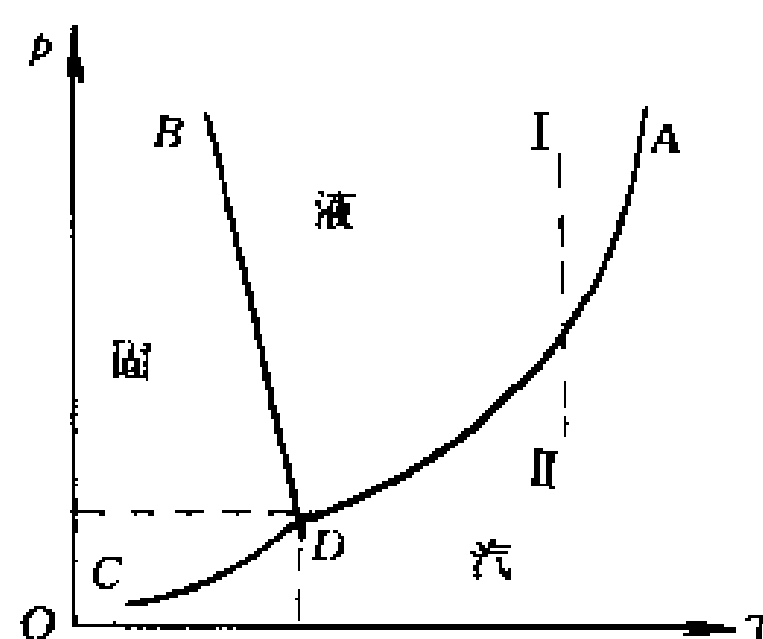


图 6-22 相变曲线

我们把熔解单位质量的固体所需要的热量,叫做熔解热.当单位质量的液体凝固时,同样的热量将被释放出来.在一定的压强下,固体的熔解温度叫做熔点.实验证明,熔点随固体的性质而异.对于给定的固体,当压强变化时,熔解热和熔点都有相应的变化.熔点随压强的变化关系,用 p - T 图中曲线 BD 表示,叫做熔解曲线.熔解曲线表示固态与液态平衡共存的温度-压强条件.熔解曲线与汽化曲线不同,汽化曲线是有终点的,这个终点就是临界点.在临界点以上分不出气液两相.由于临界点的存在,可使物质从液态连续地变化到气态,而不经两相平衡共存的阶段.熔解曲线没有终点,亦即液态与固态之间没有临界点.这是因为固体指的是晶态物质,晶态具有严格的对称性,而液态却没有这种对称性,两者在结构上存在着重大的差别.

通常叫做固体的某些物质并不是晶体,例如塑料中的聚乙烯只是一部分处于有秩序的对称性状态中,其余部分结构上是液体,但没有流动性,叫做过冷液体.这两部分紧密地混合在一起,使这些物质具有中间的物理性质.此外,这些晶态部分在完整程度上又各不相同.完整性差的晶体和完整性高的相比,是在较低的温度熔

解的, 因此, 这些物质显示出一个熔解范围, 常常有 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 或更大的温度范围. 通常把这些物质所有结晶性都消失的温度作为它们的熔点.

固体也可以不通过熔解而直接汽化, 这叫升华. 当然蒸气也可以不通过液化而直接生成晶体. 固体和蒸气达到动平衡时, 蒸气的压强也叫做饱和蒸气压, 它也是温度的函数, 在 p - T 图上也可画出固体的升华曲线, 如图 6-22 中的 CD 曲线. 大多数固体的饱和蒸气压很小, 升华现象也很不显著. 只有少数物质如樟脑等在常温下表现升华现象. 在冬天, 我们常会看到冰的升华.

物质在相变时所需要的热量, 不论是汽化热, 还是熔解热, 统称潜热. 物质在相变时所需要的潜热, 有两方面的作用: 一是使物质的内能发生变化; 二是使单位质量的物质体积变化时, 能克服恒定的外部压强而作功. 前者叫做内潜热, 后者叫做外潜热.

3. 三相点

在 p - T 图上, 物质的汽化曲线、熔解曲线和升华曲线相交于一点, 这点叫做三态平衡点 (图 6-22 中的 D 点), 也叫三相点. 因为三条曲线分别表示了两种不同物态平衡共存的条件, 所以, 三态平衡点的温度与压强反映了物质的三种物态可以平衡而共存的条件. 三态平衡点的温度与压强的量值随物质而异, 常见的一些物质的三相点的温度与压强有如下表.

表 6-8 物质的三态平衡点

物 质	温度/ $^{\circ}\text{C}$	压强/ $(1.33\times 10^3\text{ Pa})$
H_2O	0.0098	4.58
SO_2	-72.7	16.3
CO	-56.6	38.8
O_2	-128.4	2.0
H_2	-259.1	51.4

思 考 题

- 6-1 试解释气体为什么容易压缩,却又不能无限地压缩.
- 6-2 气体在平衡状态时有何特征?这时气体中有分子热运动吗?热力学中的平衡与力学中的平衡有何不同?
- 6-3 对一定量的气体来说,当温度不变时,气体的压强随体积的减小而增大;当体积不变时,压强随温度的升高而增大.就微观来看,它们是否有区别?
- 6-4 如果气体由几种类型的分子组成,写出混合气体的压强公式.
- 6-5 对汽车轮胎打气,使达到所需要的压强.问在夏天与冬天,打入轮胎内的空气质量是否相同?为什么?
- 6-6 试用气体的分子热运动说明为什么大气中氢的含量极少?
- 6-7 回答下列问题:
- (1) 气体中一个分子的速率在 $v - v + \Delta v$ 间隔内的概率是多少?
 - (2) 一个分子具有最概然速率的概率是多少?
 - (3) 气体中所有分子在某一瞬时速率的平均值是 $\bar{v}$,则一个气体分子在较长时间内的平均速率应如何考虑?
- 6-8 气体分子的最概然速率、平均速率以及方均根速率各是怎样定义的?它们的大小由哪些因素决定?各自有什么用处?
- 6-9 在同一温度下,不同气体分子的平均平动动能相等.因氧分子的质量比氢分子的为大,则氢分子的速率是否一定大于氧分子的呢?
- 6-10 如盛有气体的容器相对于某坐标系从静止开始运动,容器内的分子速度相对于这坐标系也将增大,则气体的温度会不会因此升高呢?
- 6-11 速率分布函数的物理意义是什么?试说明下列各量的意义:
- (1) $f(v)dv$; (2) $Nf(v)dv$; (3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$; (4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$; (5) $\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv$;
(6) $\int_{v_1}^{v_2} Nvf(v)dv$.
- 6-12 何谓起伏现象?
- 6-13 一定质量的气体,保持容器的容积不变.当温度增加时,分子运动更趋剧烈,因而平均碰撞次数增多,平均自由程是否也因而减小呢?
- 6-14 平均自由程与气体的状态以及分子本身的性质有何关系?在计算平均自由程时,什么地方体现了统计平均?

6-15 分子热运动与分子间的碰撞,在迁移现象中各起什么作用? 哪些物理量体现了它们的作用?

6-16 在推导迁移现象的宏观规律时,有人认为:既然分子的平均自由程是 λ ,则在 ΔS 两侧 A、B 两部分的分子通过 ΔS 面前最后一次碰撞应发生在与 ΔS 相距 $\frac{1}{2}\lambda$ 处,这样才能保证通过 ΔS 面的分子无碰撞地通过 λ 的路程.你是否同意这种看法? 说明理由.

习 题

6-1 有一水银气压计,当水银柱为 0.76 m 高时,管顶离水银柱液面为 0.12 m. 管的截面积为 $2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. 当有少量氮气混入水银管内顶部,水银柱高下降为 0.60 m. 此时温度为 27°C ,试计算有多少质量氮气在管顶? (氮的摩尔质量为 0.004 kg/mol , 0.76 m 水银柱压强为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$)

6-2 一体积为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的容器中,含有 $4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}$ 的氮气和 $4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}$ 的氢气,它们的温度为 30°C ,试求容器中混合气体的压强.

6-3 一个封闭的圆筒,内部被导热的、不漏气的可移动活塞隔为两部分. 最初,活塞位于筒中央,则圆筒两侧的长度 $l_1 = l_2$. 当两侧各充以 T_1, p_1 与 T_2, p_2 的相同气体后,问平衡时活塞将在什么位置上(即 l_1/l_2 是多少)? 已知 $p_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 680 \text{ K}$, $p_2 = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T_2 = 280 \text{ K}$.

6-4 20 个质点的速率如下:2 个具有速率 v_0 ,3 个具有速率 $2v_0$,5 个具有速率 $3v_0$,4 个具有速率 $4v_0$,3 个具有速率 $5v_0$,2 个具有速率 $6v_0$,1 个具有速率 $7v_0$. 试计算:(1)平均速率;(2)方均根速率;(3)最概然速率.

6-5 计算在 300 K 温度下,氢、氧和水银蒸气分子的方均根速率和平均平动动能.

6-6 求速度大小在 v_p 与 $1.01v_p$ 之间的气体分子数占总分子数的百分之几.

6-7 求:(1)速度大小在 0 与 v_p 之间的气体分子的平均速率;(2)速度大小比 v_p 大的气体分子的平均速率.

$$(\text{提示: } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.8427; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1)$$

6-8 遵守麦克斯韦速率分布的分子的最概然能量 E_p 等于什么量值? 它就是 $\frac{1}{2}mv_p^2$ 吗?

6-9 设 N 个粒子系统的速率分布函数为

$$dN_v = Kdv \quad (V > v > 0, K \text{ 为常量})$$

$$dN_v = 0 \quad (v > V)$$

(1)画出分布函数图;(2)用 N 和 V 定出常量 K ;(3)用 V 表示出算术平均速率和方均根速率.

6-10 设氢气的温度为 300°C .求速度大小在 3000 m/s 到 3010 m/s 之间的分子数 n_1 与速度大小在 v_p 到 $v_p + 10\text{ m/s}$ 之间的分子数 n_2 之比.

6-11 求氢气在 300 K 时分子速率在 $v_p - 10\text{ m/s}$ 与 $v_p + 10\text{ m/s}$ 之间的分子数所占百分比.

6-12 试求温度为 T 分子质量为 m 的气体中分子速率倒数的平均值 $\left(\frac{1}{v}\right)$,它是否等于 $\frac{1}{\bar{v}}$? (提示: $\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2b}} u du = \frac{1}{2b}$)

6-13 1 mol 氢气,在温度为 27°C 时,它的分子的平均动能和转动动能各为多少?

6-14 求上升到什么高度处,大气压强减到地面的 75% .设空气的温度为 0°C ,空气的摩尔质量为 0.0289 kg/mol .

6-15 求压强为 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 、质量为 $2 \times 10^{-3}\text{ kg}$ 、容积为 $1.54 \times 10^{-3}\text{ m}^3$ 的氧气的分子平均平动动能.

6-16 容器内贮有 1 mol 的某种气体,今从外界输入 $2.09 \times 10^2\text{ J}$ 的热量,测得其温度升高 10 K ,求该气体分子的自由度.

6-17 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动.设导体中共有 N 个自由电子.电子气中电子的最大速率 v_F 叫做费米速率.电子的速率在 v 与 $v + dv$ 之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi v^2 A dv}{N}, & v_F > v > 0 \\ 0, & v > v_F \end{cases}$$

式中 A 为常量.(1)由归一化条件求 A .(2)证明电子气中电子的平均动能 $\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} m v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F$,此处 E_F 叫做费米能.

6-18 无线电所用的真空管的真空度为 $1.33 \times 10^{-3}\text{ Pa}$,试求在 27°C 时单位体积中的分子数及分子平均自由程.设分子的有效直径为 $3.0 \times 10^{-10}\text{ m}$.

6-19 在标准状态下氦气(He)的粘度 $\eta = 1.89 \times 10^{-5}\text{ Pa} \cdot \text{s}$,又 $M_{\text{mol}} =$

0.0040 kg/mol , $\bar{v}=1.20 \times 10^3 \text{ m/s}$, 试求:

(1) 在标准状态下氮原子的平均自由程.

(2) 氮原子的半径.

6-20 设氮分子的有效直径为 10^{-10} m , (1) 求氮气在标准状态下的平均碰撞次数; (2) 如果温度不变, 气压降到 $1.33 \times 10^{-4} \text{ Pa}$, 则平均碰撞次数又为多少?

6-21 在温度 0°C 和压强 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下, 空气密度是 1.293 kg/m^3 , $\bar{v}=4.6 \times 10^2 \text{ m/s}$, $\bar{\lambda}=6.4 \times 10^{-8} \text{ m}$, 求粘度.

6-22 由实验测定在标准状态下, 氧气的扩散系数为 $1.9 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 根据这数据计算氧分子的平均自由程和分子的有效直径.

6-23 设有遵守范德瓦耳斯方程的 1 mol 气体, 试建立起临界点温度与压强、体积之间的关系.

6-24 CO_2 的临界温度为 31°C , 临界压强为 $73 \times 10^5 \text{ Pa}$, 求 1 mol 的 CO_2 的临界体积.

6-25 $M=10^{-3} \text{ kg}$ 的氮气, 体积从 $0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 增大到 $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. 求氮分子间引力所作的功. 已知氮 $a=1.408 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{m}^2/\text{mol}^2$.

6-26 已知氮的临界压强 $p_k=3.4 \times 10^6 \text{ Pa}$, $V_k=0.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$, 求它的范德瓦耳斯修正量 a 及 b .

阅读材料 D

非常温和非常压

1. 真空的获得及测量

真空技术已有很长的历史, 它的应用也很广泛. 首先在电真空器件制造工业的发展中起了重要的作用; 其次, 金属的冶炼、半导体的提纯以及仪器制造工业和医药工业等方面, 也都对真空技术有一定的要求.

抽气机也叫真空泵, 最常用的有两种. 第一种是转动式抽气机, 它能够直接在大气压下工作, 但产生的真空度并不很高, 通常

能达 $1 \sim 10 \text{ Pa}$. 第二种是需要在一定真空条件下才能实际工作的扩散抽气机, 它要和转动式抽气机联合使用, 可达 10^{-4} Pa , 甚至更高的真空度. 现在对它们简单介绍如下.

(1) 转动式抽气机 图 D-1 表示该机的剖面, 图中 F 是一个气缸, 气缸内装有一个偏心圆柱体 E. 这样, 在电动机使之迅速转动时, 便经常与气缸紧密接触于 D 点. 沿该圆柱体的直径, 分做两半, 当中嵌入二金属翼片 S_1 及 S_2 , 在 S_1 及 S_2 之间联以强弹簧 C, 使 S_1 及 S_2 恒与气缸的内壁压紧以防止漏气. 接触点 D 和 S_1 、 S_2 两翼片把气缸内部分成两或三个互不通气的区域(图 D-2). 在圆柱

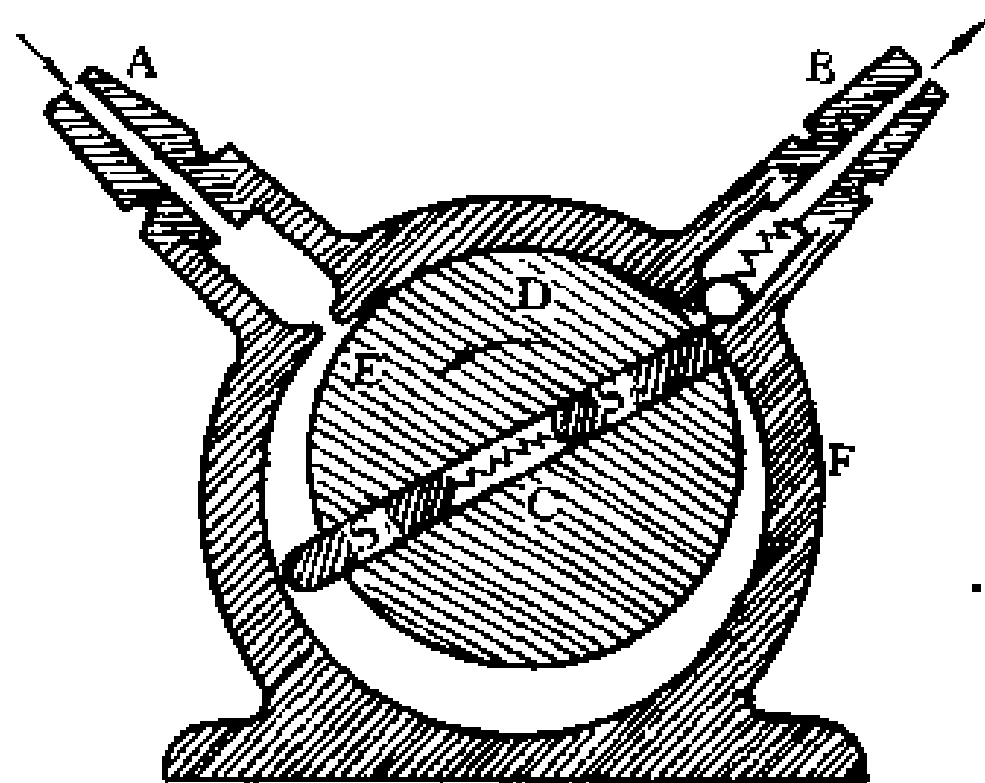


图 D-1 转动式抽气机

体 E 沿着箭头所指的方向转动一周的过程中, 自进气口 A 进入第一区域的气体, 开始时逐渐增加[图 D-2(a)和(b)], 继而被隔离开来[图 D-2(c)], 最后经出气口 B 而排出. 圆柱体 E 不断转动, 自 A 口进入的气体不断由 B 口排出, 和 A 口连通的容器内的气体就愈来愈稀薄.

(2) 高度真空扩散抽气机 朗缪尔(I. Langmuir)水银冷凝扩散抽气机, 不能直接在大气压强下开始工作, 通常恒与转动式抽气机联合使用.

图 D-3 表出全部真空系统的简图. 图中左端绘出扩散抽气机的部分. P 为转动式抽气机(或称预备真空抽气机), N 为水银蒸气

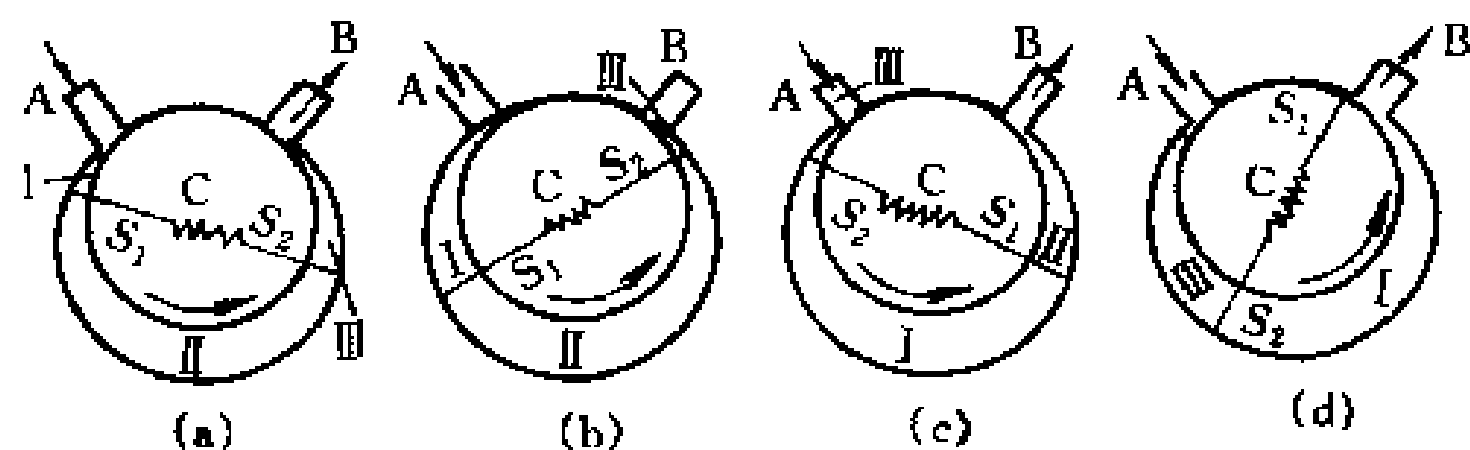


图 D-2 转动式抽气机的操作过程

捕集器, L 为杜瓦瓶, M_1 、 M_2 、 M_3 均为真空计, R 是待抽空的容器。

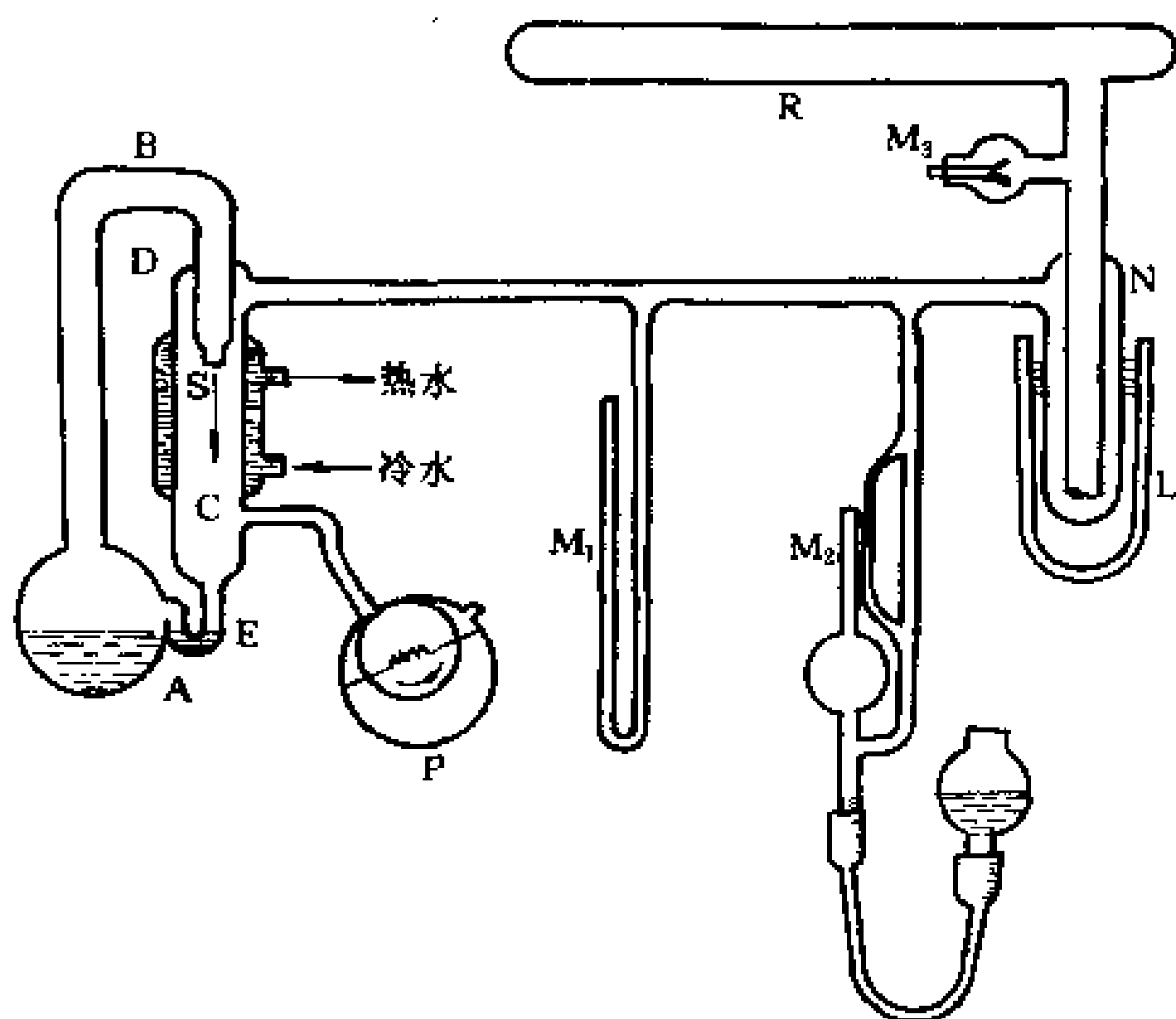


图 D-3 全部真空系统简图

在蒸发器 A 中放入水银, 用电炉或火焰(图中未绘出)加热至 $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ 左右. 水银蒸发时, 其蒸气沿 B 管上升至 S 口高速向下喷射(蒸发器 A 与导管 B 外包有石棉, 以使蒸发器加热均匀, 并防止水银蒸气过早地作无益的凝结). 在 D 管的外围通以流动的冷水, 水银蒸气因冷却而凝结于 D 管的内壁, 形成细滴向下流动, 经 E 管而回到蒸发器 A. E 叫做缓冲管. 管内经常积存一段水银, 以防止 A 中的水银蒸气直接被转动式抽气机抽走.

当水银蒸气从喷口 S 高速喷出时, 其中气体的分压几乎为零,

而在C管上端气体的分压则由预备真空决定.这样就出现了气体的分压梯度,因此来自容器R的气体就会扩散到水银蒸气中去,被水银蒸气带到C管下方而被抽出.

水银扩散抽气机由于存在汞毒危害人体健康,常用难挥发的高分子油液代替水银,这种油扩散抽气机的结构和工作原理与水银扩散抽气机基本相同.

测量真空度的量具叫做真空计.下面介绍两种常用的真空计.

(3) 麦克劳真空计 它的主要原理是隔离一部分待测压强的气体加以压缩,直至压强放大到可以测量的地步,然后用玻意耳定律算出原始压强.图D-4表示常用的麦克劳真空计.B为一大玻璃泡,下端通过玻璃管C与真空系统连接,上端有毛细管 K_1 ,与 K_1 相平行的另有毛细管 K_2 ,两毛细管的内截面完全相等,借以避免因毛细现象而引起的高度差. α 为一标记,刻在B与C相连的地方.自 α 以上直到 K_1 的顶端,总体积为 V_0 ,是仪器的常数,可用适当方法测定之.

测定压强的步骤如下.升高玻璃瓶A,使水银上升到标记 α 处,此时禁闭在B泡中气体的压强即为真空系统的原始压强 p_0 .继续升高A,则B泡中的气体将被压缩到 K_1 管中,因而压强增大.再调节A的高度,使毛细管 K_2 中的水银面与 K_1 的顶端相齐,如图D-4所示.两毛细管 K_1 、 K_2 中的水银高度差 Δh 可直接用标尺R来测定. Δh 就表示压缩后气体的压强(K_2 上端微小的原始压强可忽略不计),如果毛细管 K_1 的内截面是 σ ,则压缩后气体的体积为 $\sigma\Delta h$,原来的体积为 V_0 ,原来的压强为 p_0 ,根据玻意耳定律

$$p_0 V_0 = pV = \Delta h \cdot \sigma \Delta h = \sigma (\Delta h)^2$$

故得

$$p_0 = \frac{\sigma}{V_0} (\Delta h)^2$$

式中 σ 与 V_0 是仪器常量,因此测定 Δh 就可得到 p_0 的数值.由上式可知,容器 V_0 愈大,毛细管愈细的麦克劳真空计可能测出的压强也愈小.用麦克劳真空计可以测定数量约为 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ Pa的

压强. 麦克劳真空计全部用玻璃制成, 易于破碎, 所以必须谨慎操作.

麦克劳真空计是以玻意耳定律为根据的, 所以它的读数只有当这种气体在被压缩的过程中一直能满足玻意耳定律的条件下才是正确的. 由于一般蒸气在压缩时会凝结, 不遵从玻意耳定律, 所以麦克劳真空计不能用来测量蒸气压.

(4) 热阴极电离真空计 气体导电时, 其中电子与气体分子的碰撞次数与分子的密度有关. 密度大, 碰撞次数多, 产生的离子也多, 气体中的电流也越大. 由于气体的压强由气体分子的密度决定, 因此测定气体中电流的

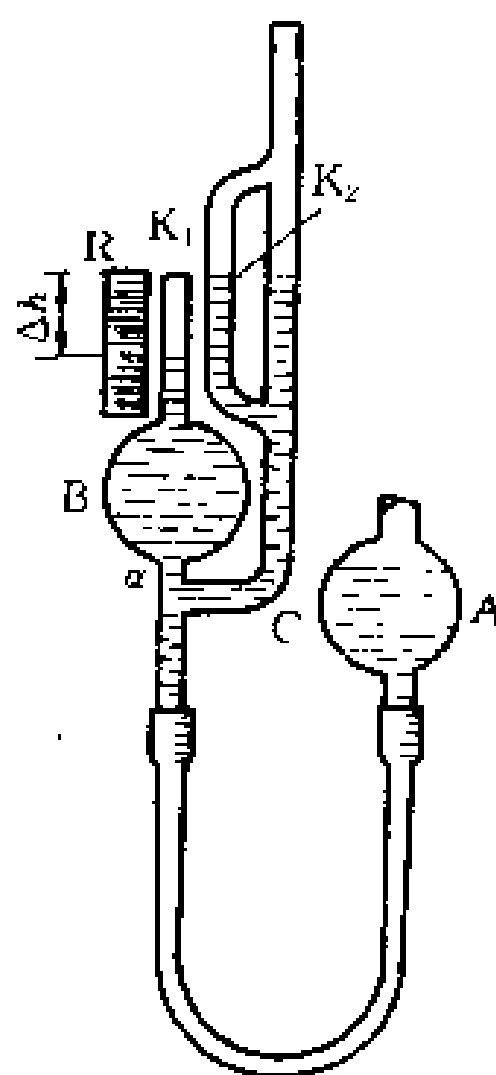


图 D-4 麦克劳真空计

大小就能确定气体的压强. 电离真空计就是根据这个原理制造的; 它的主要部分是个三极真空管, 其简单的线路如图 D-5 所示. 在应用时把电离真空计与被抽空系统在 S 口连接, 因此真空系统内的气体压强与电离真空计内相同. 如果在灯丝电路 F 中通以电流, 灯丝受热而发射电子. 使栅极的电压为正, 它就吸引灯丝发射出来的电子. 电子在趋向栅极的路程中, 要与气体分子撞击, 使气体分子电离成正负离子. 在板极与丝极间再加一电压, 使板极的电压为负, 则正离子被板极 B 吸引, 在板极电路中形成了电流 I_p , 气体分子的密度愈大 (即压强 p 越大), 撞击的次数多, 游离气体的离子多, I_p 也大, 实验告诉我们,

$$p = kI_p,$$

式中 k 表征仪器的特性, 是一个常量, 由检流计测出 I_p , 就可算出压强 p . 它能测的范围为 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ Pa.

如果把收集离子的板极改为细丝状, 则由灯丝发射的电子在轰击栅极时所产生的 X 光投射到板极上引起的光电发射, 将因而减弱, 它所测量的真空度可延伸到 10^{-9} Pa 的数量级.

2. 低温的获得

低温的获得和气体的液化是分不开的. 要使气体液化, 其基本原理是降低气体分子热运动的动能. 常用的方法有两种. 第一种是利用节流膨胀法, 使气体从压强较大的空间, 经过多孔性物质或小孔膨胀到压强较小的空间, 这时气体因膨胀做功而消耗内能, 从而降低了温度. 第二种是用绝热膨胀法使气体液化. 因为物质进行绝热膨胀而对外做功时, 内能要减少, 这就导致温度和压强的降低. 无论采用哪种方法, 要使气体液化, 气体的温度都必须降低到它的临界温度以下.

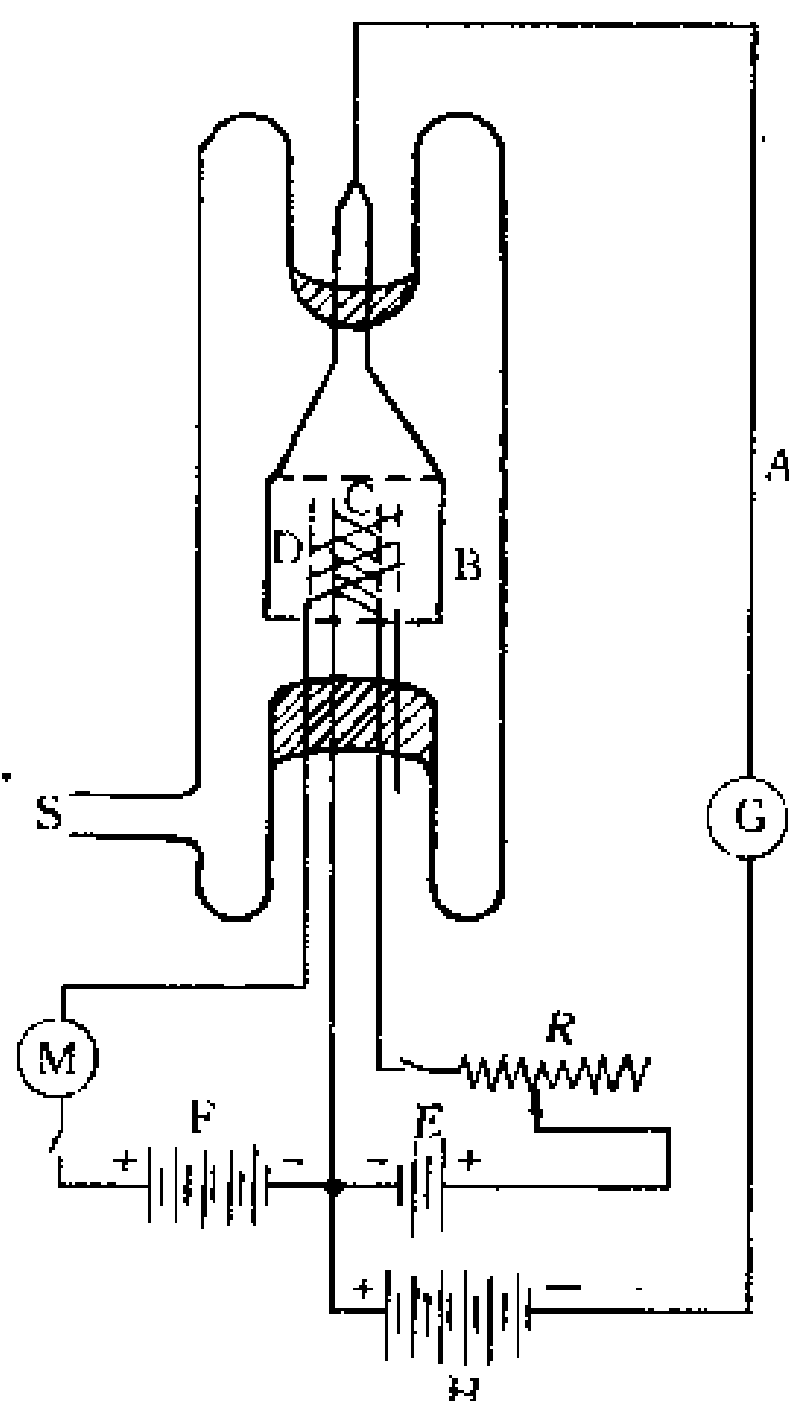


图 D-5 电离真空计线路简图

图 D-6 是用来液化气体的林德机的示意图. 经压缩机 A 高压压缩并事先用水冷却的气体, 沿 B 经冷却管 C 由冷水进一步冷却, 但气体仍在高压下离开 C 管, 在小孔 D 处节流膨胀而再度变冷. 这种循环反复进行, 压缩气体的温度愈来愈低, 达到临界温度后一部分气体开始液化.

实现绝热膨胀致冷的机器叫做膨胀机. 利用绝热膨胀的氮致冷机, 设备比较庞大, 因为需要用液氮或液氢预冷, 还得另外配备液化机. 图 D-7 是一种利用绝热汽化而致冷的方法. 把盛放液态气体的杜瓦瓶的上端封住, 用一个连通管接到抽气机上. 当抽气机工作时, 液态气体上面的饱和蒸气被不断抽走, 蒸气压不断降低, 使液态气体在绝热情形下不断汽化而变冷. 抽气愈快, 汽化愈速, 它的温度就降得愈低. 这种方法用在氮上, 能降到 0.71 K, 用在氮的同位素³He 上, 能降到 0.2 K.

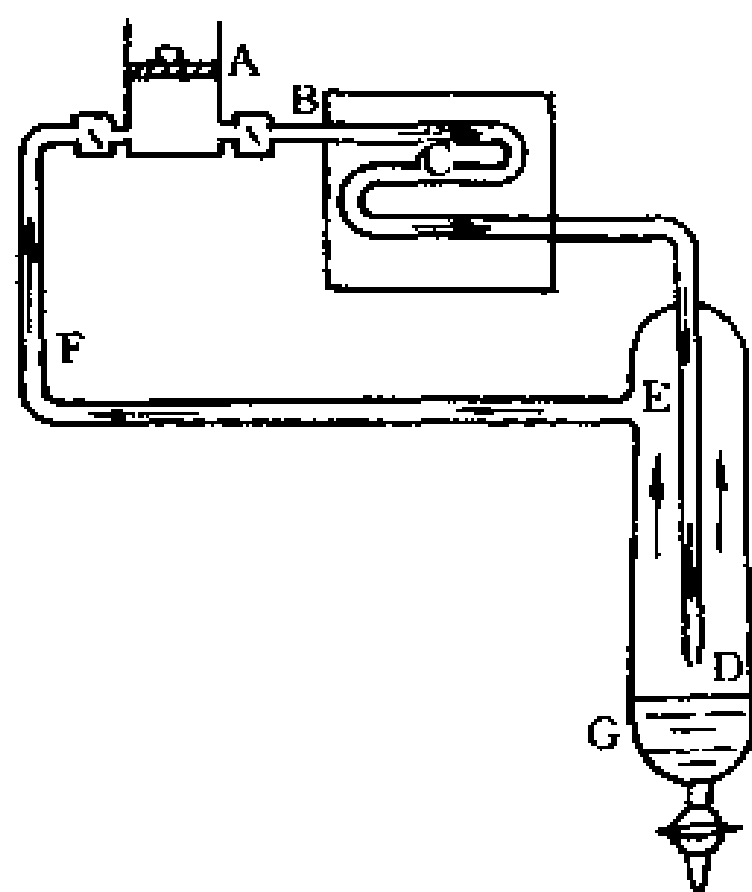


图 D-6 制造液态空气的
林德机示意图

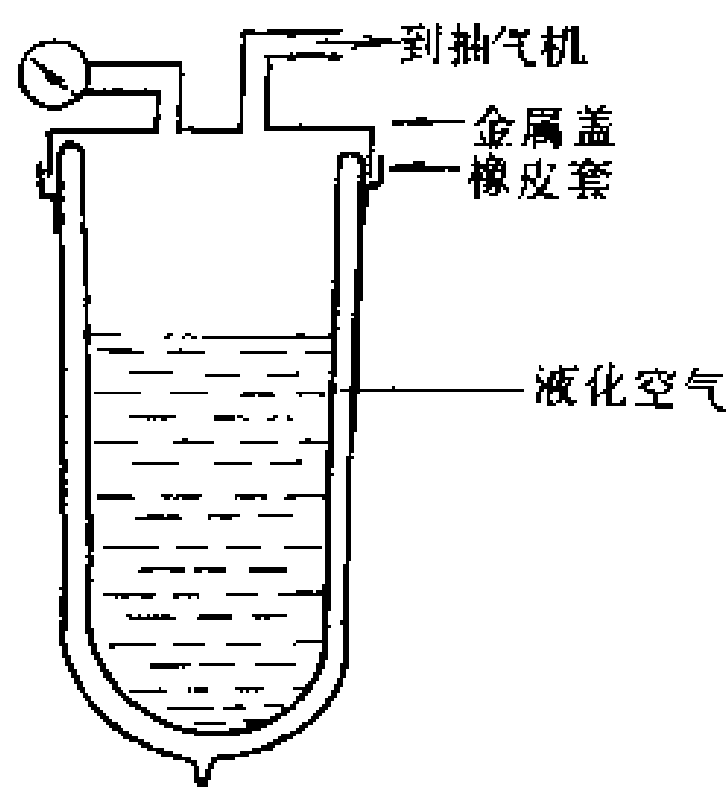


图 D-7 利用绝热汽化致冷

3. 低温的测定

测量一个系统的温度的仪器称温度计,它是根据系统的物理量随温度改变而改变的原理制成的.温度计种类很多,依据的原理也各不相同.按照不同的测温范围,可以采用不同的温度计.下面介绍两种测量低温时常用的温度计.

(1) 气体温度计 气体温度计有定体及定压两种,使用起来虽不如液体温度计那样方便,但由于精确度较高,测量范围也很广阔,所以物理学上就被选为标准温度计.许多气体的液化点很低,在液化点以上的任何温度,都可由气体温度计来测定.图 D-8 系一定体温度计.它是利用气体体积不变时,压强随温度改变的性质制成的,图中 G 泡贮有定量的气体,经 T 管与一水银压强计相连.将 G 泡放入待测温度的物体系统中,经过一段时间后,泡内气体压强就会达到稳定,这时沿标尺 S 上下移动压强计的 B 端,以保持其 A 端水银面固定在一定位置 D 处,就可读出泡内气体压强的大小,从而决定这个物体温度的高低.

(2) 蒸气压温度计 上面我们讨论绝热汽化来降低温度的方法时,这个温度与蒸气压间有一定的关系.因此可以从测定蒸气压来测定温度.蒸气压温度计就是根据这个关系来测定温度的.在14~83 K 间的温度可采用氢或氮的饱和蒸气压温度计来测定;而在液氮的温度下,通常就只能采用氮的饱和蒸气压与温度关系的经验公式来计算.

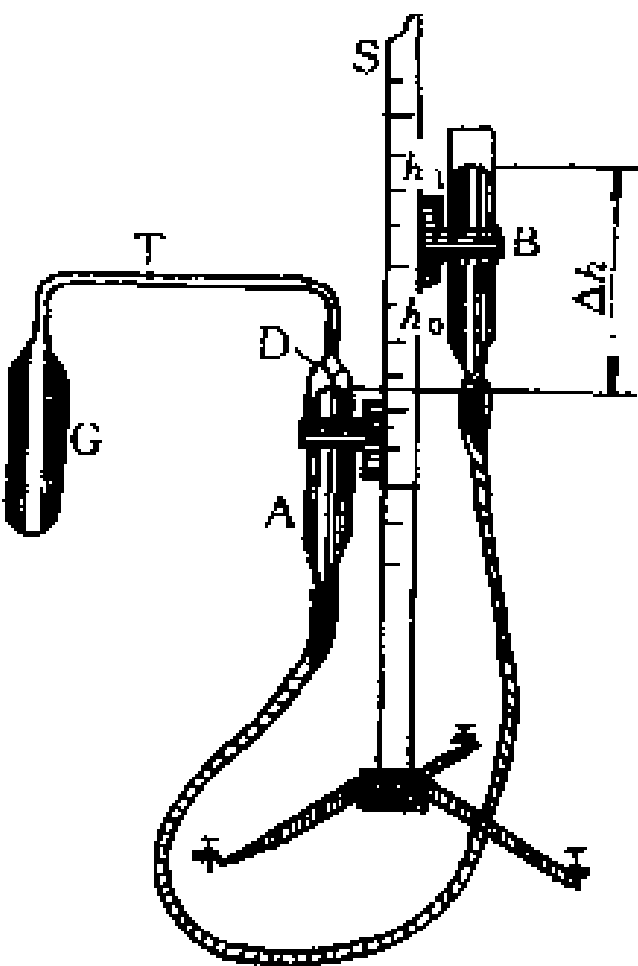


图 D-8 定体气体温度计

4. 高压的获得

产生高压的基本方法如图 D-9 所示,就是用很大的力把活塞压入一个圆筒中去,外力愈大,样品上所受的压强也就愈高.压强所能到达的限度,由活塞和圆筒的材料强度以及圆筒内样品的挤出或漏失等因素所决定.应用这样的方法所达到的压强,最大不过 10^6 Pa,对于 $10^9 \sim 10^{10}$ Pa 的巨大压强,这种简陋的装置当然就无能为力了.

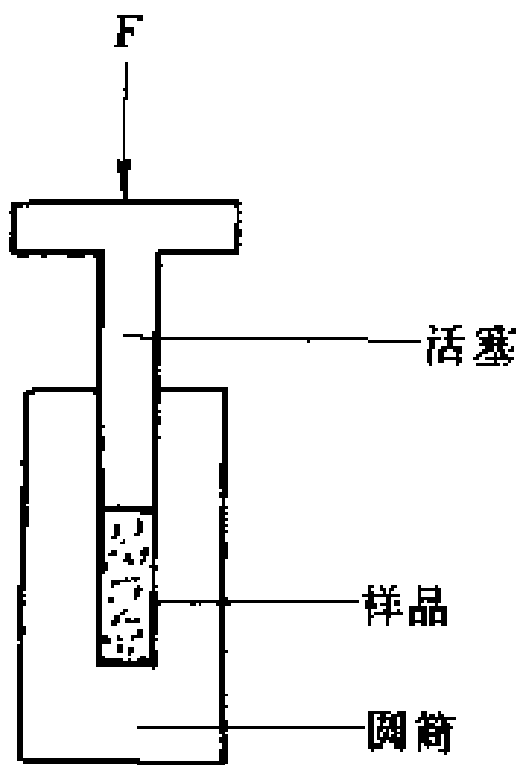


图 D-9 产生高压的基本方法

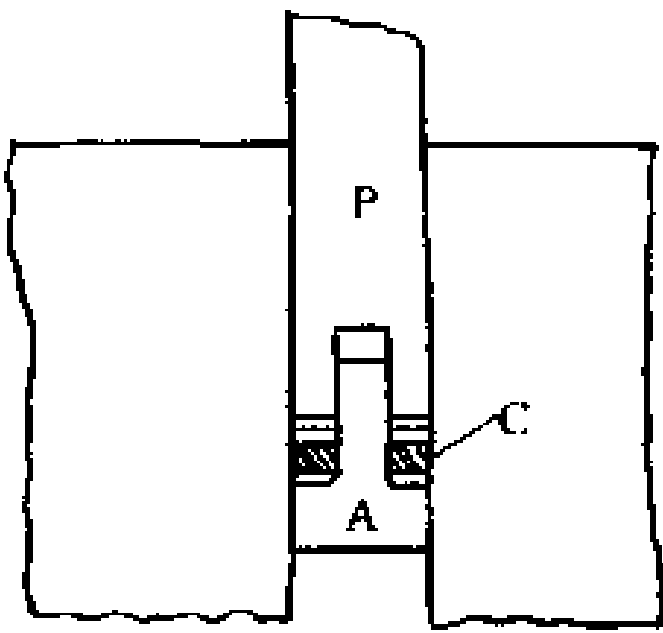


图 D-10 运动活塞的改进图

要使样品(如液体)不会从活塞和容器之间漏失或挤出,乃是一个十分困难的问题.布里奇曼(P. W. Bridgman)发明了一种很

巧妙的装置,成功地解决了这个问题.这种装置如图 D-10 所示.活塞 P 由硬钢制成,它的下端有一孔道,活塞头 A 的柄可以自由地插入这个孔道中,A 与 P 间放着橡皮软垫圈 C,在 C 上另外再放几个铜环和软钢环.由图可知,加到活塞上的外力是通过软垫圈而传递到 A 上的,而软垫圈的面积小于活塞头 A 下部的面积,所以作用在软垫圈上的压强大于作用在活塞头 A 上的压强,也就大于作用在样品上的压强.这样,样品的漏失是不可能的了.而铜环和钢环是用来防止橡皮漏失的.利用这种装置,加到样品上的压强可以达到成百上千 MPa,这时的限制因素就是活塞和圆筒材料的耐压程度.

5. 高压的测定

测定高压所用的压强计种类很多,现在选择两种介绍如下.

(1) 管状弹簧压强计 它的构造如图 D-11 所示,A 为椭圆形截面的管状弹簧,B 为夹持器,C 为接管并与待测压强的容器相连,D 为压强计的外壳,E 为连杆,F 为扇形齿轮并与指针 G 的轴上所装的小齿轮相啮合.当待测压强的物质由接管 C 进入管状弹簧里面时,管状弹簧即受到压强的作用而自动伸长,伸长的程度随压强的大小而定.弯管伸长时,指针 G 就随着转动,因而可以读出待测压强的数值.这种压强计一般可以测定 500~1 000 MPa.这种压强计的优点是制造简单,操作可靠,价格低廉,有均匀易读的刻度而且读数也相当精确.

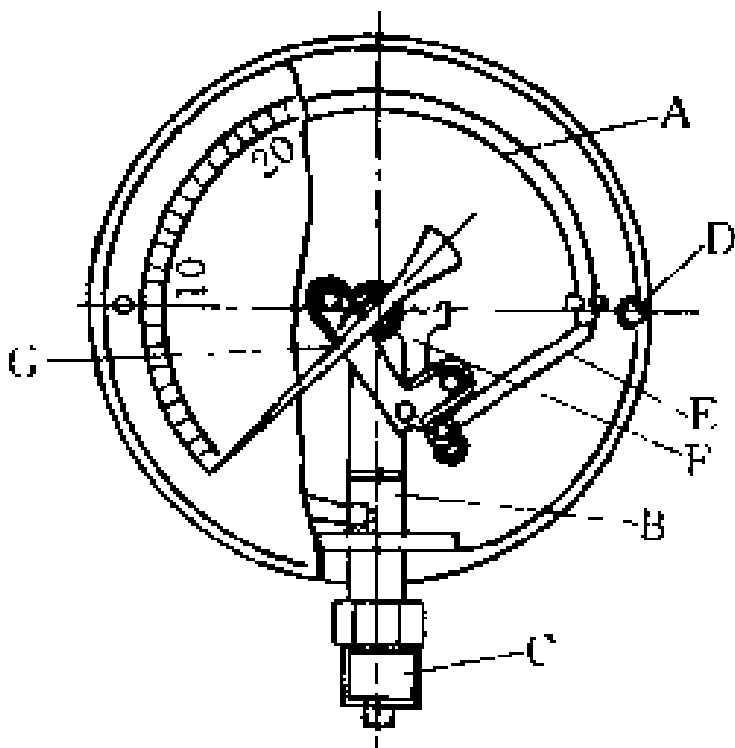


图 D 11 管状弹簧压强计

(2) 杠杆活塞式压强计 它的构造如图 D-12 所示. A 为压强计的圆筒,B 为活塞,C 为砝码盘,D 为杠杆,E 为活塞的转动装置.当待测压强作用在活塞的下端截面上,活塞就要上升,把砝码加到 C 盘上,就可通过杠杆系统把负荷传至活塞的上端截面上,

而将活塞向下压至原来位置. 设 p 为待测压强, S 为活塞的截面积, F 为加在活塞上端截面上的力. 当平衡时, $F = pS$, 即

$$p = \frac{F}{S}$$

F 可以从所加的砝码及应用杠杆原理的计算得到, 从而可以求出 p . 平衡 1 000 MPa 的压强只要用 10 kg 的砝码就够

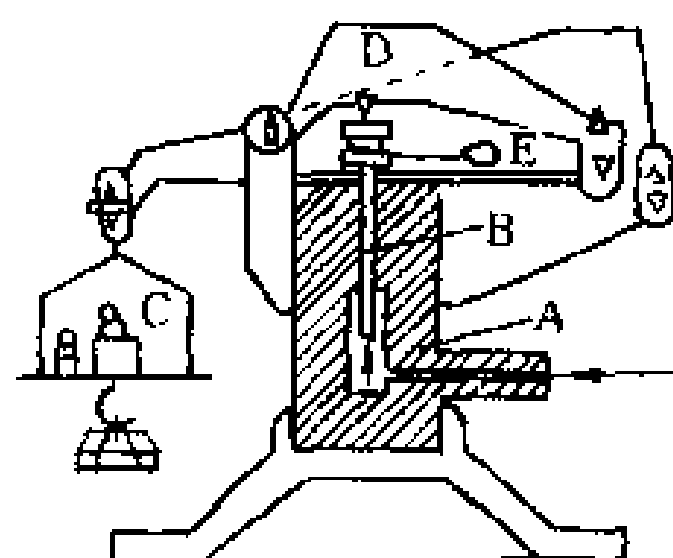


图 D-12 测量 1 000 MPa 用的
杠杆活塞式压强计

了. 如果自砝码盘上取下 1 g 砝码 (相当于 1.0×10^6 Pa 的变化), 活塞就会上升, 由此可见, 这种压强计的灵敏度是相当高的, 它的准确度也很高, 除用于测定压强外还可校准其他压强计.

6. 高温的获得

获得高温的常用方法是日光聚焦法和高频加热法. 日光聚焦法一般都采用大的抛物面反射镜, 将日光反射聚焦, 它可用来对真空中的样品进行加热. 至于高频加热法, 它所依据的基本原理是电磁学中的介电体极化和电磁感应现象. 图 D-13 为两种高频加热法的示意图. 图(a)表示交变磁场的感应加热法, 图(b)表示交变电场中介电体加热法.

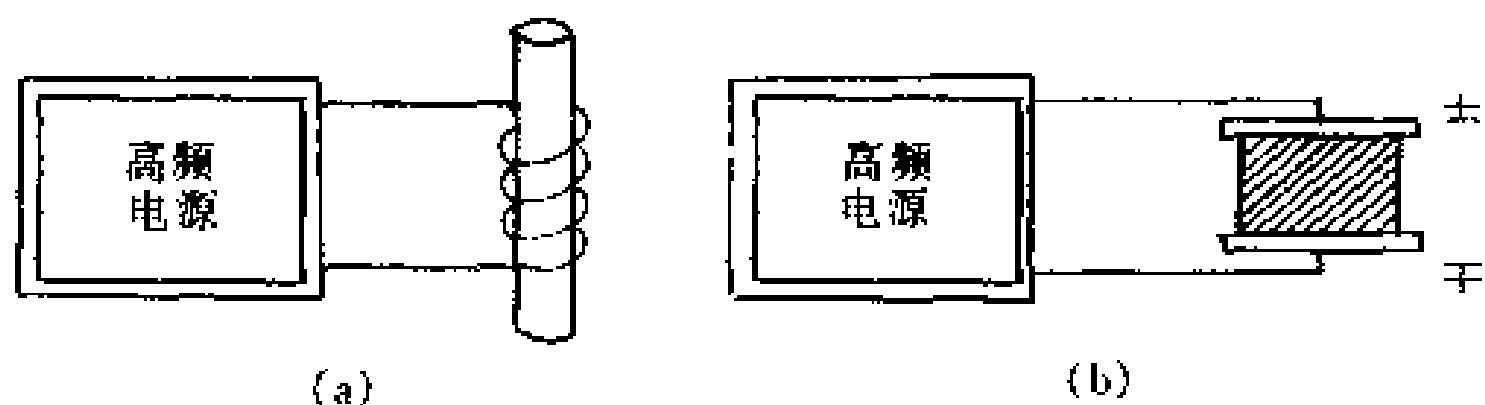


图 D-13 两种基本的高频加热示意图

交变磁场的感应加热法, 是利用涡流来发热的. 当交变电流通过线圈时, 在线圈的内部及其周围产生交变磁场, 如果在这交变磁场中放一圆柱导体, 那么, 由于电磁感应的结果, 在导体内将有涡流出现. 因圆柱导体的电阻很小, 涡流很大, 所以可把大量电能转换成热能. 如果磁场随时间变化的频率愈高, 即线圈内通过的电流

的频率愈高,那么导体中的涡流也愈大,同时导体内的涡流愈趋向于导体的表面.这个特性使我们既可在导体上选择加热的地位,又可选择加热的深度,节省了加热功率,缩短了操作时间,而为其他方法所不及.高频感应加热法,主要用来对导体加热,它不但可使磁性金属加热到很高的温度甚至熔化,也可使非磁性金属加热到很高的温度.至于介电体,由于电阻太大,很难产生涡流,但是利用介电体的极化,同样也可进行高频加热.我们知道将介电体放在外电场中,介电体内部的分子就将沿着电场方向发生极化,外电场对它作的功转变成分子定向极化的能量.在交变电场作用下,分子的极化方向亦将反复改变,分子定向极化的能量就转换成分子不规则运动的能量,而使介电体的温度升高.频率愈高,电场改变愈快,转换成分子不规则运动能量的过程也进行得愈迅速,而温度就升得愈高.这种加热方法所用的频率约在 $1\sim 50\text{ MHz}$.

除上述两个方法外,电弧也是产生高温的常用方法之一.在两碳极上加以电压,使它们相互接触,因为接触处的电阻很大,两个电极强烈地发热,于是阴极上便有热电子发射出来.将两极分开,它们中间就出现一个明亮的电弧,这种现象叫做弧光放电.电弧中的温度很高,在阳极处约为 $4\,000\text{ }^{\circ}\text{C}$.在阴极处,实验指出,电弧的温度随气压的增加而升高.例如在 100 MPa 的气压下,温度可达 $10\,000\text{ }^{\circ}\text{C}$.

测定高温常用光测高温计,这将在第三册中介绍.

第七章 热力学基础

热力学是研究物质热现象与热运动规律的一门学科,它的观点与采用的方法与物质分子动理论中的观点和方法很不相同.在热力学中,并不考虑物质的微观结构和过程,而是以观测和实验事实作根据,从能量观点出发,分析研究热力学系统状态变化中有关热功转换的关系与条件.现代社会人们愈来愈注意能量的转换方案和能源的利用效率,其中所涉及的范围极广的技术问题,都可用热力学的方法进行研究,其实用价值很高.热力学的理论基础是热力学第一定律与热力学第二定律.热力学第一定律其实是包括热现象在内的能量转换与守恒定律.热力学第二定律则是指明过程进行的方向与条件的另一基本定律.人们发现,热力学过程包括自发过程和非自发过程,都有明显的单方向性,都是不可逆过程.但从理想的可逆过程入手,引进熵的概念以后,就可从熵的变化来说明实际过程的不可逆性.因此,在热力学中,熵是个十分重要的概念.热力学所研究的物质宏观性质,经过气体动理论的分析,才能了解其本质;气体动理论,经过热力学的研究而得到验证.它们两者相互补充,不可偏废.

§ 7-1 热力学第一定律

1. 热力学过程

在热力学中,一般常把所研究的物体或物体组叫做热力学系统,简称系统.典型的系统可以是容器内的气体分子集合或溶液中的分子集合,或者甚至象橡皮筋中分子集合那样的复杂系统.当系

统由某一平衡状态开始进行变化,状态的变化必然要破坏原来的平衡态,需要经过一段时间才能达到新的平衡态.系统从一个平衡态过渡到另一个平衡态所经过的变化历程就是一个热力学过程.热力学过程由于中间状态不同而被分成非静态过程与准静态过程两种.如果过程中任一中间状态都可看作是平衡状态,这个过程叫做准静态过程,也叫平衡过程.这后一名称,我们已在上一章介绍过了.如果中间状态为非平衡态,这个过程叫做非静态过程.以气缸中气体的压缩或膨胀为例,推拉活塞时,气体的平衡态就被破坏.如果活塞拉得很慢,气体的平衡态被破坏后,由于系统状态变化很小,它能很快地恢复平衡,这就构成准静态过程.反之,如果活塞拉得很快,系统状态的变化很大,它来不及马上重新恢复平衡,这就是个非静态过程.严格说来,准静态过程是无限缓慢的状态变化过程,它是实际过程的抽象,是一种理想的物理模型.要使一个热力学过程成为准静态过程或平衡过程,应该怎样办呢?例如,要使系统的温度由 T_1 升到 T_2 的过程是一个平衡过程,就必须采用温度极为相近的很多物体(例如装有大量水的很多水箱)作为中间热源.这些热源(如这里的水箱)的温度分别是 $T_1, T_1 + dT, T_1 + 2dT, \dots, T_2 - dT, T_2$ (图 7-1).其中 dT 代表极为微小的温度差.我们把温度为 T_1 的系统与温度为 $T_1 + dT$ 的热源相接触,系统的温度也将升到 $T_1 + dT$ 而与热源建立热平衡.然后,再把系统移到温度为 $T_1 + 2dT$ 的热源上,使系统的温度升到 $T_1 + 2dT$,而与这一

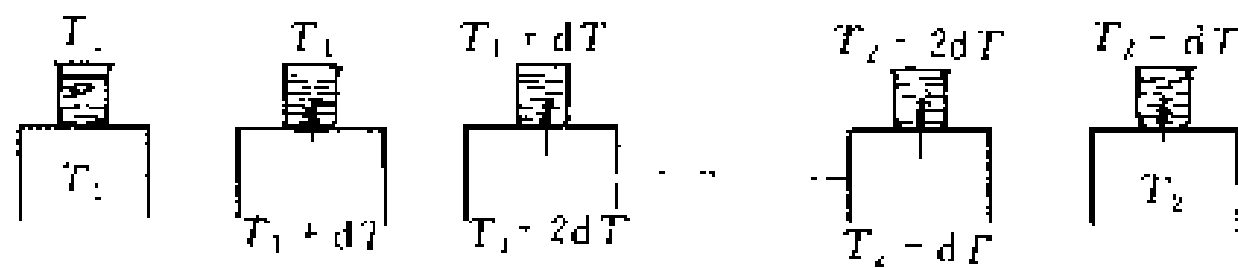


图 7-1 一系列有微小温度差的恒温热源

热源建立热平衡.依此类推,直到系统的温度升到 T_2 为止.由于所有热量的传递都是在系统和热源的温度相差极为微小的情形下进行的,所以,这个温度升高的过程无限接近于平衡过程.而且,这种

过程的进行一定是无限缓慢的,它好像是平衡状态的不断延续.热力学的研究是以平衡过程的研究为基础的.把理想的平衡过程弄清楚了,将有助于对实际的非静态过程的探讨.

2. 功、热量、内能

在热力学中,一般不考虑系统整体的机械运动.无数事实证明,热力学系统的状态变化,总是通过外界对系统做功,或向系统传递热量,或两者兼施并用而完成的.例如,一杯水,可以通过加热,用传递热量的方法,使这杯水从某一温度升高到另一温度;也可用搅拌做功的方法,使它升高到同一温度.前者是通过热量传递来完成的,后者则是通过外界做功来完成的.两者方式虽然不同,但能导致相同的状态变化.由此可见,做功与传递热量是等效的.过去,习惯上功用 J 作单位,热量用 cal(卡)作单位, $1\text{cal}=4.186\text{J}$;现在,在国际单位制中,功与热量都用 J 作单位.

在力学中,我们把功定义为力与位移这两个矢量的标积,外力对物体做功的结果会使物体的状态变化;在做功的过程中,外界与物体之间有能量的交换,从而改变了它们的机械能.在热力学中,功的概念要广泛得多,除机械功外,还有电磁功等其他类型.对此,简单介绍如下:

(1) 流体体积变化所作的功 我们举气体膨胀为例,设有一气缸,其中气体的压强为 p ,活塞的面积为 S (图 7-2).当活塞缓慢移动一微小距离 dl 时,在这一微小的变化过程中,可认为压强 p 处处均匀而且不变,因此是个平衡过程.在此过程中,气体所作的功为

$$dA = pSdl = pdV \quad (7-1)$$

式中 dV 是气体体积的微小增量.在气体膨胀时, dV 是正的, dA 也是正的,表示系统对外做功;在气体被压缩时, dV 是负的, dA 也是负的,表示系统作负功,亦即外界对系统做功.

(2) 表面张力的功 在图 7-3 中,用铁丝弯成长方形框架,上

面张有液体薄膜. 框架的右边 ab (长度为 l) 可以移动. 由于液体表面张力的存在, 薄膜表面有收缩的趋势. 通常把表面上单位长度直线两侧液面的相互拉力叫做表面张力系数, 用 α 表示. 张在框架上的液体有两个与空气接触的表面, 它们使 ab 边受到一个大小为 $2\alpha l$ 的力, 方向向左. 在液膜收缩时, 设想有个向右的外力 F 作用在 ab 上, 使它缓慢地从 $a'b'$ 位置收缩到 ab 位置, 向左移动一距离 dx . 在此过程中, 表面张力所作的功为

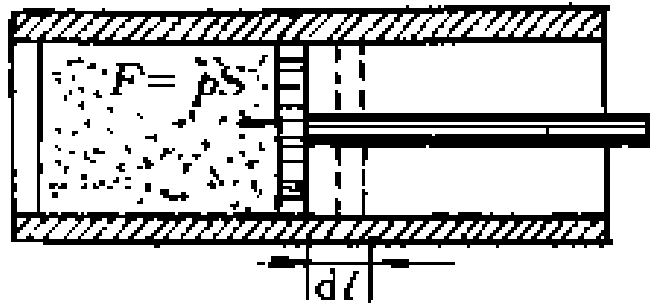


图 7-2 气体膨胀时所作的功

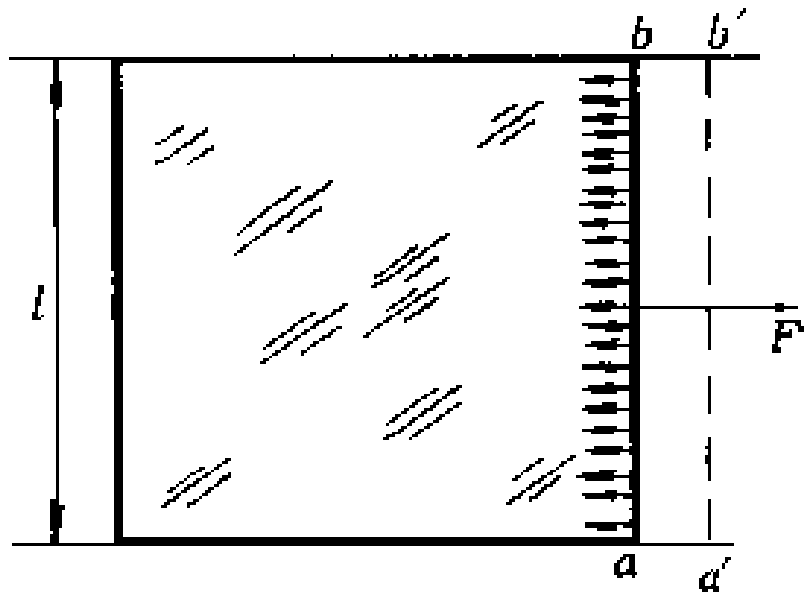


图 7-3 表面张力的功

$$dA = 2\alpha dx = \alpha dS \tag{7-2}$$

式中 $dS = 2l dx$ 是 ab 移动中薄膜两个表面面积的总变化.

(3) 电流的功 设有一段导线 AB , 电阻为 R , 两端的电势差为 $V_1 - V_2$, 通过的电流为 I . 我们知道, 电荷受到导体内电场的作用, 就在导体内作有规则的移动, 同时, 电场力对电荷做功. 在稳恒电流的情形下, 在时间 t 内, 通过 A 点、 B 点或导线 AB 内任一点处的截面的电荷量都是 $q = It$. 因此在时间 t 内, 电场力对导线 AB 内各处运动电荷所作的功的总和, 相当于一个量值为 q 的电荷从 A 点移到 B 点时, 电场力对 q 所作的功. 所以在时间 t 内, 导线 AB 内的电场对运动电荷所作的功为

$$A = q(V_1 - V_2) = It(V_1 - V_2)$$

根据欧姆定律 $V_1 - V_2 = IR$, 可得

$$A = I(V_1 - V_2)t = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}t = I^2Rt \tag{7-3}$$

这就是电流的功.

由此可见,作功是系统与外界相互作用的一种方式,也是两者的能量相互交换的一种方式. 这种能量交换的方式是通过宏观的有规则运动(如机械运动、电流等)来完成的.我们把机械功、电磁功等统称为宏观功.

传递热量和作功不同,这种交换能量的方式是通过分子的无规则运动来完成的.当外界物体(热源)与系统相接触时,不需借助于机械的方式,也不显示任何宏观运动的迹象,直接在两者的分子无规则运动之间进行着能量的交换,这就是传递热量.为了区别起见,也可把热量传递叫做微观功.宏观功与微观功都是系统在状态变化时与外界交换能量的量度,宏观功的作用是把物体的有规则运动转换为系统内分子的无规则运动,而微观功则是使系统外物体的分子无规则运动与系统内分子的无规则运动互相转换,它们只有在过程发生时才有意义,它们的大小也与过程有关,因此,它们都是过程量.

实验证明,系统状态发生变化时,只要初、末状态给定,则不论所经历的过程有何不同,外界对系统所作的功和向系统所传递的热量的总和,总是恒定不变的.我们知道,对一系统作功将使系统的能量增加,又根据热功的等效性,可知对系统传递热量也将使系统的能量增加.由此看来,热力学系统在一定状态下,应具有一定的能量,叫做热力学系统的“内能”.上述实验事实表明:内能的改变量只决定于初、末两个状态,而与所经历的过程无关.换句话说,内能是系统状态的单值函数.从气体动理论的观点来说,如不考虑分子内部结构,则系统的内能就是系统中所有的分子热运动的能量和分子与分子间相互作用的势能的总和.

3. 热力学第一定律

在一般情况下,当系统状态变化时,作功与传递热量往往是同时存在的.如果有一系统,外界对它传递的热量为 Q ,系统从内能为 E_1 的初始平衡状态改变到内能为 E_2 的终末平衡状态,同时系

统对外做功为 A ①,那么,不论过程如何总有

$$Q = E_2 - E_1 + A$$

(7-4)

上式就是热力学第一定律. 式中各量应该用同一单位,在国际单位制中,它们的单位都是 J. 我们规定:系统从外界吸收热量时, Q 为正值,反之为负;系统对外界做功时, A 为正值,反之为负;系统内能增加时, $E_2 - E_1$ 为正,反之为负. 这样,上式的意义就是:外界对系统传递的热量,一部分是使系统的内能增加,另一部分是用于系统对外做功. 不难看出,热力学第一定律其实是包括热量在内的能量守恒定律. 对微小的状态变化过程,式(7-4)可写成

$$dQ = dE + dA$$

(7-5)

在热力学第一定律建立以前,曾有人企图制造一种机器,它不需要任何动力和燃料,工作物质的内能最终也不改变,却能不断地对外做功. 这种永动机叫做第一类永动机. 所有这种企图,终经无数次的尝试,都失败了. 热力学第一定律指出,做功必须由能量转换而来,很显然第一类永动机违反热力学第一定律,所以它是不可能造成的.

当气体经历一个状态变化的平衡过程时,利用式(7-1)可将式(7-4)写成

$$Q = E_2 - E_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

(7-6)

式中 $\int_{V_1}^{V_2} p dV$ 在 p - V 图上是由代表这个平衡过程的实线对 V 轴所覆盖的阴影面积表示的(图 7-4). 如果系统沿图中虚线所表示的过程进行状态变化,那么它所作的功将等于虚线下面的面积,这比实线表示的过程中的功

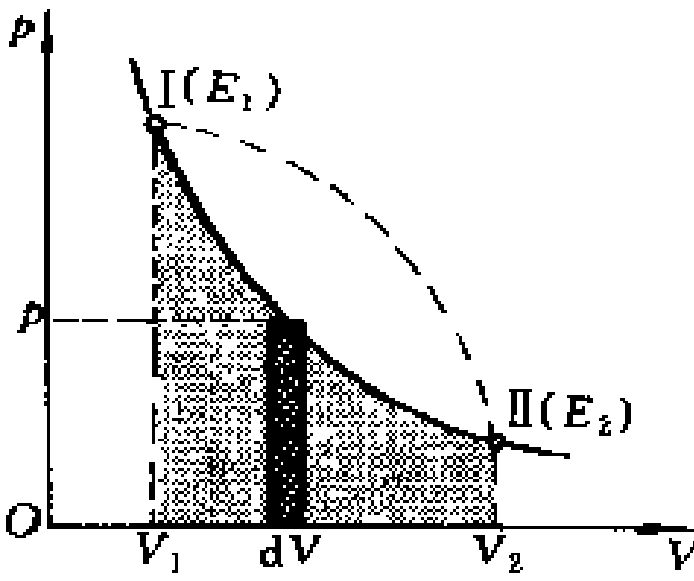


图 7-4 气体膨胀做功的图示

① 此处采用热工学的习惯用语, A 表示系统对外做功,与以前在力学中所说外界对系统做功,意义相反.

来得大. 因此, 根据图示可以清楚地看到, 系统由一个状态变化到另一状态时, 所作的功不仅取决于系统的初末状态, 而且与系统所经历的过程有关. 在式(7-6)中, $E_2 - E_1$ 与过程无关, 它与系统所作的功相加所决定的热量当然也随过程的不同而不同.

应该指出, 在系统的状态变化过程中, 功与热之间的转换不可能是直接的, 而是通过物质系统来完成的. 向系统传递热量可使系统的内能增加, 再由系统的内能减少而对外做功; 或者外界对系统做功, 使系统的内能增加, 再由内能的减少, 系统向外界传递热量. 通常我们说热转换为功或功转换为热, 这仅是为了方便而使用的通俗用语.

§ 7-2 热力学第一定律对于理想气体 等值过程的应用

热力学第一定律确定了系统在状态变化过程中被传递的热量、功和内能之间的相互关系, 不论是气体、液体或固体的系统都适用. 在本节中, 我们讨论在理想气体的几种平衡过程中, 热力学第一定律的应用.

1. 等体过程 气体的摩尔定体热容

等体过程的特征是气体的体积保持不变, 即 V 为恒量, $dV = 0$.

设有一气缸, 活塞保持固定不动, 把气缸连续地与一系列有微小温度差的恒温热源相接触, 使气体的温度逐渐上升, 压强增大, 但是气体的体积保持不变. 这样的平衡过程是一个等体过程[图 7-5(a)].

在等体过程中, $dV = 0$, 所以 $dA = 0$. 根据热力学第一定律, 得

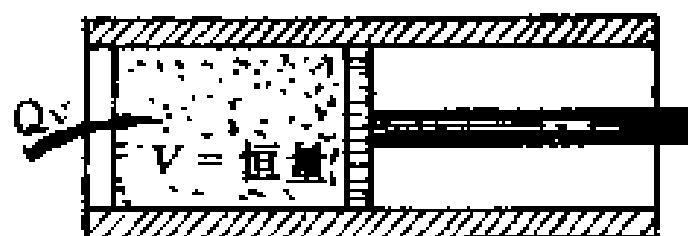
$$(dQ)_V = dE \quad (7-7a)$$

对于有限量变化, 则有

$$(Q)_v = E_2 - E_1 \quad (7-7b)$$

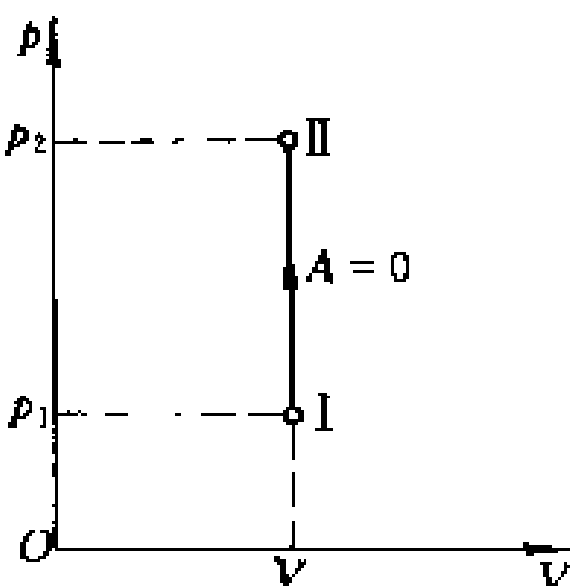
下角 V 表示体积保持不变.

根据上式, 我们看到在等体过程中, 外界传给气体的热量全部用来增加气体的内能, 而系统没有对外做功 [图 7-5 (b)].



(a) 气体的等体过程

为了计算向气体传递的热量, 我们要用到摩尔热容的概念. 同一种气体在不同过程中, 有不同的热容. 最常用的是等体过程与等压过程中的两种热容. 气体的摩尔定体热容, 是指 1 mol 气体在体积不变而且没有化学反应与相变的条件下, 温度改变 1 K (或 1 °C) 所吸收或放出的热量, 用 C_v 表示, 其值可由实验测定. 这样, 质量为 M 的气体在等体过程中, 温度改变 dT 时所需要的热量就是



(b) 等体过程中功的计算

图 7-5

$$(dQ)_v = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_v dT \quad (7-8)$$

而作为 C_v 的定义式, 可将上式改写成

$$C_v = \frac{(dQ)_v}{\frac{M}{M_{\text{mol}}} dT}$$

把式 (7-8) 代入式 (7-7a), 即得

$$dE = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_v dT \quad (7-9)$$

应该注意, 式 (7-9) 是计算过程中理想气体内能变化的通用式子, 不仅仅适用于等体过程. 前面已经指出, 理想气体的内能只与温度有关, 所以一定质量的理想气体在不同的状态变化过程中, 如果温度的增量 dT 相同, 那么气体所吸取的热量和所作的功虽然随过

程的不同而异,但是气体内能的增量却相同,与所经历的过程无关.现在从等体过程中我们知道理想气体温度升高 dT 时,内能的增量由式(7-9)给出,那么,在任何过程中都可用这个式子来计算理想气体的内能增量.

已知理想气体的内能为

$$E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT$$

由此得

$$dE = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R dT$$

把它与式(7-9)相比较,可见

$$\boxed{C_V = \frac{i}{2} R} \quad (7-10)$$

上式说明,理想气体的摩尔定体热容是一个只与分子的自由度有关的量.它与气体的温度无关.对于单原子气体, $i=3$, $C_V = 12.5 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$; 对于双原子气体, $i=5$, $C_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$; 对于多原子气体, $i=6$, $C_V = 24.9 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

2. 等压过程 气体的摩尔定压热容

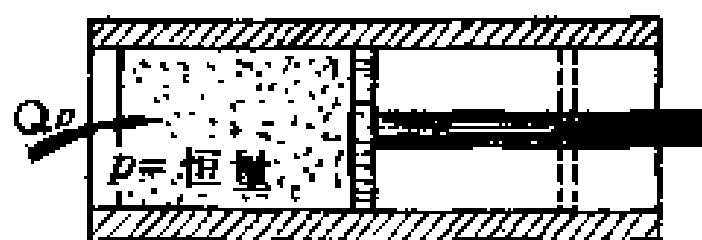
等压过程的特征是系统的压强保持不变,即 p 为常量, $dp=0$.

设想气缸连续地与一系列有微小温度差的恒温热源相接触,同时活塞上所加的外力保持不变.接触的结果,将有微小的热量传给气体,使气体温度稍微升高,气体对活塞的压强也随之较外界所施的压强增加一微量,于是稍微推动活塞对外作功.由于体积的膨胀,压强降低,从而保证气体在内、外压强的量值保持不变的情况下进行膨胀.所以这一平衡过程是一个等压过程[图 7-6(a)].

现在我们来计算气体的体积增加 dV 时所作的功 dA . 根据理想气体状态方程

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT$$

如果气体的体积从 V 增加到 $V + dV$, 温度从 T 增加到 $T + dT$, 那么气体所作的功



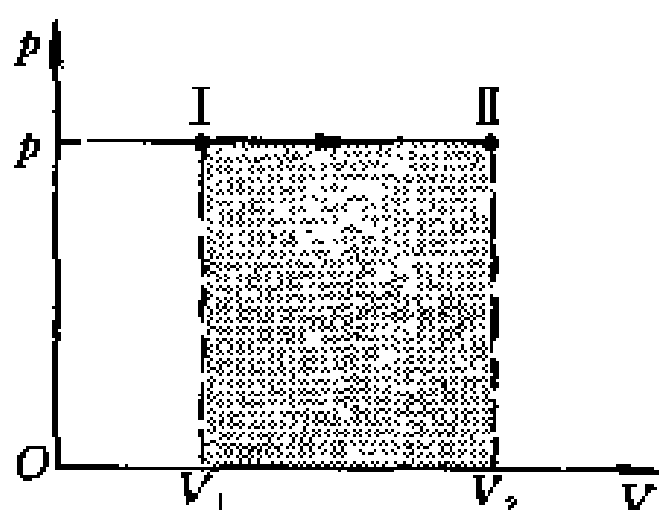
(a) 气体的等压过程

$$dA = pdV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RdT \quad (7-11)$$

根据热力学第一定律, 系统吸收的热量

$$(dQ)_p = dE + \frac{M}{M_{\text{mol}}}RdT$$

式中下角 p 表示压强不变. 当气体从状态 I (p, V_1, T_1) 等压地变为状态 II (p, V_2, T_2) 时, 气体对外做功 [图 7-6(b)] 为



(b) 等压过程中功的计算

图 7-6

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (7-12a)$$

或写成

$$A = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}}RdT = \frac{M}{M_{\text{mol}}}R(T_2 - T_1) \quad (7-12b)$$

所以, 整个过程中传递的热量为

$$Q_p = E_2 - E_1 + \frac{M}{M_{\text{mol}}}R(T_2 - T_1) \quad (7-13)$$

我们把 1 mol 气体在压强不变以及没有化学变化与相变的条件下, 温度改变 1 K 所需要的热量叫做气体的摩尔定压热容, 用 C_p 表示, 即

$$C_p = \frac{dQ_p}{\frac{M}{M_{\text{mol}}}dT}$$

根据这个定义可得

$$Q_p = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_p dT$$

又因 $E_2 - E_1 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_v (T_2 - T_1)$, 把这两个式子代入式(7-13), 不难看到

$$\boxed{C_p = C_v + R} \quad (7-14)$$

上式叫做迈耶(J. R. Meyer)公式. 它的意义是, 1 mol 理想气体温度升高 1 K 时, 在等压过程中比在等体过程中要多吸收 8.31 J 的热量, 为的是转化为膨胀时对外所作的功. 由此可见, 摩尔气体常量 R 等于 1 mol 理想气体在等压过程中温度升高 1 K 时对外所作的功. 因 $C_v = \frac{i}{2}R$, 从式(7-14)得

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R \quad (7-15)$$

摩尔定压热容 C_p 与摩尔定体热容 C_v 之比, 用 γ 表示, 叫做比热容比, 于是

$$\boxed{\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}} \quad (7-16)$$

根据上式不难算出: 对于单原子气体, $\gamma = \frac{5}{3} = 1.67$; 双原子气体 $\gamma = 1.40$; 多原子气体 $\gamma = 1.33$. 它们也都只与气体分子的自由度有关, 而与气体温度无关.

表 7-1 中列举了一些气体摩尔热容的实验数据. 从表中可以看出: (1) 对各种气体来说, 两种摩尔热容之差 $C_p - C_v$ 都接近于 R . (2) 对单原子及双原子气体来说, C_p 、 C_v 、 γ 的实验值与理论值相接近. 这说明经典的热容理论近似地反映了客观事实. 但是我们也应该看到, 对分子结构较复杂的气体, 即三原子以上的气体, 理论值与实验值显然不符, 说明这些量和气体的性质有关. 不仅如此, 实验还指出, 这些量与温度也有关系, 因而上述理论是个近似理论, 只有用量子理论才能较好地解决热容的问题.

表 7-1 气体摩尔热容的实验数据

原子数	气体的种类	$\frac{C_p}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}$	$\frac{C_v}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}$	$\frac{C_p-C_v}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}$	$\gamma=\frac{C_p}{C_v}$
单原子	氦	20.9	12.5	8.4	1.67
	氢	21.2	12.5	8.7	1.65
双原子	氢	28.8	20.4	8.4	1.41
	氮	28.6	20.4	8.2	1.41
	一氧化碳	29.3	21.2	8.1	1.40
	氧	28.9	21.0	7.9	1.40
3个以上的 原子	水蒸气	36.2	27.8	8.4	1.31
	甲烷	35.6	27.2	8.4	1.30
	氯仿	72.0	63.7	8.3	1.13
	乙醇	87.5	79.2	8.2	1.11

例题 7-1 一气缸中贮有氮气,质量为 1.25 kg. 在标准大气压下缓慢地加热,使温度升高 1 K. 试求气体膨胀时所作的功 A 、气体内能的增量 ΔE 以及气体所吸收的热量 Q_p . (活塞的质量以及它与气缸壁的摩擦均可略去.)

解 因过程是等压的,由式(7-12b)得

$$A = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \Delta T = \frac{1.25}{0.028} \times 8.31 \times 1 \text{ J} = 371 \text{ J}$$

因 $i=5$, 所以 $C_v = \frac{i}{2} R = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$. 由式(7-9)可得

$$\Delta E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_v \Delta T = \frac{1.25}{0.028} \times 20.8 \times 1 \text{ J} = 929 \text{ J}$$

所以,气体在这一过程中所吸收的热量为

$$Q_p = E_2 - E_1 + A = 1300 \text{ J}$$

3. 等温过程

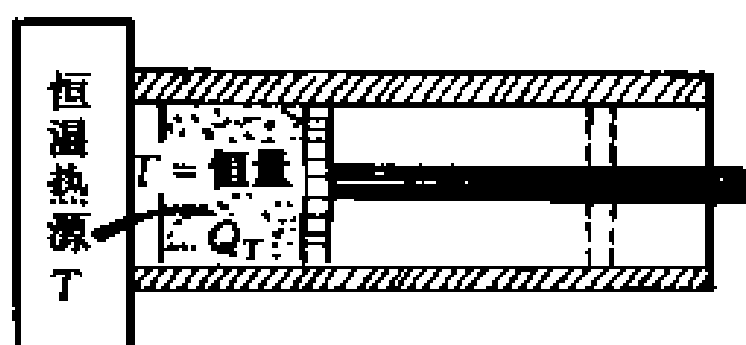
等温过程的特征是系统的温度保持不变,即 $dT=0$. 由于理想气体的内能只取决于温度,所以在等温过程中,理想气体的内能也

保持不变,亦即 $dE=0$.

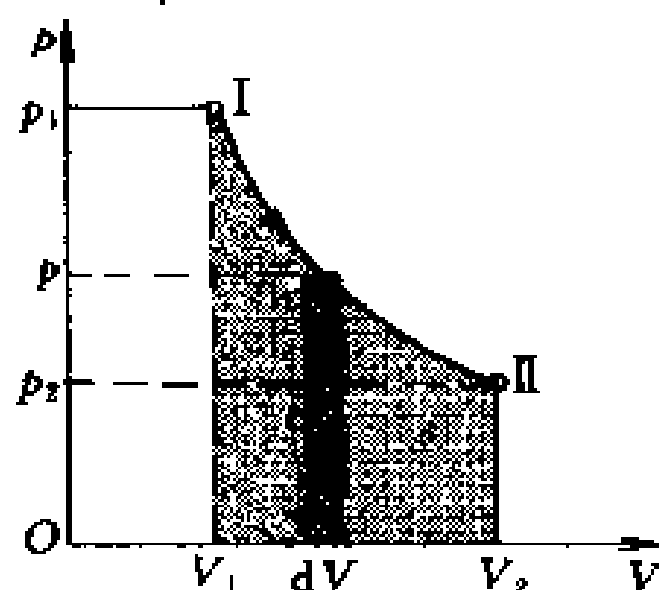
设想一气缸壁是绝对不导热的,而底部则是绝对导热的[图 7-7(a)]. 今将气缸的底部和一恒温热源相接触. 当活塞上的外界压强无限缓慢地降低时,缸内气体也将随之逐渐膨胀,对外做功. 气体内能就随之缓慢减少,温度也将随之微微降低. 可是,由于气体与恒温热源相接触,当气体温度比热源温度略低时,就有微量的热量传给气体,使气体温度维持原值不变. 这一平衡过程是一个等温过程.

在等温过程中, $p_1V_1=p_2V_2$, 系统对外作的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} dV \\ &= p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$



(a) 气体的等温膨胀



(b) 等温过程中功的计算

图 7-7

根据理想气体状态方程可得

$$A = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (7-17)$$

又根据热力学第一定律,系统在等温过程中所吸收的热量应和它所作的功相等,即

$$(Q)_T = A = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (7-18)$$

等温过程在 p - V 图上是一条等温线(双曲线)上的一段,如图 7-7(b)中所示的过程 $I \rightarrow II$ 是一等温膨胀过程. 在等温膨胀过程中,理想气体所吸取的热量全部转化为对外所作的功;反之,在等温压缩时,外界对理想气体所作的功,将全部转化为传给恒温热源的热量.

§ 7-3 绝热过程 * 多方过程

1. 绝热过程

在不与外界作热量交换的条件下,系统的状态变化过程叫做绝热过程. 它的特征是 $dQ=0$. 要实现绝热平衡过程,系统的外壁必须是完全绝热的,过程也应该进行得无限缓慢(图 7-8). 但在自然界中,完全绝热的器壁是找不到的,因此理想的绝热过程并不存在,实际进行的都是近似的绝热过程. 例如,气体在杜瓦瓶(即通常的热水瓶)内或在用绝热材料包起来的容器内所经历的变化过程,就可看作是近似的绝热过程. 又如声波传播时所引起的空气的压缩和膨胀,内燃机中的爆炸过程等,由于这些过程进行得很快,热量来不及与四周交换,也可近似地看作是绝热过程. 当然,这种绝热过程不是平衡过程.

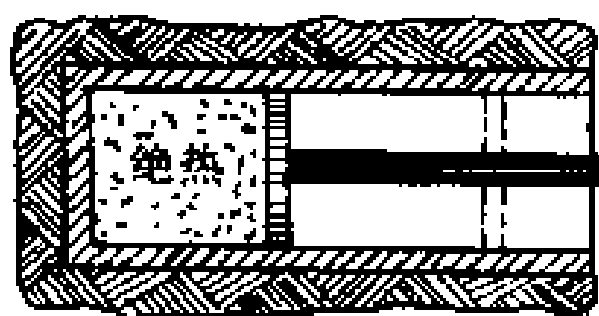


图 7-8 气体的绝热过程

下面讨论绝热的平衡过程中功和内能转换的情形.

根据绝热过程的特征,热力学第一定律($dQ=dE+pdV$)可写成

$$dE + pdV = 0$$

或

$$dA = pdV = -dE$$

这就是说,在绝热过程中,只要通过计算内能的变化就能计算系统

所作的功. 系统所作的功完全来自内能的变化. 据此, 质量为 M 的理想气体由温度为 T_1 的初状态绝热地变到温度为 T_2 的末状态, 在这过程中气体所作的功为

$$A = -(E_2 - E_1) = -\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1) \quad (7-19)$$

在绝热过程中, 理想气体的三个状态参量 p 、 V 、 T 是同时变化的. 可以证明, 对于平衡的绝热过程, 在 p 、 V 、 T 三个参量中, 每两者之间的相互关系式为

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= \text{常量} \\ V^{\gamma-1}T &= \text{常量} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} &= \text{常量} \end{aligned} \quad (7-20)$$

这些方程叫做绝热过程方程, 式中 $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ 为比热容比, 等号右方的常量的大小在三个式子中各不相同, 与气体的质量及初始状态有关. 我们可按实际情况, 选用一个比较方便的来应用.

当气体作绝热变化时, 也可在 p - V 图上画出 p 与 V 的关系曲线, 这叫绝热线. 在图 7-9 中的实线表示绝热线, 虚线则表示同一气体的等温线, 两者有些相似, A 点是两线的相交点. 等温线 ($pV = \text{常量}$) 和绝热线 ($pV^\gamma = \text{常量}$) 在交点 A 处的斜率 $\left(\frac{dp}{dV}\right)$ 可以分别求出: 等温线的斜率 $\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{p_A}{V_A}$; 绝热线的斜率 $\left(\frac{dp}{dV}\right)_Q = -\gamma \frac{p_A}{V_A}$. 由于 $\gamma > 1$, 所以在两线的交点处, 绝热线的斜率的绝对值较等温线的斜率的绝对值为大. 这表明同一气体从同一初状态作同样的体积压缩时, 压强的变化在绝热过程中比在等温过程中要大. 我们

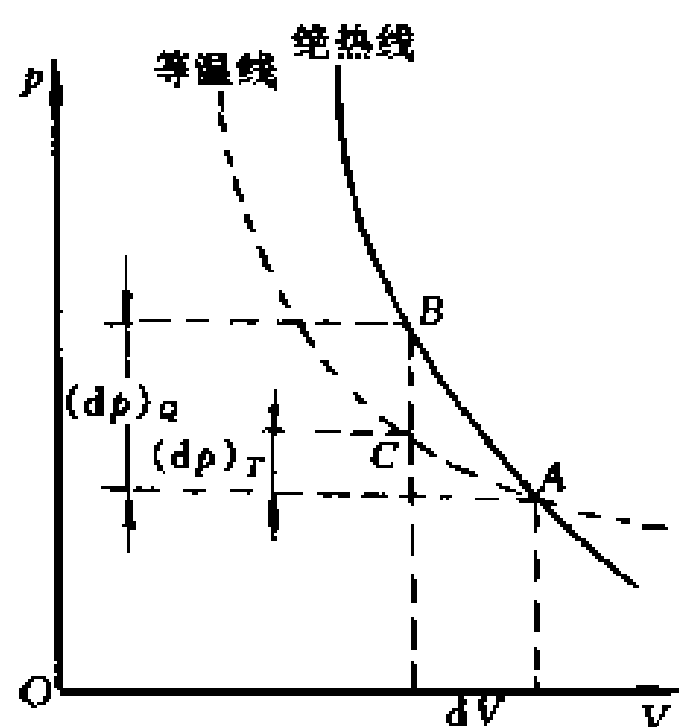


图 7-9 等温线与绝热线的斜率的比较

也可用物理概念来说明这一结论：假定从交点 A 起，气体的体积压缩了 dV ，那么不论过程是等温的或绝热的，气体的压强总要增加，但是，在等温过程中，温度不变，所以压强的增加只是由于体积的减小，在绝热过程中，压强的增加不仅由于体积的减小，而且还由于温度的升高。因此，在绝热过程中，压强的增量 $(dp)_Q$ 应较等温过程的 $(dp)_T$ 为多。所以绝热线在 A 点的斜率的绝对值较等温线的为大。

2. 绝热过程方程的推导

根据热力学第一定律及绝热过程的特征 ($dQ=0$)，可得

$$pdV = - \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V dT \quad (1)$$

理想气体同时又要适合方程 $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT$ 。在绝热过程中，因 p 、 V 、 T 三个量都在改变，所以对理想气体状态方程取微分，得

$$pdV + Vdp = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R dT$$

自式(1)解出 dT ，代入上式，得

$$C_V (pdV + Vdp) = - RpdV$$

但 $R = C_p - C_V$

所以 $C_V (pdV + Vdp) = (C_V - C_p)pdV$

简化后，得 $C_V Vdp + C_p pdV = 0$

或 $\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$

式中 $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ 。将上式积分，得

$$pV^\gamma = \text{常量}$$

这就是绝热过程中 p 与 V 的关系式。应用 $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT$ 和上式消去 p 或者 V ，即可分别求得 V 与 T 及 p 与 T 之间的关系，如式(7-20)所示。

例题 7-2 设有 8 g 氧气, 体积为 $0.41 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 温度为 300 K. 如氧气作绝热膨胀, 膨胀后的体积为 $4.10 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 问气体做功多少? 如氧气作等温膨胀, 膨胀后的体积也是 $4.10 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 问这时气体做功多少?

解 氧气的质量是 $M=0.008 \text{ kg}$, 摩尔质量 $M_{\text{mol}}=0.032 \text{ kg}$. 原来温度 $T_1=300 \text{ K}$. 令 T_2 为氧气绝热膨胀后的温度, 则按式 (7-19)

$$A = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_1 - T_2)$$

根据绝热方程中 T 与 V 的关系式

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_2^{\gamma-1} T_2$$

得

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

以 $T_1=300 \text{ K}$, $V_1=0.41 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, $V_2=4.10 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 及 $\gamma=1.40$ 代入上式, 得

$$T_2 = 300 \times \left(\frac{1}{10} \right)^{1.40-1} \text{ K} = 119 \text{ K}$$

又因氧分子是双原子分子, $i=5$, $C_V = \frac{i}{2} R = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, 于是由式 (7-19) 得

$$A = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_1 - T_2) = \frac{1}{4} \times 20.8 \times 181 \text{ J} = 941 \text{ J}$$

如氧气作等温膨胀, 气体所作的功为

$$A_T = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4} \times 8.31 \times 300 \ln 10 \text{ J} = 1.44 \times 10^3 \text{ J}$$

例题 7-3 两个绝热容器, 体积分别是 V_1 和 V_2 , 用一带有活塞的管子连起来. 打开活塞前, 第一个容器盛有氮气, 温度为 T_1 ; 第二个容器盛有氩气, 温度为 T_2 , 试证打开活塞后混合气体的温度和压强分别是

$$T = \frac{\frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}C_{V1}T_1 + \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}}C_{V2}T_2}{\frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}C_{V1} + \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}}C_{V2}}$$

$$p = \frac{1}{V_1 + V_2} \left(\frac{M_1}{M_{\text{mol1}}} + \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}} \right) RT$$

式中 C_{V1} 、 C_{V2} 分别是氮气和氩气的摩尔定体热容, M_1 、 M_2 和 M_{mol1} 、 M_{mol2} 分别是氮气和氩气的质量和摩尔质量.

解 打开活塞后, 原在第一个容器中的氮气向第二个容器中扩散, 氩气则向第一个容器中扩散, 直到两种气体都在两容器中均匀分布为止. 达到平衡后, 氮气的压强变为 p'_1 , 氩气的压强变为 p'_2 , 混合气体的压强为 $p = p'_1 + p'_2$; 温度均为 T . 在这个过程中, 两种气体相互有能量交换, 但由于容器是绝热的, 总体积未变, 两种气体组成的系统与外界无能量交换, 总内能不变, 所以

$$\Delta(E_1 + E_2) = \Delta E_1 + \Delta E_2 = 0 \quad (1)$$

已知

$$\Delta E_1 = \frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}C_{V1}(T - T_1)$$

$$\Delta E_2 = \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}}C_{V2}(T - T_2)$$

代入式(1)得

$$\frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}C_{V1}(T - T_1) + \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}}(T - T_2) = 0$$

由此解得

$$T = \frac{\frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}C_{V1}T_1 + \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}}C_{V2}T_2}{\frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}C_{V1} + \frac{M_2}{M_{\text{mol2}}}C_{V2}}$$

又因混合后的氮气与氩气仍分别满足理想气体状态方程

$$p'_1(V_1 + V_2) = \frac{M_1}{M_{\text{mol1}}}RT$$

$$p'_2(V_1 + V_2) = \frac{M_2}{M_{\text{mol}2}}RT$$

由此得

$$p'_1 = \frac{1}{V_1 + V_2} \frac{M_1}{M_{\text{mol}1}}RT$$

$$p'_2 = \frac{1}{V_1 + V_2} \frac{M_2}{M_{\text{mol}2}}RT$$

二式相加,即得混合气体的压强

$$p = \frac{1}{V_1 + V_2} \left(\frac{M_1}{M_{\text{mol}1}} + \frac{M_2}{M_{\text{mol}2}} \right) RT$$

*3. 多方过程

气体的很多实际过程可能既不是等值过程,也不是绝热过程,特别在实际过程中很难做到严格的等温或严格的绝热.对于理想气体来说,它的过程方程既不是 $pV = \text{常量}$,也不是 $pV^\gamma = \text{常量}$.在热力学中,常用下述方程表示实际过程中气体压强和体积的关系:

$$pV^n = \text{常量} \quad (7-21)$$

式中 n 叫做多方指数,满足上式的过程叫做多方过程.

理想气体从状态 I (p_1, V_1) 经多方过程而变为状态 II (p_2, V_2), 这时, $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$. 在这个过程中, 气体所作的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^n}{V^n} dV = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} \\ &= p_1 V_1^n \left(\frac{1}{1-n} V_2^{1-n} - \frac{1}{1-n} V_1^{1-n} \right) \\ &= \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1} \end{aligned} \quad (7-22)$$

多方过程也可用 p - V 图表示(这并不意味着在 p - V 图上任意画出的曲线都是多方过程). 气体在多方过程中的摩尔热容应是个常量. 对此我们证明如下:

为简便起见, 考虑 1 mol 理想气体. 设该气体在多方过程中,

当温度升高 dT 时, 气体所吸收的热量是 dQ , 按摩尔热容定义, $C_m = \frac{dQ}{dT}$. 所以, 当该气体经历一个微小的状态变化过程时, 气体所吸收的热量按热力学第一定律为

$$dQ = dE + p dV$$

这时, 气体内能的增量是

$$dE = C_v dT$$

因为过程是多方过程, 所以从式 (7-21) 得到 $nV^{n-1}p dV + V^n dp = 0$. 又由 $pV = RT$ 得 $p dV + V dp = R dT$. 把这两个结果相结合, 求得气体所作的功是

$$dA = p dV = -\frac{R}{n-1} dT$$

把以上两式以及 $dQ = C_m dT$ 代入 $dQ = dE + p dV$ 中, 可得

$$C_m dT = C_v dT - \frac{R}{n-1} dT$$

整理得

$$C_m = C_v - \frac{R}{n-1}$$

因 $C_p - C_v = R$, $C_p = \gamma C_v$, 所以 $(\gamma - 1)C_v = R$, 代入上式得

$$C_m = \frac{n - \gamma}{n - 1} C_v = \frac{(n - \gamma)}{(n - 1)(\gamma - 1)} R \quad (7-23)$$

该式表明, 在多方过程中, 摩尔热容是依赖于多方指数的一个常量.

引入多方过程的概念后, 前面所讨论的等值过程和绝热过程都可归纳为指数不同的多方过程. 例如

$n=0$ 时, $C_m = C_p$, 过程方程为 $p = C_1$, 这是等压过程;

$n=1$ 时, $C_m = \infty$, 过程方程为 $pV = C_2$, 这是等温过程;

$n=\gamma$ 时, $C_m = 0$, 过程方程为 $pV^\gamma = C_3$, 这是绝热过程;

$n=\infty$ 时, $C_m = C_v$, 过程方程由 $p^{\frac{1}{n}}V = C_4$ 可在 $n=\infty$ 时导致 $V = C_4$, 这是等体过程.

表 7-2 列举了理想气体在上述各过程中的一些重要公式,可供参考.

表 7-2 理想气体各等值过程、绝热过程和多方过程有关公式对照表

过程	特征	过程方程	吸收热量 Q	对外作功 A	内能增量 ΔE
等体	$V = \text{常量}$	$\frac{p}{T} = \text{常量}$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1)$	0	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1)$
等压	$p = \text{常量}$	$\frac{V}{T} = \text{常量}$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_p (T_2 - T_1)$	$p(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{M}{M_{\text{mol}}} R (T_2 - T_1)$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1)$
等温	$T = \text{常量}$	$pV = \text{常量}$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	0
绝热	$dQ = 0$	$pV^\gamma = \text{常量}$ $V^{\gamma-1} T = \text{常量}$ $p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} T^{-\frac{1}{\gamma-1}} = \text{常量}$	0	$-\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1)$ 或 $\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1)$
多方		$pV^n = \text{常量}$	$A + \Delta E$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n - 1}$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_2 - T_1)$

§ 7-4 焦耳-汤姆孙实验 真实气体的内能

1. 焦耳-汤姆孙(Joule-Thomson)实验

在反映真实气体内能的性质方面,有一个著名的焦耳-汤姆孙实验. 如果气体分子间有相互作用的势能存在,那么,内能将不仅是温度的函数,而且还将是体积的函数. 在这个实验中,使气体在绝热的条件下,从压强较大的空间,经过多孔性物质缓慢地迁移到压强较小的空间. 这样的过程叫做焦耳-汤姆孙过程,也叫节流过程.

焦耳-汤姆孙实验的原理示意如图 7-10 所示. 在包有绝热材料的铁管的中部, 装有用压缩棉绒或丝绸制成的多孔塞. 气体通过多孔塞, 容易形成稳定气流. 因多孔塞对气流有较大的阻滞作用, 从而在两侧维持一定的压强差. 此外, 在多孔塞的两侧, 配有截面积均为 S 的两个活塞 A 与 B, 活塞与管壁间的摩擦力是非常微小的. 缓慢地推动活塞 A, 同时也缓慢地移动活塞 B, 使多孔塞左侧的气体经常维持一较大压强 p_1 , 右侧的气体经常维持一较小压强 p_2 . 多孔塞两侧还装有温度计, 用来量度两侧的温度. 节流过程是在气体和外界没有热交换的条件下进行的, 它是另一类型的绝热过程, 因为气体在节流过程中从初状态到末状态所经历的一系列的中间状态都是不平衡的.

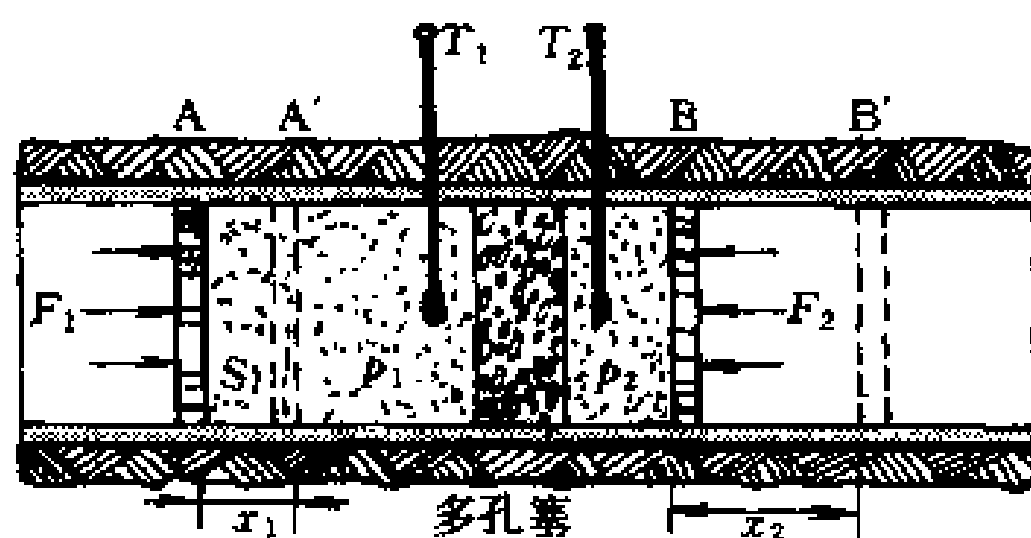


图 7-10 焦耳-汤姆孙实验

当气流到达稳定状态时, 实验指出, 在室温附近一切气体在节流过程中, 都要降低温度; 唯有氢, 有微小的温度升高. 气体经过这种膨胀过程而发生的温度改变的现象叫做焦耳-汤姆孙效应. 凡膨胀后温度降低者叫做正的焦耳-汤姆孙效应, 温度升高者叫做负的焦耳-汤姆孙效应. 多孔塞两侧的温度差, 随气体的性质和两侧压强的差值以及气体的原始温度等因素而异. 例如, 在室温下, 当压强差 $p_1 - p_2 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, 空气、氮及氧的温度降低约为 0.25 K, 二氧化碳约为 0.75 K; 在同样条件下, 氢的温度升高约为 0.03 K. 如果氢的原始温度低于 192.5 K, 膨胀后, 温度也将降低. 在某一温度下, 焦耳-汤姆孙效应的正负将发生改变, 这一温度叫

做反转温度. 每一气体都有其反转温度. 空气、氮及氧等的反转温度高于室温, 氢的反转温度就是 192.5 K.

焦耳-汤姆孙效应是一个相当复杂的现象, 详细的分析讨论超出了本书的范围. 现在, 我们来证明: 如果用理想气体进行焦耳-汤姆孙实验, 就不会发生温度的改变. 因为按定义, 在理想气体中, 分子之间除碰撞时外没有相互作用, 分子本身的大小又是可以忽略不计的. 设在实验过程中, 活塞 A 右移至 A' 位置上, 移动的距离为 x_1 ; 又设流过多孔塞的气体为 1 mol. 为了维持多孔塞右侧的压强不变, 活塞 B 将右移至 B' 位置上, 移动的距离为 x_2 . 外力 F_1 对气体所作的功为 $F_1 x_1$, 而气体对外所作的功为 $F_2 x_2$. 因此, 外力对 1 mol 气体所作的净功为

$$\Delta A = F_1 x_1 - F_2 x_2$$

因 $F_1 = p_1 S$, $F_2 = p_2 S$, 而 $Sx_1 = V_1$, $Sx_2 = V_2$, 所以

$$\Delta A = p_1 S x_1 - p_2 S x_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

如上所说, 气体在节流过程中是绝热的, 外力对气体所作的功应等于气体内能的增量 ΔE . 因此有

$$\Delta E = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

对理想气体来说, 没有分子与分子之间的势能, 内能的增量就是分子各种运动(平动、转动和振动)的能量的总增量, $\Delta E = C_V \Delta T = C_V (T_2 - T_1)$. 又按理想气体状态方程得: $p_1 V_1 = RT_1$ 及 $p_2 V_2 = RT_2$. 代入上式, 即得

$$C_V (T_2 - T_1) = R(T_1 - T_2)$$

$$\text{或} \quad (C_V + R)(T_2 - T_1) = 0$$

因 $C_V + R$ 不会等于零, 所以

$$T_1 = T_2$$

亦即理想气体在节流过程中是不会有温度改变的.

2. 真实气体的内能

与理想气体不同, 用一般气体进行焦耳-汤姆孙实验时却表明

有温度的改变,这说明在节流过程中,理想气体不能反映真实气体的行为,或者说真实气体在膨胀前后,内能的增量 ΔE 不能再用 $C_V(T_2 - T_1)$ 表示. 用 $C_V(T_2 - T_1)$ 代表的仅是分子各种运动能量的改变,而真实气体的内能除了包含各种分子动能外,还应该包含分子间相互作用的势能. 焦耳-汤姆孙实验的重要意义在于它揭示了真实气体内能中分子相互作用势能的存在.

焦耳-汤姆孙效应不仅在理论上具有重要意义,而且在工业生产上也有巨大的实用价值. 利用气体膨胀时产生的正焦耳-汤姆孙效应,可使气体温度降到临界温度以下,从而使气体液化. 高压二氧化碳(约 3×10^6 Pa 左右)从钢瓶的阀口喷向拴在阀上的布袋中时,这种小孔喷射也是节流过程,因膨胀而使气体温度从室温下降到 -78°C 以下,于是成为干冰. 家用电冰箱的致冷也应用了焦耳-汤姆孙效应.

§ 7-5 循环过程 卡诺循环

1. 循环过程

物质系统经历一系列的变化过程又回到初始状态,这样的周而复始的变化过程称为循环过程,或简称循环. 循环所包括的每个过程叫做分过程. 这物质系统叫做工作物. 在 p - V 图上,工作物的循环过程用一个闭合的曲线来表示. 由于工作物的内能是状态的单值函数,所以经历一个循环,回到初始状态时,内能没有改变. 这是循环过程的重要特征.

在实践中,往往要求利用工作物继续不断地把热转换为功,这种装置叫做热机. 表面看来,理想气体的等温膨胀过程是最有利的,工作物吸取的热量可完全转化为功. 但是,只靠单调的气体膨胀过程来作功的机器是不切实际的,因为气缸的长度总是有限的,气体的膨胀过程就不可能无限制地进行下去. 即使不切实际地把

气缸做得很长,最终当气体的压强减到与外界的压强相同时,也是不能继续作功的.十分明显,要连续不断地把热转化为功,只有利用上述的循环过程;使工作物从膨胀作功以后的状态,再回到初始状态,一次又一次地重复进行下去,并且必须使工作物在返回初始状态的过程中,外界压缩工作物所作的功少于工作物在膨胀时对外所作的功,这样才能得到工作物对外所作的净功.

获得低温装置的致冷机也是利用工作物的循环过程来工作的,不过它的运行方向与热机中工作物的循环过程恰恰相反.

循环过程的理论是热机和致冷机的基本理论.下面我们以卡诺循环为例,简要地说明热机和致冷机的基本原理.

2. 卡诺循环

卡诺循环的研究,在热力学中是十分重要的.这种循环过程是1824年法国青年工程师卡诺(N. L. S. Carnot)对热机的最大可能效率问题进行理论研究时提出的,曾为热力学第二定律的确立起了奠基性的作用.

卡诺循环是在两个温度恒定的热源(一个高温热源,一个低温热源)之间工作的循环过程.在整个循环中,工作物只和高温热源或低温热源交换能量,没有散热漏气等因素存在.现在,我们来研究由平衡过程组成的卡诺循环.因为是平衡过程,所以在工作物与温度为 T_1 的高温热源接触的过程中,基本上没有温度差,亦即工作物与高温热源接触而吸热的过程是一个温度为 T_1 的等温膨胀过程.同样,与温度为 T_2 的低温热源接触而放热的过程是一个温度为 T_2 的等温压缩过程.因为工作物只与两个热源交换能量,所以,当工作物脱离两热源时所进行的过程,必然是绝热的平衡过程.因此,卡诺循环是由两个平衡的等温过程和两个平衡的绝热过程组成的.图 7-11(a)为理想气体卡诺循环的 p - V 图,曲线 ab 和 cd 表示温度为 T_1 和 T_2 的两条等温线,曲线 bc 和 da 是两条绝热线.我们先讨论以状态 a 为始点,沿闭合曲线 $abcda$ 所作的循环过

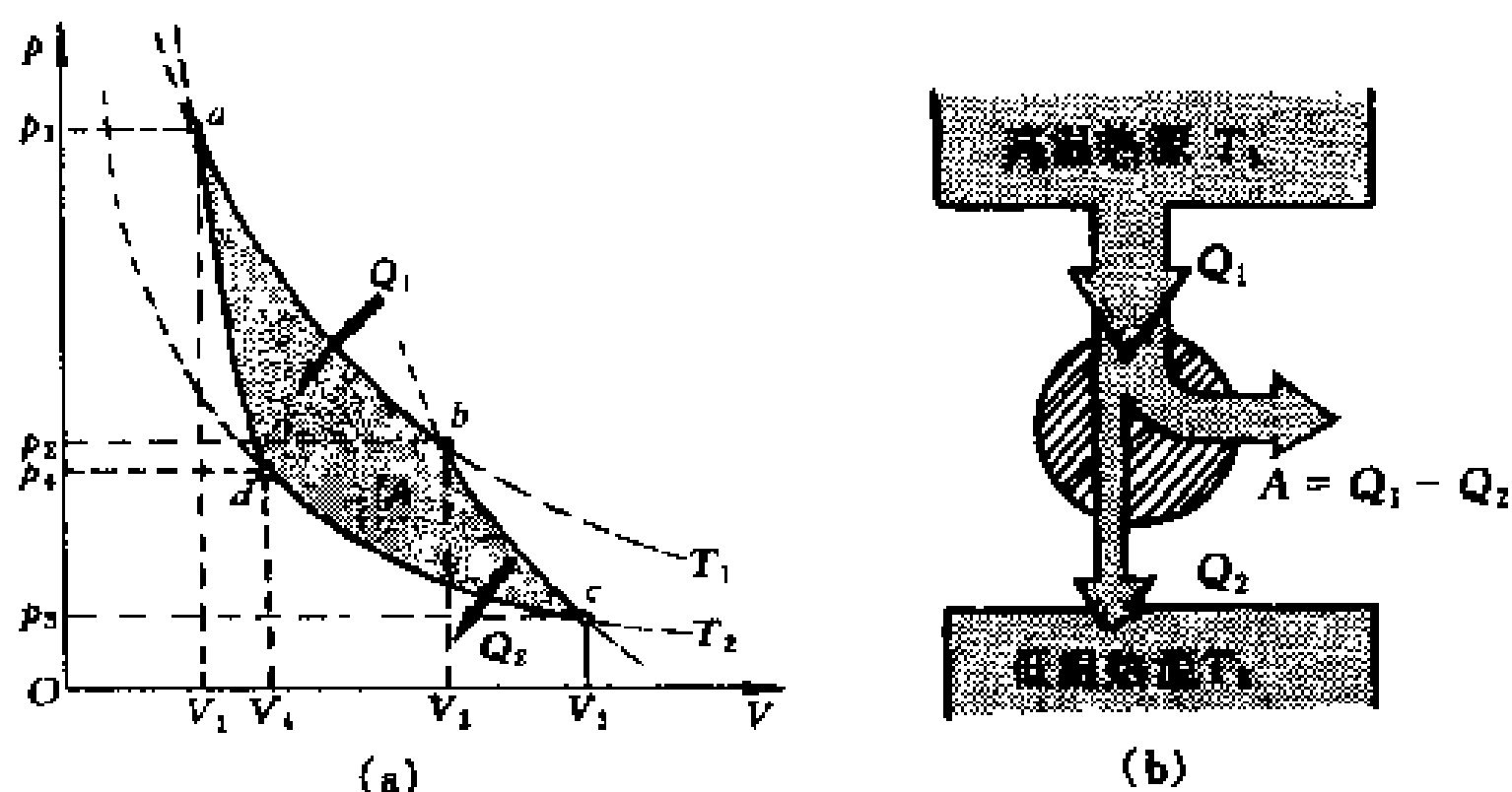


图 7-11 卡诺循环(热机)的 p - V 图及工作示意图

程. 在完成一个循环后, 气体的内能回到原值不变, 但气体与外界通过传递热量和作功而有能量的交换. 在 abc 的膨胀过程中, 气体对外所作的功 A_1 是曲线 abc 下面的面积, 在 cda 的压缩过程中, 外界对气体所作的功 A_2 是曲线 cda 下面的面积. 因为 $A_1 > A_2$, 所以气体对外所作净功 $A (= A_1 - A_2)$ 就是闭合曲线 $abcd$ 所围的面积. 热量交换的情况是, 气体在等温膨胀过程 ab 中, 从高温热源吸取热量

$$Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

气体在等温压缩过程 cd 中向低温热源放出热量 Q_2 , 取绝对值, 有

$$Q_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

应用绝热方程 $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ 和 $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ 可得

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} \quad \text{或} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

所以

$$Q_2 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

取 Q_1 与 Q_2 的比值,可得

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

根据热力学第一定律可知,在每一个循环中高温热源传给气体的热量是 Q_1 ,其中一部分热量 Q_2 由气体传给低温热源,同时气体对外所作净功为 $A=Q_1-Q_2$,所以这个循环是热机循环,工作示意图如图 7-11(b)所示.利用这种循环可以把热不断地转变为功.热机把热转换为功的效率 η 由下式定义:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (7-24)$$

因此卡诺热机的效率为

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (7-25)$$

从以上的讨论中可以看出:

(1) 要完成一次卡诺循环必须有高温和低温两个热源(有时分别叫做热源与冷源);

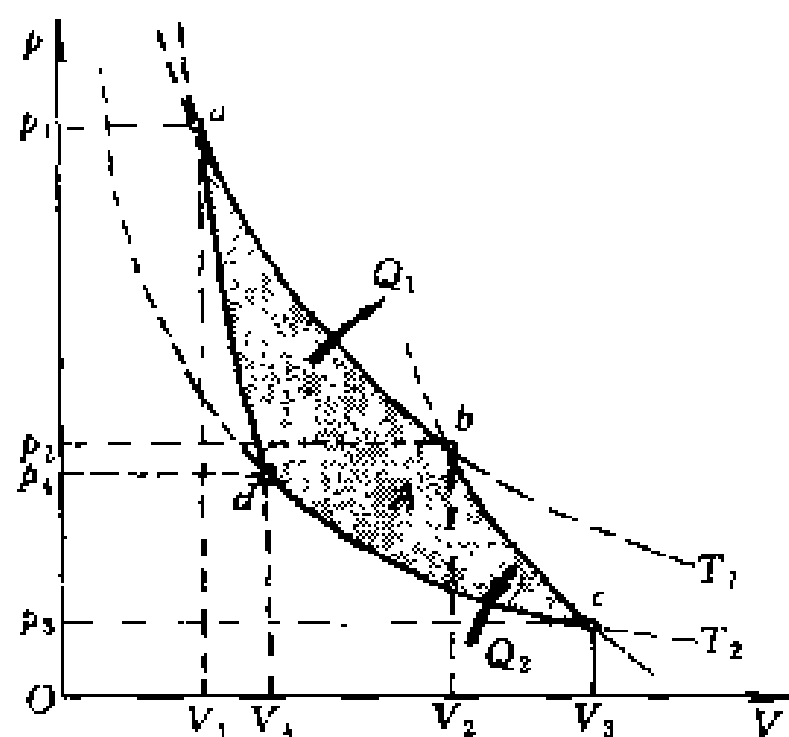
(2) 卡诺循环的效率只与两个热源的温度有关,高温热源的温度愈高,低温热源的温度愈低,卡诺循环的效率愈大,也就是说当两热源的温差愈大,从高温热源所吸取的热量 Q_1 的利用价值愈大;

(3) 卡诺循环的效率总是小于 1 的(除非 $T_2=0\text{ K}$).

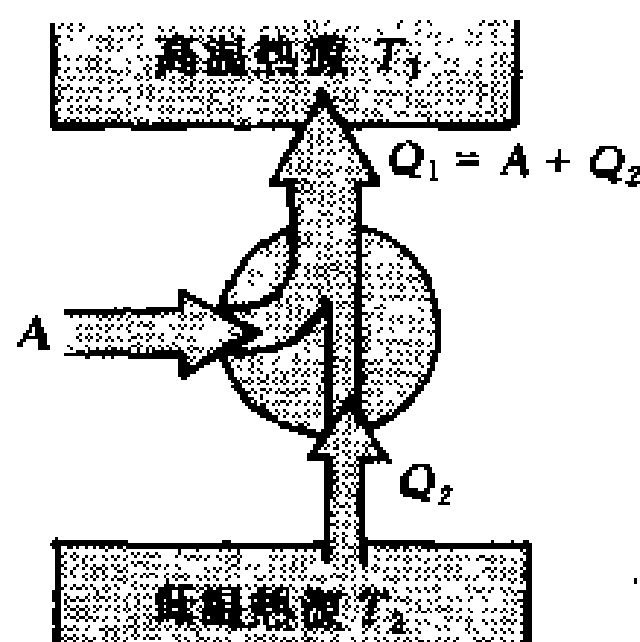
热机的效率能不能到达 100%呢? 如果不可能到达 100%,最大可能效率又是多少呢? 有关这些问题的研究促成了热力学第二定律的建立.

现在,我们再讨论理想气体以状态 a 为始点,沿着与热机循环相反的方向按闭合曲线 $adcba$ 所作的循环过程[图 7-12(a)].显然,气体将从低温热源吸取热量 Q_2 ,又接受外界对气体所作的功 A ,向高温热源传递热量 $Q_1=A+Q_2$.

由于循环从低温热源吸热,可导致低温热源(一个要使之降温



(a)



(b)

图 7-12 卡诺循环(致冷机)的 $p-V$ 图及工作示意图

的物体)的温度降得更低,这就是致冷机可以致冷的原理.要完成致冷机这个循环,必须以外界对气体所作的功为代价.致冷机的功效常用从低温热源中所吸取的热量 Q_2 和所消耗的外功 A 的比值来衡量,这一比值被叫做致冷系数,即

$$w = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (7-26)$$

对卡诺致冷机来说,

$$w_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (7-27)$$

上式告诉我们: T_2 愈小, w_c 也愈小,亦即要从温度很低的低温热源中吸取热量,所消耗的外功也是很多的.

致冷机向高温热源所放出的热量($Q_1 = Q_2 + A$)也是可以利用的.从这个卡诺循环能降低低温热源的温度来说,它是个致冷机,而从它把热量从低温热源输送到高温热源来说,它又是个热泵.在近代工程上,热泵已获得了广泛的应用.

图 7-13 是压缩型致冷机示意图.它利用压缩机对氟利昂^①作

^① 氟利昂是二氯二氟甲烷及其类似化合物的一个商业名称.由于它的害处,现在已力求改用其他物质致冷,此处只作举例用.

功,使气体变热. 这高度压缩的热气体在右方蛇形管中运行,因蛇形管被鼓风机吹风而带走热量,于是氟利昂在这个高压下略有冷

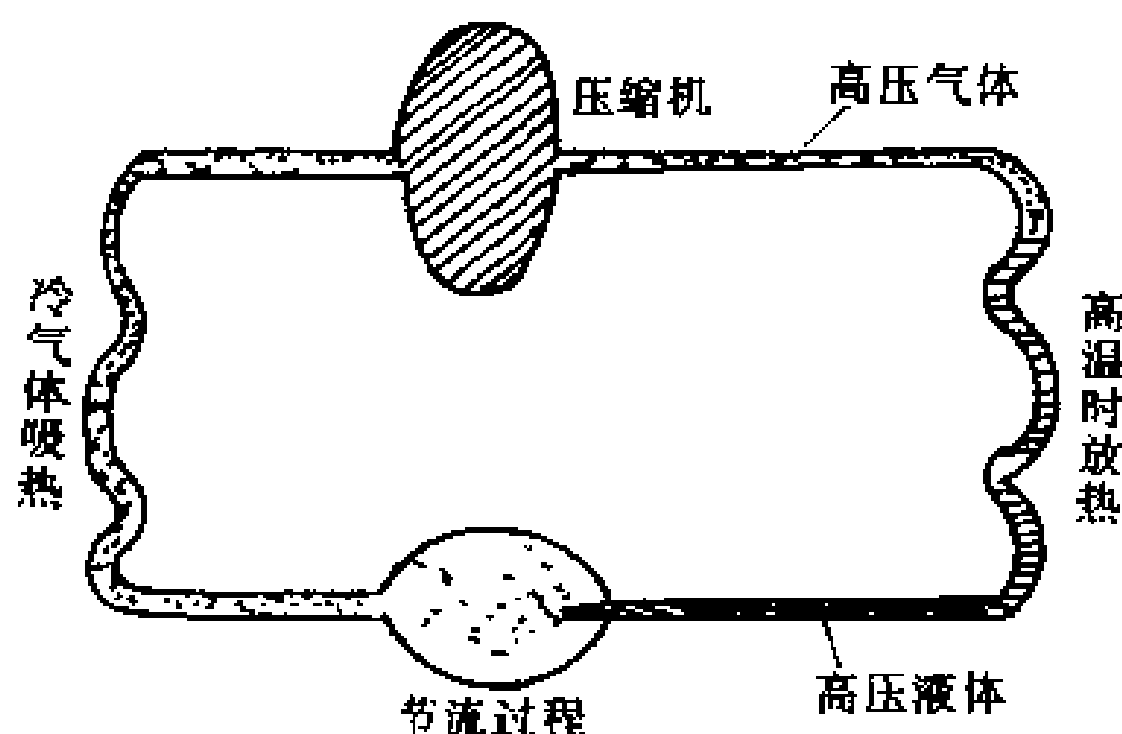


图 7-13

却,它凝聚为液体. 然后,这液体进入喷嘴系统. 这个系统的作用和节流过程相似,氟利昂突然膨胀到低压区去,焦耳-汤姆孙效应使之极度冷却. 这个冷却气体运行到左方蛇形管中时,将从周围(冷区)吸取热量,从而稍许变暖,流回压缩机去. 此处,我们看到,压缩机所作的功是用来把热从冷区运送到热区(右方蛇形管周围)的,排出的热比吸收的热多,所以起到致冷的作用,而对热区来说,由于不断地吸收热量,其温度将愈来愈高.

例题 7-4 有一卡诺致冷机,从温度为 $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的冷藏室吸取热量,而向温度为 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的物体放出热量. 设该致冷机所耗功率为 15 kW ,问每分钟从冷藏室吸取的热量是多少?

解 令 $T_1 = 293\text{ K}$, $T_2 = 263\text{ K}$, 则

$$w = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{263}{30}$$

每分钟做功为

$$A = 15 \times 10^3 \times 60\text{ J} = 9 \times 10^5\text{ J}$$

所以每分钟从冷藏室中吸取的热量为

$$Q_2 = wA = \frac{263}{30} \times 9 \times 10^5\text{ J} = 7.89 \times 10^6\text{ J}$$

此时,每分钟向温度为 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的物体放出的热量为

$$Q_1 = Q_2 + A = 8.79 \times 10^6 \text{ J}$$

例题 7-5 内燃机的循环之一——奥托(N. A. Otto)循环. 内燃机利用液体或气体燃料,直接在气缸中燃烧,产生巨大的压强而做功. 内燃机的种类很多,我们只举活塞经过四个过程完成一个循环(图 7-14)的四动程汽油内燃机(奥托循环)为例. 说明整个循环中各个分过程的特征,并计算这一循环的效率.

解 奥托循环的 4 个分过程如下:

(1) 吸入燃料过程 气缸开始吸入汽油蒸气及助燃空气,此时压强约等于 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$,这是个等压过程(图中过程 ab).

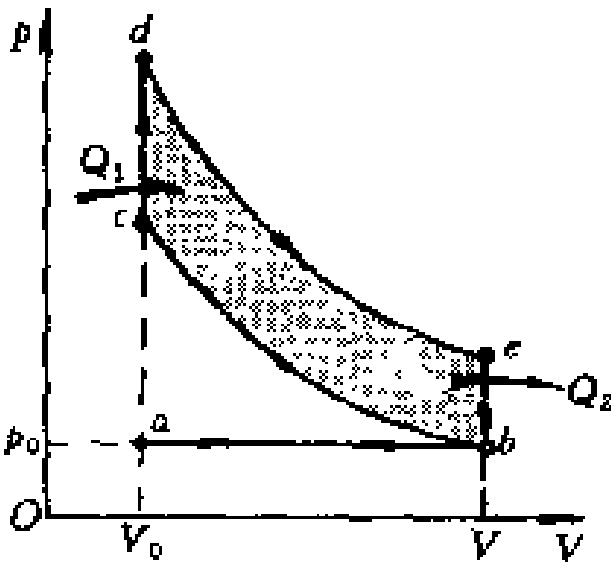


图 7-14 奥托循环

(2) 压缩过程 活塞自右向左移动,将已吸入气缸内的混合气体加以压缩,使之体积减小,温度升高,压强增大. 由于压缩较快,气缸散热较慢,可看作一绝热过程(图中过程 bc).

(3) 爆炸、做功过程 在上述高温压缩气体中,用电火花或其他方式引起气体燃烧爆炸,气体压强随之骤增,由于爆炸时间短促,活塞在这一瞬间移动的距离极小,这近似是个等体过程(图中过程 cd). 这一巨大的压强把活塞向右推动而做功,同时压强也随着气体的膨胀而降低,爆炸后的做功过程可看成一绝热过程(图中过程 de).

(4) 排气过程 开放排气口,使气体压强突然降为大气压,这过程近似于一个等体过程(图中过程 eb),然后再由飞轮的惯性带动活塞,使之从右向左移动,排出废气,这是个等压过程(图中过程 ba).

严格地说,上述内燃机进行的过程不能看作是个循环过程,因为过程进行中,最初的工作物为燃料及助燃空气,后经燃烧,工作

物变为二氧化碳、水汽等废气,从气缸向外排出不再回复到初始状态.但因内燃机做功主要是在 p - V 图上 $bcdeb$ 这一封闭曲线所代表的过程中,为了分析与计算的方便,我们可换用空气作为工作物,经历 $bcdeb$ 这个循环,而把它叫做空气奥托循环.

气体主要在循环的等体过程 cd 中吸热(相当于在爆炸中产生的热),而在等体过程 eb 中放热(相当于随废气而排出的热).设气体的质量为 M ,摩尔质量为 M_{mol} ,摩尔定体热容为 C_v ,则在等体过程 cd 中,气体吸取的热量 Q_1 为

$$Q_1 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_v (T_d - T_c)$$

而在等体过程 eb 中放出的热量则为

$$Q_2 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_v (T_e - T_b)$$

所以,这个循环的效率应为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_e - T_b}{T_d - T_c} \quad (1)$$

把气体看作理想气体,从绝热过程 de 及 bc 可得如下关系:

$$T_e V^{\gamma-1} = T_d V_0^{\gamma-1}$$

$$T_b V^{\gamma-1} = T_c V_0^{\gamma-1}$$

两式相减得

$$(T_e - T_b) V^{\gamma-1} = (T_d - T_c) V_0^{\gamma-1}$$

亦即

$$\frac{T_e - T_b}{T_d - T_c} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1}$$

代入式(1),可得

$$\eta = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V}{V_0} \right)^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

式中 $r = \frac{V}{V_0}$ 叫做压缩比. 计算表明,压缩比愈大,效率愈高. 汽油内

燃机的压缩比不能大于 7, 否则汽油蒸气与空气的混合气体在尚未压缩至 c 点时温度已高到足以引起混合气体燃烧了. 设 $r=7$, $\gamma=1.4$, 则

$$\eta = 1 - \frac{1}{7^{0.4}} = 55\%$$

实际上汽油机的效率只有 25% 左右.

§ 7-6 热力学第二定律

1. 热力学第二定律

在 19 世纪初期, 由于热机的广泛应用, 使提高热机的效率成为一个十分迫切的问题. 人们根据热力学第一定律, 知道制造一种效率大于 100% 的循环动作的热机只是一种空想, 因为第一类永动机违反能量转换与守恒定律, 所以不可能实现. 但是, 制造一个效率为 100% 的循环动作的热机, 有没有可能呢? 设想的这种热机, 它只从一个热源吸取热量, 并使之全部转变为功; 它不需要冷源, 也没有释放出热量. 这种热机可不违反热力学第一定律, 因而对人们有很大的吸引力. 从一个热源吸热, 并将热全部转变为功的循环动作的热机, 叫做第二类永动机. 有人早就计算过, 如果能制成第二类永动机, 使它从海水吸热而作功的话, 全世界大约有 10^{18} t 海水, 只要冷却 1 K, 就会给出 10^{21} kJ 的热量, 这相当于 10^{14} t 煤完全燃烧所提供的热量! 无数尝试证明, 第二类永动机同样是一种幻想, 也是不可能实现的. 就以上节介绍的卡诺循环来说, 它是个理想循环; 工作物从高温热源吸取热量, 经过卡诺循环, 总要向低温热源放出一部分热量, 才能回复到初始状态. 卡诺循环的效率也总是小于 1 的.

根据这些事实, 开尔文 (W. Thomson, Lord Kelvin) 总结出一条重要原理, 叫做热力学第二定律. 热力学第二定律的开尔文叙述

是这样的：不可能制成一种循环动作的热机，只从一个热源吸取热量，使之全部变为有用的功，而其他物体不发生任何变化。在这一叙述中，我们要特别注意“循环动作”几个字。如果工作物进行的不是循环过程，例如气体作等温膨胀，那么，气体只使一个热源冷却作功而不放出热量便是可能的了。从文字上看，热力学第二定律的开尔文叙述反映了热功转换的一种特殊规律。

1850年，克劳修斯(R. J. E. Clausius)在大量事实的基础上提出热力学第二定律的另一种叙述：热量不可能自动地从低温物体传向高温物体。从上一节卡诺致冷机的分析中可以看出，要使热量从低温物体传到高温物体，靠自发地进行是不可能的，必须依靠外界作功。克劳修斯的叙述正是反映了热量传递的这种特殊规律。

在热功转换这类热力学过程中，利用摩擦，功可以全部变为热；但是，热量却不能通过一个循环过程全部变为功。在热量传递的热力学过程中，热量可以从高温物体自动传向低温物体，但热量却不能自动从低温物体传向高温物体。由此可见，自然界中出现的热力学过程是有单方向性的，某些方向的过程可以自动实现而另一方向的过程则不能。热力学第一定律说明在任何过程中能量必须守恒，热力学第二定律却说明并非所有能量守恒的过程均能实现。热力学第二定律是反映自然界过程进行的方向和条件的一个规律，在热力学中，它和第一定律相辅相成，缺一不可，同样是非常重要的。

从这里还可以看到，我们为什么在热力学中要把作功及传递热量这两种能量传递方式加以区别，就是因为热量传递具有只能自动从高温物体传向低温物体的方向性。

2. 两种表述的等价性

热力学第二定律的两种表述，乍看起来似乎毫不相干，其实，二者是等价的。可以证明，如果开尔文叙述成立，则克劳修斯叙述也成立；反之，如果克劳修斯叙述成立，则开尔文叙述也成立。下

面,我们用反证法来证明两者的等价性.

假设开尔文叙述不成立,亦即允许有一循环 E 可以只从高温热源 T_1 取得热量 Q_1 ,并把它全部转变为功 A (图 7-15). 这样我们再利用一个逆卡诺循环 D 接受 E 所作的功 $A(=Q_1)$,使它从低温热源 T_2 取得热量 Q_2 ,输出热量 Q_1+Q_2 给高温热源. 现在,把这两个循环总的看成一部复合致冷机,其总的结果是,外界没有对它做功而它却把热量 Q_2 从低温热源传给了高温热源. 这就说明,如果开尔文叙述不成立,则克劳修斯叙述也不成立. 反之,也可以证明如果克劳修斯叙述不成立,则开尔文叙述也必然不成立.

热力学第二定律可以有多种叙述,人们之所以公认开尔文叙述和克劳修斯叙述是该定律的标准叙述,其原因之一是热功转换与热量传递是热力学过程中最有代表性的典型事例,又正好分别被开尔文和克劳修斯用作定律的叙述,而且这两种叙述彼此等效;原因之二是他们两人是历史上最先完整地提出热力学第二定律的人,为了尊重历史和肯定他们的功绩,所以就采用了这两种叙述.

例题 7-6 试证在 p - V 图上两条绝热线不能相交.

解 假定两条绝热线 I 与 II 在 p - V 图上相交于一点 A,如图 7-16 所示. 现在,在图上再画一等温线 III,使它与两条绝热线组成

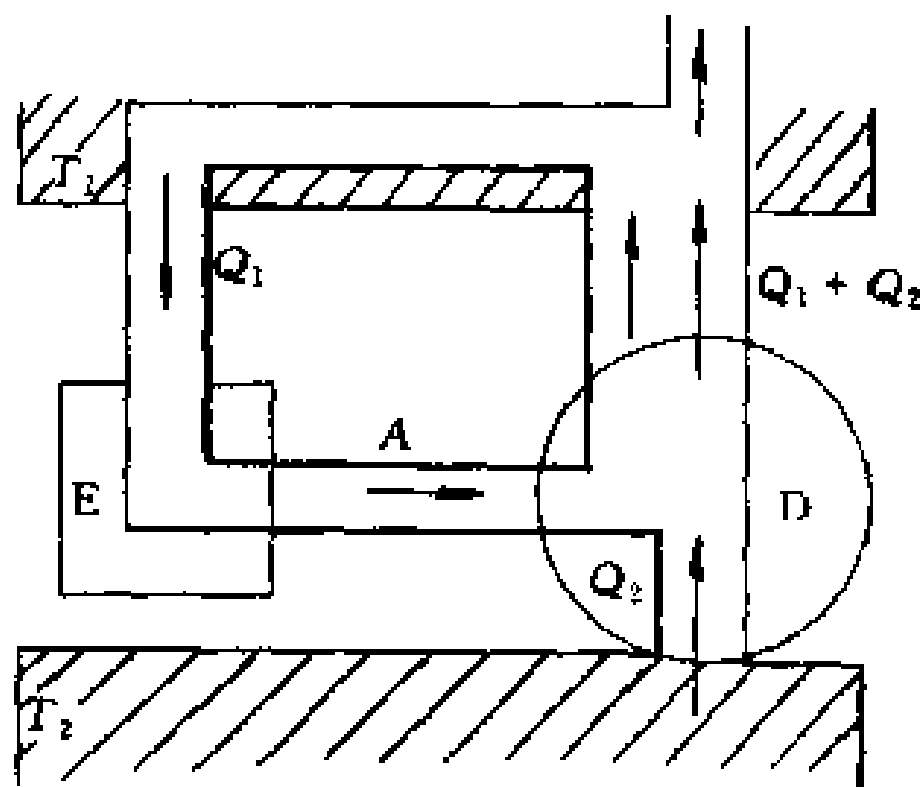


图 7-15

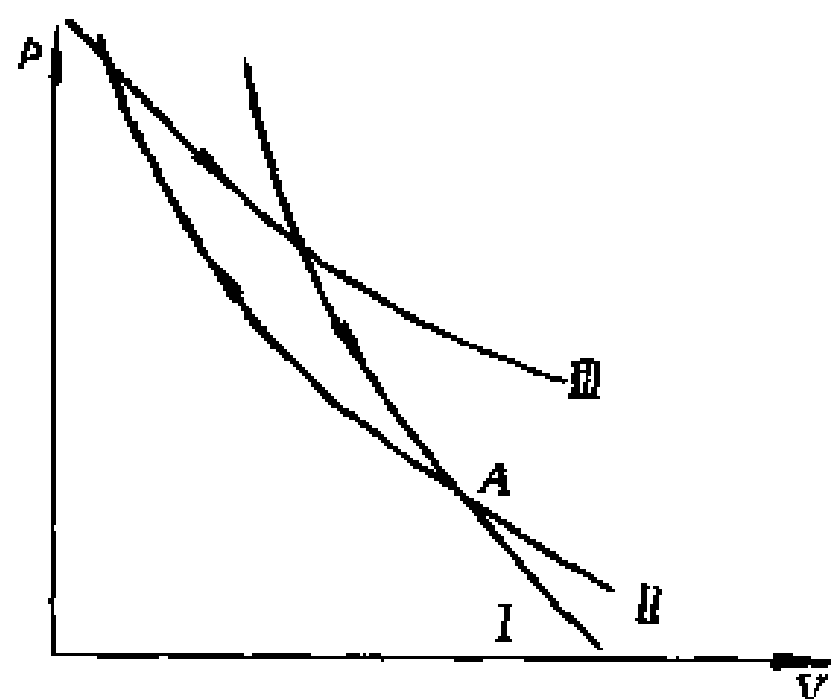


图 7-16

一个循环. 这个循环只有一个单热源, 它把吸收的热量全部转变为功即 $\eta=100\%$, 并使周围没有变化. 显然, 这是违反热力学第二定律的, 因此两条绝热线不能相交.

§ 7-7 可逆过程与不可逆过程 卡诺定理

1. 可逆过程与不可逆过程

为了进一步研究热力学过程方向性的问题, 有必要介绍可逆过程与不可逆过程的概念.

设有一个过程, 使物体从状态 A 变为状态 B. 对它来说, 如果存在另一个过程, 它不仅使物体进行反向变化, 从状态 B 回复到状态 A, 而且当物体回复到状态 A 时, 周围一切也都各自回复原状, 则从状态 A 进行到状态 B 的过程是个可逆过程. 反之, 如对于某一过程, 不论经过怎样复杂曲折的方法都不能使物体和外界恢复到原来状态而不引起其它变化, 则此过程就是不可逆过程.

如果单摆不受到空气阻力和其他摩擦力的作用, 则当它离开某一位置后, 经过一个周期又回到原来位置, 且周围一切都没有变化, 因此单摆的摆动是一可逆过程. 由此可以看出, 单纯的、无机械能耗散的机械运动过程是可逆过程.

现在我们分析热力学过程的性质. 例如, 通过摩擦, 功变为热量的过程, 根据热力学第二定律, 热量不可能通过循环过程全部变为功, 因此功通过摩擦转换为热量的过程就是一不可逆过程. 又如热量直接从高温物体传向低温物体也是一不可逆过程, 因为根据热力学第二定律, 热量不能再自动地从低温物体传向高温物体.

以上两个例子是可以直接用热力学第二定律来判明的不可逆过程. 现在我们再举两个不可逆过程的例子, 它们要间接用热力学第二定律来判明.

设有一容器分为 A、B 两室, A 室中贮有理想气体, B 室中为

真空(图 7-17). 如果将隔板抽开, A 室中的气体将向 B 室膨胀, 这是气体对真空的自由膨胀, 最后气体将均匀分布于 A、B 两室中, 温度与原来温度相同. 气体膨胀后, 我们仍可用活塞将气体等温地压回 A 室, 使气体回到初始状态; 不过应该注意, 此时我们必须对气体做功, 所作的功转化为气体向外界传出的热量, 根据热力学第二定律, 我们无法通过循环过程再将这热量完全转化为功, 所以气体对真空的自由膨胀过程是不可逆过程.

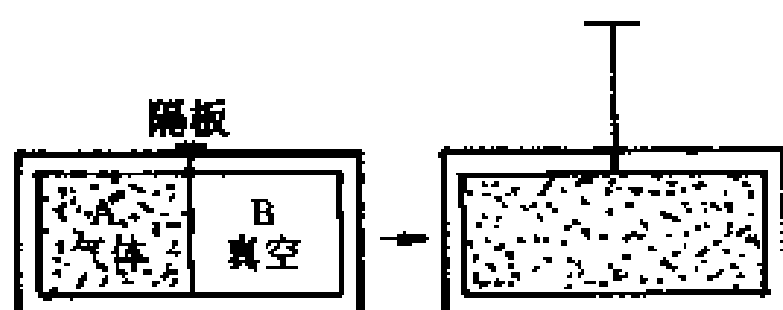


图 7-17 气体的自由膨胀

气体迅速膨胀的过程也是不可逆的. 气缸中气体迅速膨胀时, 活塞附近气体的压强小于气体内部的压强. 设气体内部的压强为 p , 气体迅速膨胀一微小体积 ΔV , 则气体所作的功 A_1 将小于 $p\Delta V$. 然后, 将气体压回原来体积, 活塞附近气体的压强不能小于气体内部的压强, 外界所作的功 A_2 不能小于 $p\Delta V$. 因此, 迅速膨胀后, 我们虽然可以将气体压缩, 使它回到原来状态, 但外界必须多作功 $A_2 - A_1$; 功将增加气体的内能, 而后以热量形式放出. 根据热力学第二定律, 我们不能通过循环过程再将这部分热量全部变为功; 所以气体迅速膨胀的过程也是不可逆过程. 只有当气体膨胀非常缓慢, 活塞附近的压强非常接近于气体内部的压强 p 时, 气体膨胀一微小体积 ΔV 所作的功恰好等于 $p\Delta V$, 那么我们才可能非常缓慢地对气体做功 $p\Delta V$, 将气体压回原来体积. 所以, 只有非常缓慢的亦即平衡的膨胀过程, 才是可逆的膨胀过程. 同理, 我们也可以证明, 只有非常缓慢的亦即平衡的压缩过程, 才是可逆的压缩过程.

由上可知, 在热力学中, 过程的可逆与否和系统所经历的中间状态是否平衡密切相关. 只有过程进行得无限地缓慢, 没有由于摩

擦等引起机械能的耗散,由一系列无限接近于平衡状态的中间状态所组成的平衡过程,才是可逆过程.当然,这在实际情况中是办不到的.我们可以实现的只是与可逆过程非常接近的过程,也就是说可逆过程只是实际过程在某种精确度上的极限情形.

实践中遇到的一切过程都是不可逆过程,或者说只是或多或少地接近可逆过程.研究可逆过程,也就是研究从实际情况中抽象出来的理想情况,可以基本上掌握实际过程的规律性,并可由此出发去进一步找寻实际过程的更精确的规律.

自然现象中的不可逆过程是多种多样的,各种不可逆过程之间存在着内在的联系.由热功转化的不可逆性证明气体自由膨胀的不可逆性,就是反映了这种内在联系.

2. 卡诺定理

卡诺循环中每个过程都是平衡过程,所以卡诺循环是理想的可逆循环.由可逆循环组成的热机叫做可逆机.

从热力学第二定律可以证明热机理论中非常重要的卡诺定理,它指出:

(1) 在同样高低温热源(高温热源的温度为 T_1 ,低温热源的温度为 T_2)之间工作的一切可逆机,不论用什么工作物,效率都等于 $\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$.

(2) 在同样高低温热源之间工作的一切不可逆机的效率,不可能高于(实际上是小于)可逆机,即

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

卡诺定理指出了提高热机效率的途径.就过程而论,应当使实际的不可逆机尽量地接近可逆机.对高温热源和低温热源的温度来说,应该尽量地提高两热源的温差,温差愈大则热量的可利用的价值也愈大.但是在实际热机中,如蒸气机等,低温热源的温

度,就是用来冷却蒸气的冷凝器的温度.想获得更低的低温热源温度,就必须用致冷机,而致冷机要消耗外功,因此用降低低温热源的温度来提高热机的效率是不经济的,所以要提高热机的效率应当从提高高温热源的温度着手.

3. 卡诺定理的证明

(1) 在同样高低温热源之间工作的一切可逆机,不论用什么工作物,它们的效率均等于 $\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$.

设有两热源:高温热源,温度为 T_1 ;低温热源,温度为 T_2 . 一卡诺理想可逆机 E 与另一可逆机 E' (不论用什么工作物),在此两热源之间工作(图 7-18),设法调节使两热机可作相等的功 A . 现在使两机结合,由可逆机 E' 从高温热源吸取热量 Q'_1 ,向低温热源放出热量 $Q'_2 = Q'_1 - A$,它的效率为 $\eta' = \frac{A}{Q'_1}$. 可逆机 E' 所做的功 A 恰好供给卡诺机 E,而使 E 逆向进

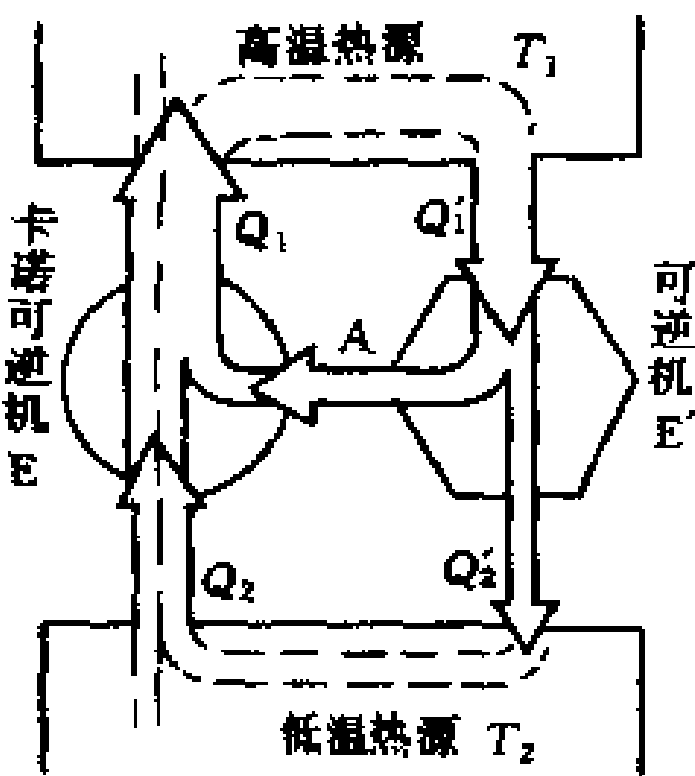


图 7-18 卡诺定理的证明

行,从低温热源吸取热量 $Q_2 = Q_1 - A$,向高温热源放出热量 Q_1 ,卡诺机效率为 $\eta = \frac{A}{Q_1}$. 我们试用反证法,先假设 $\eta' > \eta$. 由

$$\frac{A}{Q'_1} > \frac{A}{Q_1}, \text{ 可知 } Q'_1 < Q_1$$

由

$$Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2, \text{ 可知 } Q'_2 < Q_2$$

在两机一起运行时,可把它们看作一部复合机,结果成为外界没有对这复合机做功,而复合机却能将热量 $Q_2 - Q'_2 = Q_1 - Q'_1$ 从低温热源送至高温热源,这就违反了热力学第二定律. 所以 $\eta' > \eta$ 为不

可能,即 $\eta \geq \eta'$.

反之,使卡诺机 E 正向运行,而使可逆机 E' 逆向运行,则又可证明 $\eta > \eta'$ 为不可能,即 $\eta \leq \eta'$. 从上述两个结果中可知 $\eta' > \eta$, 或 $\eta > \eta'$ 均不可能,只有 $\eta = \eta'$ 才成立,也就是说在相同的 T_1 和 T_2 两温度的高低温热源间工作的一切可逆机,其效率均等于 $1 - \frac{T_2}{T_1}$.

(2) 在同样的高温热源和同样的低温热源之间工作的不可逆机,其效率不可能高于可逆机.

如果用一只不可逆机 E'' 来代替上节中所说的 E'. 按同样方法,我们可以证明 $\eta'' > \eta$ 为不可能,即只有 $\eta \geq \eta''$. 由于 E'' 是不可逆机,因此无法证明 $\eta \leq \eta''$.

所以结论是 $\eta \geq \eta''$, 也就是说,在相同的 T_1 和 T_2 两温度的高低温热源间工作的不可逆机,它的效率不可能大于可逆机的效率.

§ 7-8 熵

1. 熵的存在

根据热力学第二定律,我们论证了一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的. 这就是说,一个过程产生的效果,无论用什么曲折复杂的方法,都不能使系统恢复原状而不引起其它变化. 例如,在一系统中,有两个温度不同的物体相接触,这时热量总是从高温物体向低温物体传递,直到两物体处于热平衡为止. 与之相反的过程,即热量自动地从低温物体向高温物体传递,而把前一过程的效果完全消除的现象则绝无发生的可能. 又如,气体能自动地向真空作自由膨胀,从而充满整个容器,但是不可能产生气体自动地向一边收缩而使另一边出现真空的现象.

从这些现象的共同特点可以看出:当给定系统处于非平衡态时,总要发生从非平衡态向平衡态的自发性过渡;反之,当给定系

统处于平衡态时,系统却不可能发生从平衡态向非平衡态的自发性过渡.我们希望能找到一个与系统平衡状态有关的状态函数,根据这个状态函数单向变化的性质来判断实际过程进行的方向.下面,我们将看到,这个新的状态函数确实是存在的.

已知理想气体卡诺热机的效率是

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

这里,我们改用 Q_2 表示气体从低温热源吸收的热量,因为 Q_2 是负值,所以上式中 Q_2 之前用了正号.从上式可知

$$-\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

根据卡诺定理,这个公式对任何可逆卡诺机都适用,并与工作物质无关.现把上式改写成

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

或

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

此式说明在卡诺循环中,量 $\frac{Q}{T}$ 的总和等于零.(注意到 Q_1 和 Q_2 都表示气体在等温过程中所吸收的热量.)

现在让我们考虑一个可逆循环 $abcdefghija$,如图 7-19 所示,它由几个等温过程和绝热过程组成.把绝热线 bh 和 cg 画出后,可以看出,这个循环过程相当于 3 个可逆卡诺循环 $abija$, $bcghb$, $defgd$.因此,对整个循环过程,量 $\frac{Q}{T}$ 的和就简单地等

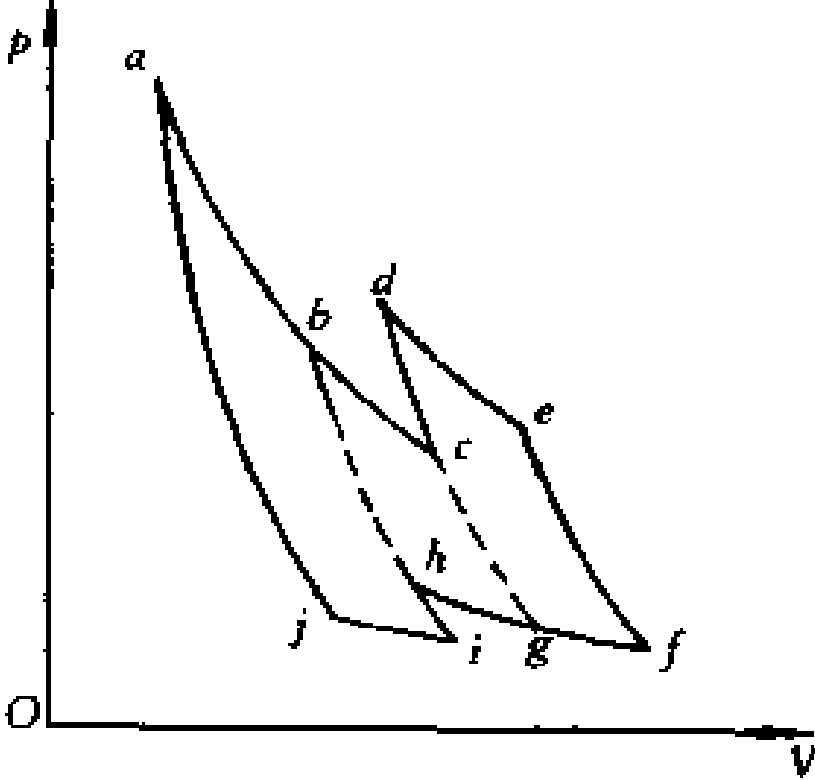


图 7-19 一个可逆循环,具有

于 3 个卡诺循环的 $\frac{Q}{T}$ 的和,所以有

$$\sum \frac{Q}{T} = 0 \text{ 的特性}$$

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

实际上,对于任意可逆循环,一般都可近似地看作由许多卡诺循环组成,而且所取的卡诺循环数目越多就越接近于实际的循环过程,如图 7-20 所示.在极限情况下,循环的数目趋于无穷大,因

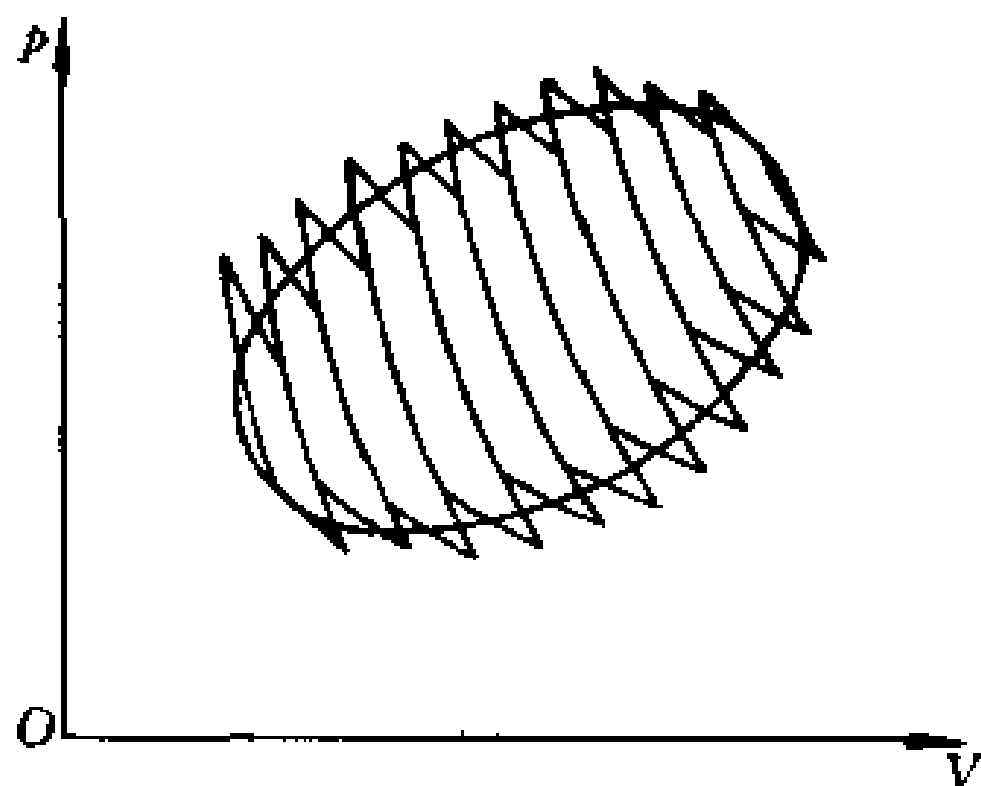


图 7-20 任一可逆循环,具有 $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ 的特性

而对 $\frac{Q}{T}$ 由求和变为积分.于是,对任一可逆循环有

$$\oint \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} = 0 \quad (7-28)$$

式中 $\oint$ 表示积分沿整个循环过程进行, dQ 表示在各无限短的过程中吸收的微小热量.

我们把式(7-28)用于图 7-21 中的 $1a2b1$ 循环,就可得出熵存在的结论.这时

$$\oint \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} = \int_{1a2} \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} + \int_{2b1} \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} = 0$$

或写成

$$\int_{1a2} \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} = - \int_{2b1} \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} = \int_{1b2} \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}}$$

上式表明,系统从状态 1 变为状态 2,可用无限多种方法进行;在所有这些可逆过程中,系统可得到极不同的热量,但在所有情况

中, $\int \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}}$ 将有相同的数值. 这就是说, $\int \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}}$ 与过程无关, 只依赖于始末状态. 因此, 系统确实存在一个状态函数, 我们把这个状态函数叫做熵, 并以 S 表示之. 如以 S_1 和 S_2 分别表示状态 1 和状态 2 时的熵, 那么系统沿可逆过程从状态 1 变到状态 2 时熵的增量

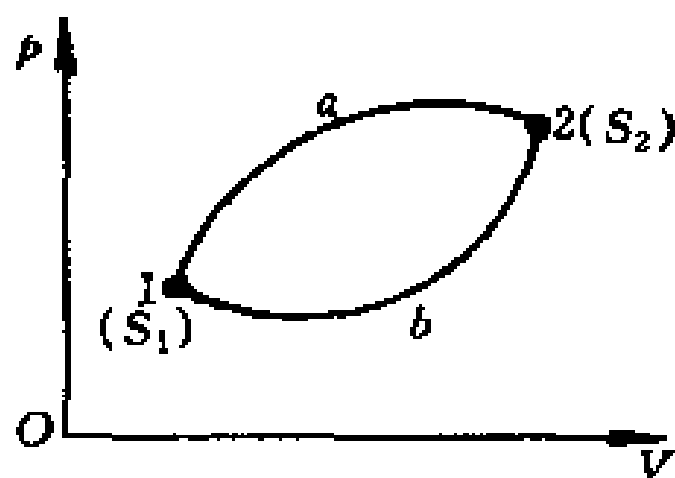


图 7-21 一个新的状态函数
——熵的引入

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}} \quad (7-29)$$

对于一段无限小的可逆过程, 上式可写成微分形式,

$$\boxed{dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}}} \quad (7-30)$$

亦即, 在可逆过程中, 可把 $\frac{dQ}{T}$ 看作系统的熵变. 而且, 从式(7-28)还可看出: 在一个可逆循环中, 系统的熵变等于零. 这些结论都是很重要的.

2. 自由膨胀的不可逆性

现在, 我们应用熵的概念讨论不可逆过程. 自由膨胀是不可逆过程的典型例子, 通过对它的不可逆性所作的微观剖析, 将使我们认识更加深刻.

设理想气体在膨胀前的体积为 V_1 , 压强为 p_1 , 温度为 T , 熵为 S_1 , 膨胀后体积变为 V_2 ($V_2 > V_1$), 压强降为 p_2 ($p_2 < p_1$), 而温度不变. 因气体现在的状态不同于初状态, 它的熵可能变化, 用 S_2 表示这时的熵. 我们来计算这一过程中的熵变. 有人考虑到在自由膨胀中, $dQ=0$, 于是由式(7-30)求得 $dS = \frac{dQ}{T} = 0$, 这是错误的. 因为只

有对可逆过程,才能把 $\frac{dQ}{T}$ 理解为熵的变化.为了计算系统在不可逆过程中的熵变,要利用熵是状态函数的性质.这就是说,熵的变化只决定于初态与终态,而与所经历的过程无关.因此,我们可任意设想一个可逆过程,使气体从状态 1 变为状态 2,从而计算这一过程中的熵变,所得结果应该是一样的.在自由膨胀的情况下,我们假设一可逆等温膨胀过程,让气体从 V_1 、 p_1 、 T 和 S_1 变化为 V_2 、 p_2 、 T 和 S_2 .在这等温过程中,系统的熵也是从 S_1 变到 S_2 ,但所吸收的热量 $dQ > 0$.因在等温过程中,气体温度不变,系统对外做功,其值与气体从外界吸收的热量相等,所以熵的变化为

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{p dV}{T} \\ &= \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \end{aligned}$$

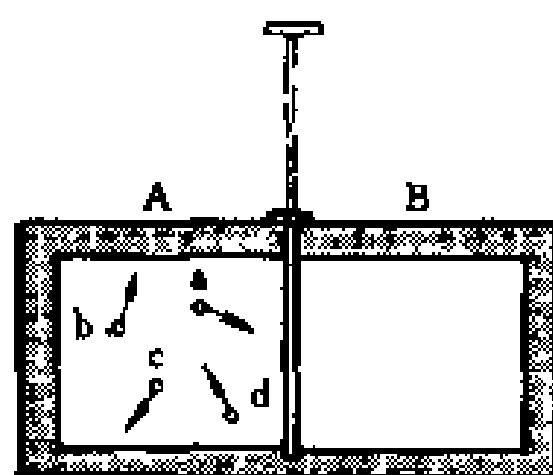


图 7-22 气体自由膨胀
不可逆性的统计意义

这就是说,气体在自由膨胀这个不可逆过程中,它的熵是增加的.

气体自由膨胀的不可逆性,可用气体动理论的观点给以解释.

如图 7-22 所示,用隔板将容器分成容积相等的 A、B 两室,使 A 部充满气体,B 部保持真空.我们考虑气体中任一个分子,比如分子 a.在隔板抽掉前,它只能在 A 室运动;把隔板抽掉后,它就在整个容器中运动,由于碰撞,它就可能一会儿在 A 室,一会儿又跑到 B 室.因此,就单个分子看来,它是有可能自动地退回到 A 室的,因为它在 A、B 两室的机会是均等的,所以退回到 A 室的概率是 $\frac{1}{2}$.如果我们考虑 4 个分子,把隔板抽掉后,它们将在整个容器内运动,如果以 A 室和 B 室来分类,则这 4 个分子在容器中的分布有 16 种可能.每一种分布状态出现的概率相等,情况见下表:

分 子 的 分 布																		
容 器 的 部 分	A	0	abcd	a	b	c	d	bcd	acd	abd	abc	ab	ac	ad	bc	bd	cd	总 计
	B	abcd	0	bcd	acd	abd	abc	a	b	c	d	cd	bd	bc	ad	ac	ab	
状态数		1	1	4				4				6				16		

从表中可以看出：4 个分子同时退回到 A 室的可能性是存在的，其概率为 $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$ 。但比一个分子退回到 A 室的概率少多了。相应的计算可以证明：如果共有 N 个分子，若以分子处在 A 室或 B 室来分类，则共有 2^N 种可能的分布，而全部 N 个分子都退回到 A 室的概率为 $\frac{1}{2^N}$ 。例如，对 1 mol 的气体来说， $N\approx 6\times 10^{23}$ ，所以当气体自由膨胀后，所有这些分子全都退回到 A 室的概率是 $\frac{1}{2^{6\times 10^{23}}}$ ，这个概率是如此之小，实际上是不会实现的。

由以上的分析可以看到，如果我们以分子在 A 室或 B 室分布的情况来分类，把每一种可能的分布称为一个微观状态，则 N 个分子共有 2^N 个可能的概率均等的微观状态，但是全部气体都集中在 A 室这样的宏观状态却仅包含了一个可能的微观状态，而基本上是均匀分布的宏观状态却包含了 2^N 个可能的微观状态中的绝大多数。一个宏观状态，它所包含的微观状态的数目愈多，分子运动的混乱程度就愈高，实现这个宏观状态的方式为数也愈多，亦即这个宏观状态出现的概率也愈大。就全部气体都集中回到 A 室这样的宏观状态来说，它只包含了一个可能的微观状态，分子运动显得很有秩序，很有规则，亦即混乱程度极低，实现这种宏观状态的方式只有一个，因而这个宏观状态出现的概率也就小得接近于零。由此可见，自由膨胀的不可逆性，实质上反映了这个系统内部发生的过程总是由概率小的宏观状态向概率大的宏观状态进行，亦即由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行的，与之相反的过程，没有外界的影响是不可能自动实现

的.

3. 玻尔兹曼关系

根据上面的分析,我们用 W 表示系统(宏观)状态所包含的微观状态数,或把 W 理解为(宏观)状态出现的概率,并叫做热力学概率或系统的状态概率.考虑到在不可逆过程中,有两个量同时在增加:一个是状态概率 W ,一个是熵,因此自然可以设想这两者之间应有如下联系:

$$S = k \ln W \quad (7-31)$$

其中 k 是玻尔兹曼常量.上式叫做玻尔兹曼关系,是玻尔兹曼首先从理论上予以证明的.熵的这个定义表明它是分子热运动无序性或混乱性的量度.为什么这样说呢?以气体为例,分子数目愈多,它可以占有体积愈大,分子所可能出现的位置与速度就愈多样化.这时,系统可能出现的微观状态就愈多,我们说分子运动的混乱程度就愈高.如果把气体分子设想为都处于同一速度元间隔与同一空间元间隔之内,则气体的分子运动将是很有规则的,混乱程度应该是零.显然,由于这时宏观状态只包含一个微观状态,亦即系统的宏观状态只能以一种方式产生出来,所以状态的热力学概率是 1,代入式(7-31)而得到熵等于零的结果.但是,如果系统的宏观状态包含许多微观状态,那么,它就能以许多方式产生出来, W 将是很大的.高度可能的宏观状态的熵因而也是大的.对自由膨胀这类不可逆过程来说,实质上表明这个系统内自发进行的过程总是沿着熵增加的方向进行的.

最后,我们将通过具体过程中分子运动无序性的增减来说明熵的增减.例如,在等压膨胀过程中,由于压强不变,所以体积增大的同时温度也在上升.体积的增大,表明气体分子空间分布的范围变大了;而温度的升高,则意味着气体内大部分分子的速率分布范围在扩大.这两种分布范围的变大,使气体分子运动的混乱程度增加,因而熵是增大的.又如在等温膨胀过程中,在内能不变条件下,

因气体体积的增大,分子可能占有的空间位置增多了,可能出现的微观状态的数目(即状态概率)也因而增加,混乱度增高,熵是变大的.在等体降温过程中,由于温度的降低,麦克斯韦速率分布曲线变得高耸起来,气体中大部分分子速率分布的范围变窄,因此分子运动的混乱程度有所改善,熵将是减小的.最有意义的是绝热过程,对绝热膨胀来说,因系统体积的增大,分子运动的混乱程度是增大的,但系统温度的降低,却使分子运动的混乱程度减少.计算表明,在可逆的绝热过程中,这两个截然相反的作用恰好相互抵消.因此,可逆的绝热过程是个等熵过程.

例题 7-7 试用式(7-31)计算理想气体在等温膨胀过程中的熵变.

解 在这个过程中,对于一指定分子,在体积为 V 的容器内找到它的概率 W_1 是与这个容器的体积成正比的,即

$$W_1 = cV$$

式中 c 是比例系数,对于 N 个分子,它们同时在 V 中出现的概率 W ,等于各单个分子出现概率的乘积,而这个乘积也就是在 V 中由 N 个分子所组成的宏观状态的概率,即

$$W = (W_1)^N = (cV)^N$$

由式(7-31)得系统的熵为

$$S = k \ln W = kN \ln(cV)$$

经等温膨胀,熵的增量为

$$\begin{aligned} \Delta S &= kN \ln(cV_2) - kN \ln(cV_1) = kN \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{R}{N_A} \frac{N_A M}{M_{\text{mol}}} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

事实上,这个结果已在自由膨胀的论证中用式(7-29)计算出来了.

§ 7-9 熵增加原理 热力学第二定律的统计意义

1. 熵增加原理

我们在上节已经指出,可逆的绝热过程是个等熵过程,系统的熵是不变的.上节讨论的自由膨胀过程也是个绝热过程,但它是个不可逆的绝热过程,具有明显的单方向性.这时,系统的熵不是不变而是增加了.

不可逆过程的另一典型例子是热传导,它也是一个具有明显单方向性的过程,在这个过程中,系统的熵又是怎样变化的呢?设有温度不同的两物体 1 和 2,它们与外界没有能量交换.当两者相互接触,如果 $T_1 > T_2$,那么,在一个很短时间内将有热量 dQ 从物体 1 传到物体 2.显然,对每个物体来说,进行的都不是绝热过程,但它们与外界没有能量交换.我们把与外界不发生任何相互作用的系统叫做封闭系统.这样,物体 1 与物体 2 组成了一个封闭系统.对一个封闭系统来说,不论系统内各物体间发生了什么过程(包括热传导),作为整个系统而言,过程是绝热的.现在,我们考察上述这个封闭系统中的熵变情况.当物体 1 向物体 2 传递微小热量 dQ 时,两者的温度都不会显著改变,我们可设想一可逆的等温过程来计算熵变.这样,物体 1 的熵变是 $-\frac{dQ}{T_1}$,物体 2 的熵变是 $\frac{dQ}{T_2}$.于是,系统总的熵变为

$$\frac{dQ}{T_2} - \frac{dQ}{T_1}$$

由于 $T_1 > T_2$,上式将大于零.这说明在封闭系统中的热传导过程也引起了整个系统熵的增加.

综上所述,无论是自由膨胀还是热传导,对于这些发生在封闭系统中的典型的不可逆过程,系统的熵总是增加的.在实际过程

中,无论是自由膨胀,或者是摩擦,或者是热传导,都是不可避免的.实际过程的不可逆性,都归结为它们或多或少地和这些典型的不可逆过程有关联.因此,我们的结论是,在封闭系统中发生的任何不可逆过程,都导致了整个系统的熵的增加,系统的总熵只有在可逆过程中才是不变的.这个普遍结论叫做熵增加原理.熵增加原理只能用之于封闭系统或绝热过程.倘若不是封闭系统或不是绝热过程,则借助外界作用,使系统的熵减小是可能的.例如,在可逆的等温膨胀中熵增加,而在可逆的等温压缩中熵减少.但是,如把系统和外界作为整个封闭系统考虑,则系统的总熵是不可能减少的.在可逆过程的情况下,总熵保持不变,而在不可逆过程的情况下,总熵一定增加,因此,我们可以根据总熵的变化判断实际过程进行的方向和限度.也正是基于这个原因,我们把熵增加原理看作是热力学第二定律的另一叙述形式.

2. 热力学第二定律的统计意义

在气体自由膨胀的讨论中,我们介绍了玻尔兹曼关系,从统计意义上了解了自由膨胀的不可逆性.现在,将对另外几个典型的不可逆过程作类似的讨论.

对于热量传递,我们知道,高温物体分子的平均动能比低温物体分子的平均动能要大,两物体相接触时,能量从高温物体传到低温物体的概率显然比反向传递的概率大很多.对于热功转换,功转化为热是在外力作用下宏观物体的有规则定向运动转变为分子无规则运动的过程,这种转换的概率大.反之,热转化为功则是分子的无规则运动转变为宏观物体的有规则运动的过程,这种转化的概率小.所以热力学第二定律在本质上是一条统计性的规律.

一般说来,一个不受外界影响的封闭系统,其内部发生的过程,总是由概率小的状态向概率大的状态进行,由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行.这才是熵增加原理的实质,也是热力学第二定律统计意义之所在.

例题 7-8 今有 1 kg 0 °C 的冰融化成 0 °C 的水, 求其熵变(设冰的熔解热为 $3.35 \times 10^5 \text{ J/kg}$).

解 在这个过程中, 温度保持不变, 即 $T = 273 \text{ K}$. 计算时设冰从 0 °C 的恒温热源中吸热, 过程是可逆的, 则

$$\begin{aligned} S_{\text{末}} - S_{\text{初}} &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} \\ &= \frac{1 \times 3.35 \times 10^5}{273} \text{ J/K} = 1.22 \times 10^3 \text{ J/K} \end{aligned}$$

在实际熔解过程中, 冰须从高于 0 °C 的环境中吸热. 冰增加的熵超过环境损失的熵, 所以, 若将系统和环境作为一个整体来看, 在这过程中熵也是增加的.

如让这个过程反向进行, 使水结成冰, 将要向低于 0 °C 的环境放热. 对于这样的系统, 同样导致熵的增加.

例题 7-9 有一热容为 C_1 、温度为 T_1 的固体与热容为 C_2 、温度为 T_2 的液体共置于一绝热容器内. (1) 试求平衡建立后, 系统最后的温度; (2) 试确定系统总的熵变.

解 (1) 因能量守恒, 要求一物体丧失的热量等于另一物体获得的热量; 设最后温度为 T' , 则有

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= -\Delta Q_2 \\ C_1(T' - T_1) &= -C_2(T' - T_2) \end{aligned}$$

由此得

$$T' = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$$

(2) 对于无限小的变化来说, $dQ = CdT$. 设固体的升温过程是可逆的, 则 $\Delta S_1 = \int \frac{dQ_1}{T}$; 设想液体的降温过程也是可逆的, 则 $\Delta S_2 = \int \frac{dQ_2}{T}$. 于是, 我们求得总的熵变为

$$\Delta S = \int \frac{dQ_1}{T} + \int \frac{dQ_2}{T}$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} + C_2 \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} \\
&= C_1 \ln \frac{T'}{T_1} + C_2 \ln \frac{T'}{T_2}
\end{aligned}$$

读者应当证明 $\Delta S > 0$, 并说明这是为什么。

3. 熵增与能量退化

熵与能都是状态函数, 两者关系密切, 而意义完全不同。“能”这一概念是从正面量度运动的转化能力的, 能愈大, 运动转化的能力愈大; 熵却是从反面, 即运动不能转化的一面量度运动转化的能力, 熵愈大, 系统的能量将有越来越多的部分不再可供利用。所以熵表示系统内部能量的“退化”或“贬值”, 或者说, 熵是能量不可用程度的量度。我们知道的能量不仅有形式上的不同, 而且还有质的差别。机械能和电磁能是可以被全部利用的有序能量, 而内能则是不能全部转化的无序能量。无序能量的可资利用的部分要视系统对环境的温差而定, 其百分比的上限是 $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$ 。由此可见, 无序能量总有一部分被转移到环境中去, 而无法全部用来作功。当一个高温物体与一个低温物体相接触, 其间发生热量的传递, 这时系统的总能量没有变化, 但熵增加了。这部分热量传给低温物体后, 成为低温物体的内能。要利用低温物体的内能作功, 必须使用热机和另一个温度比它更低的冷源。但因低温物体和冷源的温差要比高温物体和同一冷源的温差为小, 所以内能转变为功的可能性, 两相比较, 由于热量的传递而降低了。熵增加意味着系统能量中成为不可用能量的部分在增大, 这叫做能量的退化。

4. 熵增和热寂

伴随着热力学第二定律的确立, “热寂”说几乎一直在困扰着 19 世纪的一些物理学家。他们把热力学第二定律推广到整个宇宙, 认为宇宙的熵将趋于极大, 因此一切宏观的变化都将停止, 全

宇宙将进入“一个死寂的永恒状态”；宇宙的能量总值虽然没有变化，但都成为不可用能量，使人无法利用，而最令人不可理解的则是现实的宇宙并没有达到热寂状态。有人认为热寂说把热力学第二定律推广到整个宇宙是不对的，因为宇宙是无限的，不是封闭的。1922年，苏联学者弗里德曼在爱因斯坦引力场方程的理论研究中，找到一个临界密度，如果现在宇宙的平均密度小于这个临界密度，则宇宙是开放的，无限的，会一直膨胀下去，否则，膨胀到一定时刻将转为收缩。1929年，美国天文学家哈勃的天文研究表明，星系愈远，光谱线的红移愈大，该现象可用星系的退行运动引起的多普勒效应来解释。据此，人们会很自然地得出宇宙在膨胀的推论。对于一个膨胀着的系统，每一瞬时熵可能达到的极大值 S_m 是与时俱增的。当膨胀得足够快时，系统不能每时每刻跟上进程以达到新的平衡，实际上熵值 S 的增长将落后于 S_m 的增长，二者的差距愈拉愈大。这样，系统的熵虽不断增加，但它距平衡态（热寂状态）却愈来愈远。正如现实中的宇宙充满了由无序向有序的发展与变化，呈现在我们面前的是一个丰富多彩、千差万别、生气勃勃的世界。

思 考 题

7-1 怎样区别内能与热量？下面哪种说法是正确的？

- (1) 物体的温度愈高，则热量愈多；
- (2) 物体的温度愈高，则内能愈大。

7-2 说明在下列过程中热量、功与内能变化的正负：

- (1) 用气筒打气；(2) 水沸腾变成水汽。

7-3 为什么气体热容的数值可以有无穷多个？什么情况下，气体的摩尔热容是零？什么情况下，气体的摩尔热容是无穷大？什么情况下是正值？什么情况下是负值？

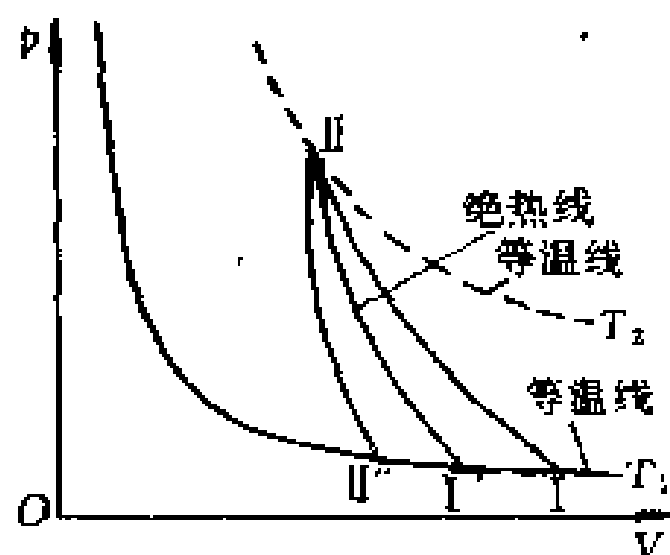
7-4 一理想气体经图示的各过程，试讨论其摩尔热容的正负：

- (1) 过程 I — II；
- (2) 过程 I' — II（沿绝热线）；

(3) 过程 $\text{I}' - \text{I}$.

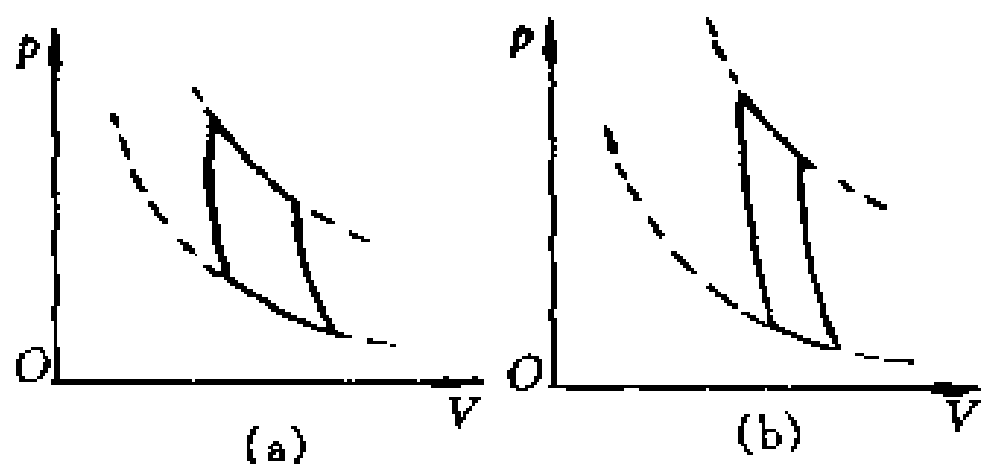
7-5 对物体加热而其温度不变,有可能吗? 没有热交换而系统的温度发生变化,有可能吗?

7-6 为什么卡诺循环是最简单的循环过程? 任意可逆循环需要多少个不同温度的热源?

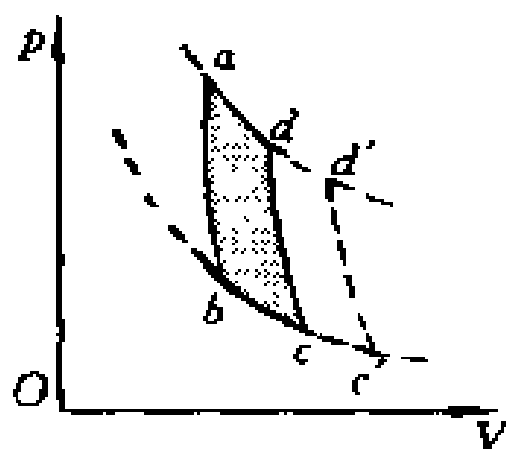


思考题 7-4 图

7-7 有两个可逆机分别用不同热源作卡诺循环,在 p - V 图上,它们的循环曲线所包围的面积相等,但形状不同,如图所示,它们吸热和放热的差值是否相同? 对外所作的净功是否相同? 效率是否相同?



思考题 7-7 图



思考题 7-8 图

7-8 p - V 图中表示循环过程的曲线所包围的面积,代表热机在一个循环中所作的净功,如图所示,如果体积膨胀得大些,面积就大了(图中面积 $S_{abc'd'} > S_{abcd}$),所作的净功就多了,因此热机效率也就可以提高了,这种说法对吗?

7-9 有一可逆的卡诺机,它作热机使用时,如果工作的两热源的温度差愈大,则对于做功就愈有利. 当作致冷机使用时,如果两热源的温度差愈大,对于致冷是否也愈有利? 为什么?

7-10 一条等温线与一条绝热线能否相交两次,为什么?

7-11 两条绝热线与一条等温线能否构成一个循环,为什么?

7-12 从原理上如何计算物体在始末状态之间进行不可逆过程所引起的熵变?

7-13 在日常生活中,经常遇到一些单方向的过程,如:(1)桌上热餐变凉;(2)无支持的物体自由下落;(3)木头或其他燃料的燃烧. 它们是否都与热

力学第二定律有关?在这些过程中熵变是否存在?如果存在,则是增大还是减小?

7-14 一杯热水放在空气中,它总是冷却到与周围环境相同的温度,因为处于比周围温度高或低的概率都较小,而与周围同温度的平衡却是最概然状态,但是这杯水的熵却是减小了,这与熵增加原理有无矛盾?

7-15 一定量的气体,初始压强为 p_1 , 体积为 V_1 , 今把它压缩到 $\frac{V_1}{2}$, 一种方法是等温压缩, 另一种方法是绝热压缩, 问哪种方法最后的压强较大? 这两种方法中气体的熵改变吗?

7-16 判别下面说法是否正确?

- (1) 功可以全部转化为热, 但热不能全部转化为功;
- (2) 热量能从高温物传到低温物, 但不能从低温物传到高温物.

习 题

7-1 1 mol 单原子理想气体从 300 K 加热至 350 K,

- (1) 容积保持不变;
- (2) 压强保持不变;

问在这两过程中各吸收了多少热量? 增加了多少内能? 对外作了多少功?

7-2 在 1g 氦气中加进 1 J 的热量, 若氦气压强并无变化, 它的初始温度为 200 K, 求它的温度升高多少?

7-3 压强为 1.0×10^5 Pa, 体积为 0.0082 m^3 的氦气, 从初始温度 300 K 加热到 400 K, 如加热时 (1) 体积不变, (2) 压强不变, 问各需热量多少? 哪一个过程所需热量大? 为什么?

7-4 2 mol 氦气, 在温度为 300 K、压强为 1.0×10^5 Pa 时, 等温地压缩到 2.0×10^5 Pa. 求气体放出的热量.

7-5 质量为 1 kg 的氧气, 其温度由 300 K 升高到 350 K. 若温度升高是在下列 3 种不同情况下发生的:

- (1) 体积不变;
- (2) 压强不变;
- (3) 绝热;

问其内能改变各为多少?

7-6 将 500 J 的热量传给标准状态下 2 mol 的氢.

- (1) 若体积不变,问这热量变为什么? 氢的温度变为多少?
- (2) 若温度不变,问这热量变为什么? 氢的压强及体积各变为多少?
- (3) 若压强不变,问这热量变为什么? 氢的温度及体积各变为多少?

7-7 有一定量的理想气体,其压强按 $p = \frac{c}{V^2}$ 的规律变化, c 是个常量. 求气体从容积 V_1 增加到 V_2 所作的功. 该理想气体的温度是升高还是降低?

7-8 1 mol 氢,在压强为 1.0×10^5 Pa,温度为 20°C 时,其体积为 V_0 . 今使它经以下两种过程达同一状态:

(1) 先保持体积不变,加热使其温度升高到 80°C ,然后令它作等温膨胀,体积变为原体积的 2 倍;

(2) 先使它作等温膨胀至原体积的 2 倍,然后保持体积不变,加热到 80°C .

试分别计算以上两种过程中吸收的热量,气体对外作的功和内能的增量;并作出 p - V 图.

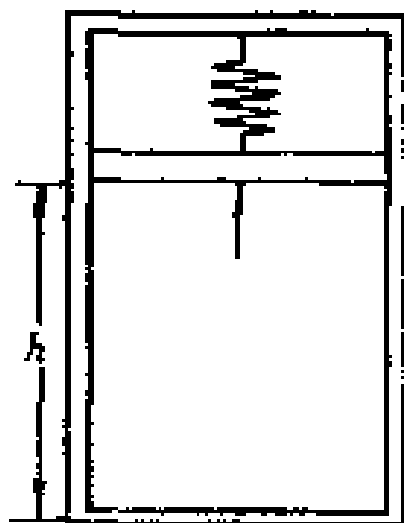
7-9 理想气体作绝热膨胀,由初状态 (p_0, V_0) 至末状态 (p, V) .

(1) 试证明在此过程中气体所作功为

$$A = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1};$$

(2) 设 $p_0 = 1.0 \times 10^6$ Pa, $V_0 = 0.001$ m³, $p = 2.0 \times 10^5$ Pa, $V = 0.00316$ m³,气体的 $\gamma = 1.4$,试计算气体所作的功为多少 J?

7-10 在一密闭的抽空气缸中,有个劲度系数为 k 的弹簧,下面吊着一个质量不计且没有摩擦的滑动活塞,如图所示. 弹簧下活塞的平衡位置位于气缸的底部. 当活塞下面的空间引进一定量的摩尔定体热容为 C_V 的理想气体时,活塞上升到高度 h ,如图示. 弹簧作用在活塞上的力正比于活塞的位移. 如果该气体从原来的温度 T 升高到 T_1 并吸热 Q . 问活塞所在的高度 h' 等于多少?



习题 7-10 图

7-11 气缸内有单原子理想气体,若绝热压缩使其容积减半,问气体分子的平均速率变为原来速率的几倍? 若为双原子理想气体,又为几倍.

7-12 一高压容器中含有未知气体,可能是 N_2 或 Ar . 在 298 K 时取出试样,从 5×10^{-3} m³ 绝热膨胀到 6×10^{-4} m³,温度降到 277 K. 试判断容器

中是什么气体?

7-13 (1)有 10^{-6} m^3 的 373 K 的纯水,在 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的压强下加热,变成 $1.671 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的同温度的水蒸气.水的汽化热是 $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$.问水变汽后,内能改变多少?(2)在标准状态下 10^{-6} kg 的 273 K 的冰化为同温度的水,试问内能改变多少?标准状态下水与冰的比体积各为 $10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ 与 $\frac{11}{10} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$.冰的熔解热为 $3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$.

7-14 室温 27°C 下一定量理想气体氧的体积为 $2.3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$,压强为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$,经过一多方过程后,体积变为 $4.1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$,压强为 $0.5 \times 10^5 \text{ Pa}$.求:(1)多方指数 n ;(2)内能的改变;(3)吸收的热量;(4)氧膨胀时对外作的功.已知氧的 $C_V = \frac{5}{2}R$.

△7-15 设某理想气体的摩尔热容随温度按 $C = \alpha T$ 的规律变化, α 为一常数,求此理想气体 1 mol 的过程方程式.

7-16 声音在空气中的传播可以看作是一绝热过程.它的速度可按公式 $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ 计算,式中 $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, p 为空气的压力, ρ 为空气的密度.试证明声音在空气中的传播速度仅是温度的函数

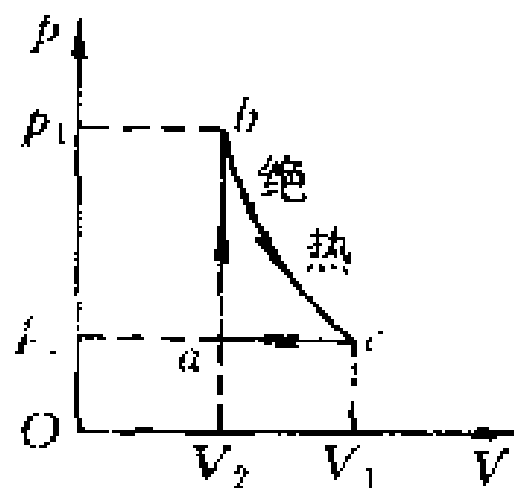
7-17 如果在 0°C 、 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下空气中的声速 $v = 332 \text{ m/s}$,空气的密度 $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$.求空气的 γ .

△7-18 1 mol 范德瓦耳斯气体,初始体积为 V_1 ,向真空作绝热膨胀至体积 V_2 .

- (1) 求温度的增量 ΔT .
- (2) 气体温度的变化是否由于其内能变化了?
- (3) 如果这是理想气体,温度变化如何?

7-19 设有一以理想气体为工作物质的热机循环,如图所示,试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2} \right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2} \right) - 1}$$



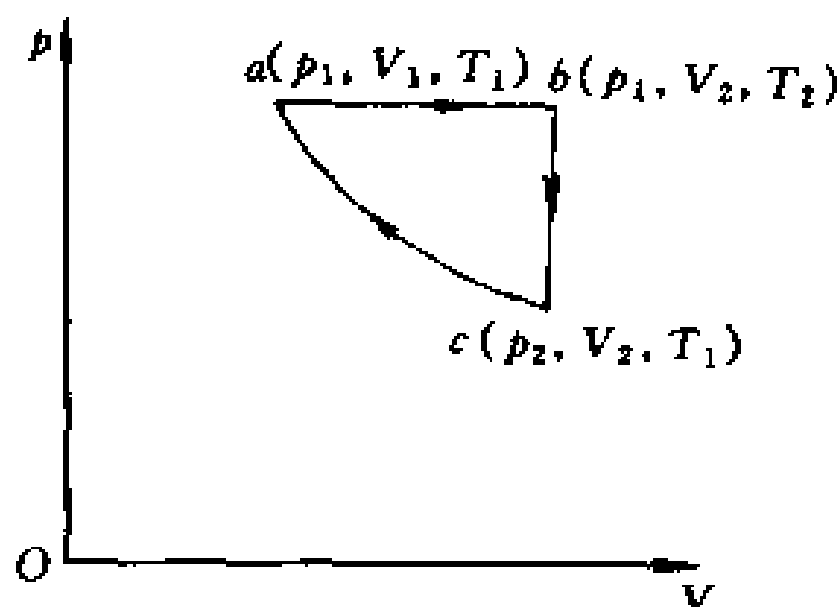
习题 7-19 图

7-20 1 mol 理想气体在 400 K 与 300 K 之间完成一卡诺循环,在 400 K 的等温线上,起始体积为 0.0010 m^3 ,最后体积为 0.0050 m^3 ,试计

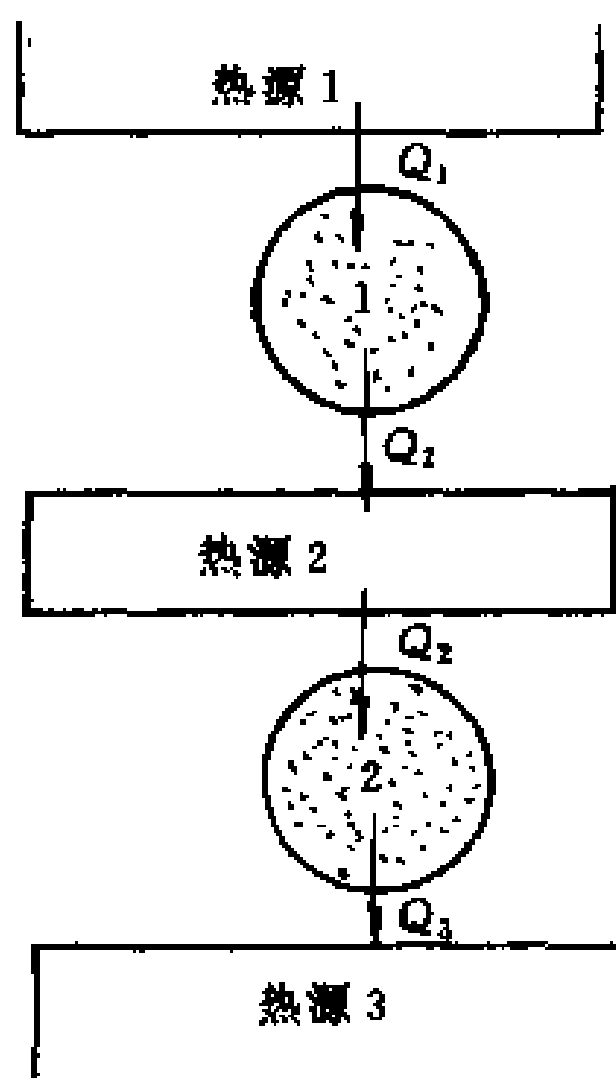
算气体在此循环中所作的功,以及从高温热源吸收的热量和传给低温热源的热量.

7-21 一热机在1 000 K 和 300 K 的两热源之间工作. 如果(1)高温热源提高到1 100 K,(2)低温热源降到 200 K,求理论上的热机效率各增加多少? 为了提高热机效率哪一种方案更好?

7-22 有 25 mol 的某种气体,作图示循环过程(ac 为等温过程). $p_1 = 4.15 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, $V_2 = 3.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$. 求:(1)各过程中的热量、内能改变以及所作的功;(2)循环的效率.



习题 7-22 图



习题 7-23 图

7-23 两部可逆机串联起来,如图所示.可逆机 1 工作于温度为 T_1 的热源 1 与温度为 $T_2 = 400 \text{ K}$ 的热源 2 之间.可逆机 2 吸入可逆机 1 放给热源 2 的热量 Q_2 ,转而放热给 $T_3 = 300 \text{ K}$ 的热源 3. 在(1)两部热机效率相等,(2)两部热机做功相等的情况下求 T_1 .

7-24 一热机每秒从高温热源($T_1 = 600 \text{ K}$)吸取热量 $Q_1 = 3.34 \times 10^4 \text{ J}$, 做功后向低温热源($T_2 = 300 \text{ K}$)放出热量 $Q_2 = 2.09 \times 10^4 \text{ J}$. (1)问它的效率是多少? 它是不是可逆机? (2)如果尽可能地提高了热机的效率,问每秒从高温热源吸热 $3.34 \times 10^4 \text{ J}$,则每秒最多能作多少功?

7-25 一绝热容器被铜片分成两部分,一边盛 80°C 的水,另一边盛

20℃的水,经过一段时间后,从热的一边向冷的一边传递了4186J的热量,问在这个过程中的熵变是多少?假定水足够多,传递热量后的温度没有明显变化.

7-26 把质量为5kg、比热容(单位质量物质的热容)为544J/(kg·℃)的铁棒加热到300℃,然后浸入一大桶27℃的水中,求在这冷却过程中铁的熵变.

7-27 一固态物质,质量为 m ,熔点为 T_m ,熔解热为 L ,比热容(单位质量物质的热容)为 c .如对它缓慢加热,使其温度从 T_0 上升为 T_m ,试求熵的变化.假设供给物质的热量恰好使它全部熔化.

7-28 两个体积相同的容器盛有不同的理想气体,一种气体质量为 M_1 ,摩尔质量为 M_{m1} ;另一种质量为 M_2 ,摩尔质量为 M_{m2} .它们的压强与温度都相同.两者相互连通起来,开始了扩散,求这个系统总的熵变.

7-29 一房间有 N 个气体分子,半个房间的分子数为 n 的概率为

$$W(n) = \sqrt{\frac{2}{N\pi}} e^{-2(n - \frac{N}{2})^2/N}$$

(1) 写出这种分布的熵的表达式 $S = k \ln W$;

(2) $n=0$ 状态与 $n = \frac{1}{2}N$ 状态之间的熵变是多少?

(3) 如果 $N = 6 \times 10^{23}$,计算这个熵差.

7-30 1kg水银,初始温度为-100℃.如果加足够的热量使其温度升到100℃,问水银的熵变有多大?水银的熔点为-39℃,熔解热为 1.17×10^4 J/(kg·℃),而比热容为-138 J/(kg·℃).

7-31 有2mol的理想气体,经过可逆的等压过程体积从 V_0 膨胀到 $3V_0$.求在这一过程中的熵变.提示:设想气体从初始状态到最终状态是先沿等温曲线,然后沿绝热曲线(在这个过程中熵没有变化)进行的.

阅读材料 E

熵与能源

1. 熵与能

熵的概念对许多人是陌生的,它很抽象,也很费解.其实,熵的

规律对我们每个人来说,都有着不少的感性认识。

当把一杯开水放到桌子上,通过热传导,热量从水传到空气中,最后水温与空气温度一致.在自然状态下,绝不会出现与此相反的过程,把热量从空气传到水,使水升温成开水,而空气的温度则自动降低.当把几滴墨水滴入一杯清水中,墨水分子会自动在水中扩散,最后水的颜色处处均匀一致,变成一杯黑色溶液.与之相反,要墨水分子从这种均匀混合的状态中自动聚集起来,凝成几滴墨水的过程是绝不会发生的.一辆沿一个方向运动着的汽车,由于轮子与地面的摩擦,会不断地把它的动能转变成使轮子和地面发热的热能,这意味着汽车一个自由度上的能量被分配到许多自由度上,使轮子和地面的无数粒子作无规则的热运动.而相反的过程是无法实现的,即不能通过加热轮子和地面使汽车获得动能.这些都是不可逆过程的例子.伴随着不可逆过程的进行,有一个量在一直增加着,这就是熵.所有参与不可逆过程的物体的熵之和是单调增加的,这就是熵演变的规律,它概括了不可逆过程的普遍特征.

熵的概念一开始就和能的概念关系密切.克劳修斯把它定名为 Entropie,是德语“能量”的词冠“En-”和“变易”的词根“tropien”相组合,他说:“我有意把这个词拼成 Entropie,以便与 Energie(能量)尽可能地相似,因为这两个词表示的量在物理学上都有重要意义而且关系密切,所以名称上的相似,我认为是有好处的.”从热力学意义上看,熵与能的关系是这样的:熵增加意味着系统的能量从数量上讲虽然守恒,但“品质”却越来越差,越来越不中用,被用来作功的可能性越来越小,不可用程度越来越高.这就是“能量退化”.例如,汽车轮子与地面摩擦生热的过程是个熵增加的过程,摩擦的机械运动变成分子的热运动,机械能变成热能;虽然能量守恒,但让热能作功,再全自动地变成机械能却无此可能.显然,热能的“品质”要比机械能差,热能的不可用程度比机械能高.熵的增加意味着能量在质方面的“退化”.所以,熵和不可用能关系十分密切.

从统计意义上看,熵反映了分子运动的混乱程度,它是混乱程度的量度.熵增加反映自发过程总是从热力学概率小(或微观态数少,亦即混乱度低)的宏观态向热力学概率大(或微观态数多,亦即混乱度高)的宏观态进行.系统的最终状态是对应于热力学概率最大,也即最混乱的状态——平衡态.墨水分子在清水中的扩散,就是从有序到无序(混乱)、从概率小的状态向概率大的状态的演变.

如上所说,不可逆过程的熵增加意味着宏观能量的退化和微观混乱度的增加,可见这两者是一致的.汽车轮子与地面摩擦生热,把机械能变成热能;与之相应,微观上,车轮一个自由度上的机械运动变成了地面及轮子分子多个自由度上的热运动,混乱程度显然是增加了.

总之,热力学第一定律反映了能量转化的等值性,而热力学第二定律则反映了能量转化的不可逆性.能量与熵这两个物理量,它们既有密切联系又有本质的不同.

2. 熵和能源

“能源”的本意是指能量的来源.例如,太阳辐射到地球表面上的能量,就是人类使用的能量的主要来源.“能源”的另一层意思,是指能量资源.例如,存在于自然界中的煤、石油、天然气等化石燃料,铀、钍等核燃料,以及生物体等都属于能源;由这些物质加工而得的焦炭、煤气、液化气、煤油、电、沼气等也是能源.前者以现存的形式存在于自然界中,为一次能源.后者为从一次能源直接或间接转换而来的人工能源,为二次能源.根据能源本身性质的不同,我们把能量比较集中的含能物质,如化石燃料、核燃料、生物体、地热蒸气、高位水库等称为“含能体能源”,而把能量比较集中的物质运动过程,如流水、潮汐、风、地震、太阳能等称为“过程性能源”.也可根据能源使用方式的不同,把直接燃烧而释放能量的物质称为“燃料性能源”,而把可以直接用来驱动机器作功的能源称为“动力性能源”.前者的例子是煤、天然气等,后者的例子如电、高压水、压缩空气等.

能源是人类生活和生产资料的来源,是人类社会和经济发展的物质基础.随着科学的进步,经济的飞速发展,以及人口的急剧增长,人们已经开始认识到能源是有限的,如果不高度重视能源枯竭问题,将会出现不堪设想的后果.

能源问题的物理实质是物质与能量的转化问题,这些转化都为以下三条基本规律所支配.

(1) 物质守恒定律 物质可以从一种形式转化为另一种形式,但它既不能产生,也不能消灭.

(2) 能量守恒定律 普遍的能量守恒与转化定律是大家所熟悉的,对一个孤立系统,其总能量是一个恒量.力学中的机械能守恒定律、流体力学中的伯努利方程、热学中的热力学第一定律、电学中的基尔霍夫第一定律、量子物理中的爱因斯坦光电效应方程等,都是能量守恒定律在不同物理过程中的具体表现.

历史上,有不少人为解决能源问题而试图设计一种无需输入能量而不断对外作功的机器,这种“第一类永动机”之所以失败,就是由于违背了能量守恒定律.

(3) 熵增加原理 效率为100%的循环动作的热机,即所谓第二类永动机的失败,导致了热力学第二定律的发现.不论是热量传递还是热功转换,这些不可逆过程的非对称性行为,相当于孤立系统中熵总是增加的(至少是保持不变),这就是熵增加原理.

熵增加原理是个统计性原理,它指出一切宏观自发过程都是沿着从低概率到高概率、从有序到无序的方向进行的.用这个原理考察涉及物质转化和能量转化的各种过程时,就可发现,一切宏观自发过程的结果,必然是导致物质密度的均值化(均匀分布)和分子能量的均值化.我们以燃煤火力发电为例对此予以说明.煤炭是一种植物化石燃料,燃烧过程中释放出来的热能实际上是贮存在古代植物体中又在地下保存了千百万年的太阳能.在火力发电过程中,由于受汽轮发电机的效率及燃烧的不完全性等因素的制约,贮存在煤炭中的化学能只有一小部分转变成了有用能——电能,

而大部分热能(存在于废气、冷却剂中的热能以及机械部件摩擦产生的热能等)却被排放入周围环境(空气、水和大地)中,成了不可用能.由此可见,人类利用能量源的过程,实际上是一种能量转化过程,在此过程中,总能量保持不变;但集中在能源中的有用能的数量在不断减少,而均匀分布在环境中的不可用能的数量在不断增加(熵增加原理).所以,所谓“能源枯竭”、“能源危机”只是能源消耗而导致有用能急剧减少,不可用能急剧增加的代名词,是熵增加原理的反映,并不违背能量守恒定律.另一方面,煤的燃烧是一种氧化反应,其生成物 CO_2 、 CO 、 SO_2 等的总质量等于燃烧前煤和氧的总质量,这些生成物排放到环境中以后,扩散开来均匀分布,造成环境污染.由此可见,人类利用能源的过程,又是一种物质转化过程,在此过程中物质总量保持不变,但集中的能源的数量不断减少,而均匀分布在环境中的无用物、废物、污染物的数量在不断增加,这也是熵增加原理的一种反映.

所以,人类开发和利用能源,实现能量与物质的转化,在取得巨大经济效益的同时,也带来了能源枯竭和环境污染两大问题.

附录 I 矢量(第一部分)

1. 标量和矢量

在物理学中,有一类物理量,如时间、质量、功、能量、温度等,只有大小和正负,而没有方向,这类物理量称为标量.另一类物理量,如位移、速度、加速度、力、动量、冲量等,既有大小又有方向,而且相加减时遵从平行四边形的运算法则,这类物理量称为矢量(也称为向量).通常用带箭头的字母(例如 $\vec{A}$)或黑体字母(例如 $\mathbf{A}$)来表示矢量,以区别于标量.在作图时,我们可以在空间用一有向线段来表示,如图 1-1 所示.线段的长度表示矢量的大小,而箭头的指向则表示矢量的方向.

因为矢量具有大小和方向这两个特征,所以只有大小相等、方向相同的两个矢量才相等[图 1-2(a)].如果有一矢量和另一矢量 A 大小相等而方向相反,这一矢量就称为 A 矢量的负矢量,用 $-A$ 来表示[图 1-2(b)].

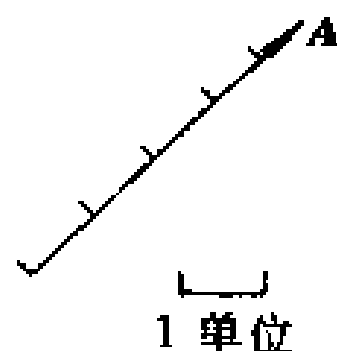


图 1-1 矢量的图示

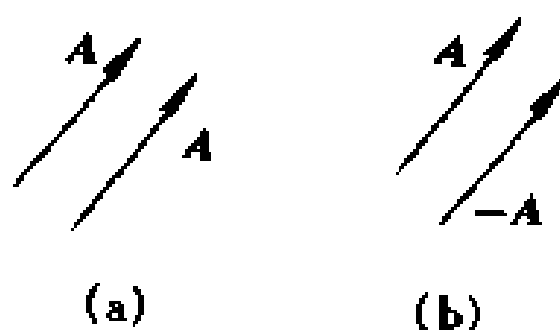


图 1-2 等矢量和负矢量

将一矢量平移后,它的大小和方向都保持不变.这样,在考察矢量之间的关系或对它们进行运算时,往往根据需要将矢量进行平移,如图 1-3 所示.

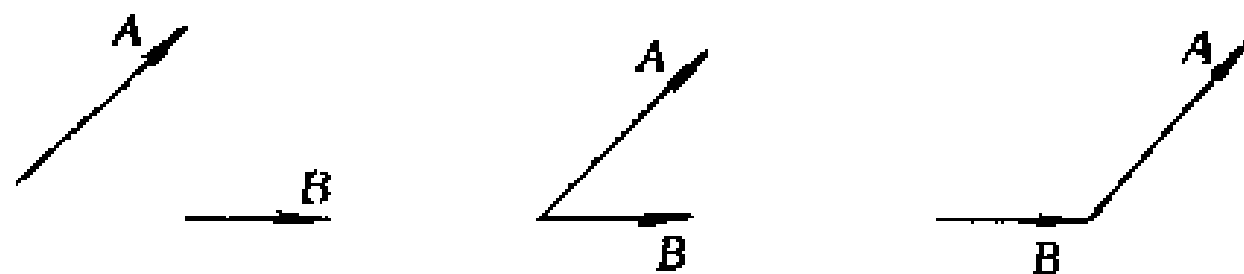


图 1-3 矢量的平移

2. 矢量的模和单位矢量

矢量的大小称为矢量的模.矢量 A 的模常用符号 $|A|$ 或 A 表示.

如果矢量 e_A 的模等于 1,且方向与矢量 A 相同,则 e_A 称为矢量 A 方向上

的单位矢量, 引进了单位矢量之后, 矢量 A 可以表示为

$$A = |A|e_A$$

这种表示方法实际上是把矢量 A 的大小和方向这两个特征分别地表示出来.

对于空间直角坐标系($Oxyz$)来说, 通常用 i, j, k 分别表示沿 x, y, z 三个坐标轴正方向的单位矢量.

3. 矢量的加法和减法

矢量的运算不同于标量的运算. 例如, 一个物体同时受到几个不同方向的力作用时, 在计算合力时, 不能简单地运用代数相加, 而必须遵从平行四边形法则. 因此矢量相加的方法常称为平行四边形法则.

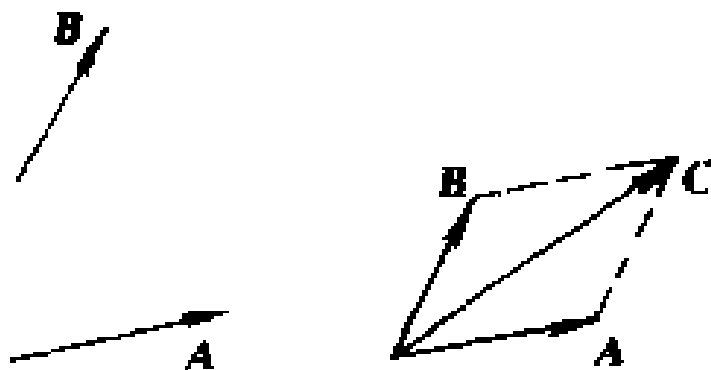


图 1-4 矢量的加法

设有两个矢量 A 和 B , 如图 1-4 所示. 将它们相加时, 可将两矢量的起点交于一点, 再以这两个矢量 A 和 B 为邻边作平行四边形, 从两矢量的交点作平行四边形的对角线, 此对角线即代表 A 和 B 两矢量之和, 用矢量式表示为

$$C = A + B$$

C 称为合矢量, 而 A 和 B 则称为 C 矢量的分矢量.

因为平行四边形的对边平行且相等, 所以两矢量合成的平行四边形法则可简化为三角形法则: 即以矢量 A 的末端为起点, 作矢量 B (图 1-5), 则不难看出, 由 A 的起点画到 B 的末端的矢量就是合矢量 C . 同样, 如以矢量 B 的末端为起点, 作矢量 A , 由 B 的起点画到 A 的末端的矢量也就是合矢量 C .

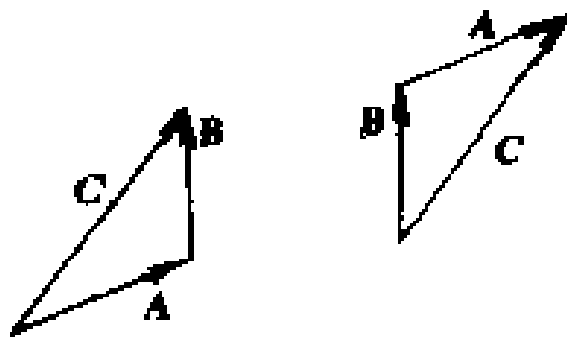


图 1-5 矢量合成的
三角形法则

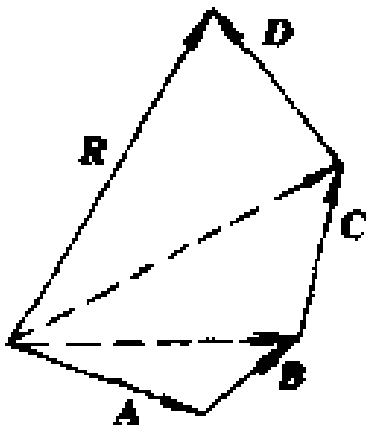


图 1-6 多矢量的合成

对于两个以上的矢量相加, 例如求 A, B, C 和 D 的合矢量, 则可根据三角

形法则,先求出其中两个矢量的合矢量,然后将该合矢量与第三个矢量相加,求出这三个矢量的合矢量,依此类推,就可以求出多个矢量的合矢量(图 1-6).从图中还可以看出,如果在第一个矢量的末端画出第二个矢量,再在第二个矢量的末端画出第三个矢量……,即把所有相加的矢量首尾相连,然后由第一个矢量的起点到最后一个矢量的末端作一矢量,这个矢量就是它们的合矢量.由于所有的分矢量与合矢量在矢量图上围成一个多边形,所以这种求合矢量的方法常称为多边形法则.

合矢量的大小和方向,也可以通过计算求得.如图 1-7 中,矢量 A 、 B 之间的夹角为 θ ,那末,合矢量 C 的大小和方向很容易从图上看出来,

$$\begin{aligned}
 C &= \sqrt{(A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2} \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \\
 \varphi &= \arctg \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}
 \end{aligned}$$

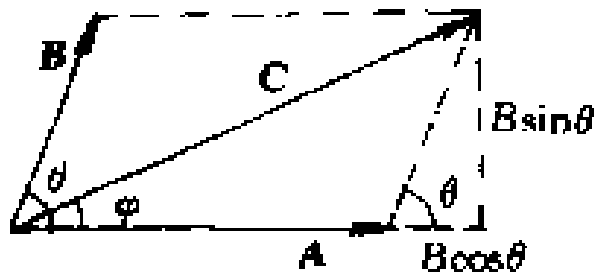


图 1-7 两矢量合成的计算

矢量的减法是按矢量加法的逆运算来定义的.例如,我们问 $A - B$ 为何?它将是另一个矢量 D ,我们记作 $D = A - B$,如果把 D 、 B 相加起来就应该得到 A .由图 1-8(a)可知, $A - B$ 等于由 B 的末端到达 A 的末端的矢量.从图 1-8(a)还可以看出, $A - B$ 也等于 A 和 $-B$ 的合矢量,即

$$A - B = A + (-B)$$

所以求矢量差 $A - B$ 可按图 1-8(a)中所示的三角形法或平行四边形法.

如果求矢量差 $B - A$,用同样的方法可以知道,等于由 A 的末端到达 B 的末端的矢量[图 1-8(b)],它的大小同 $A - B$ 的大小相等,但方向相反.

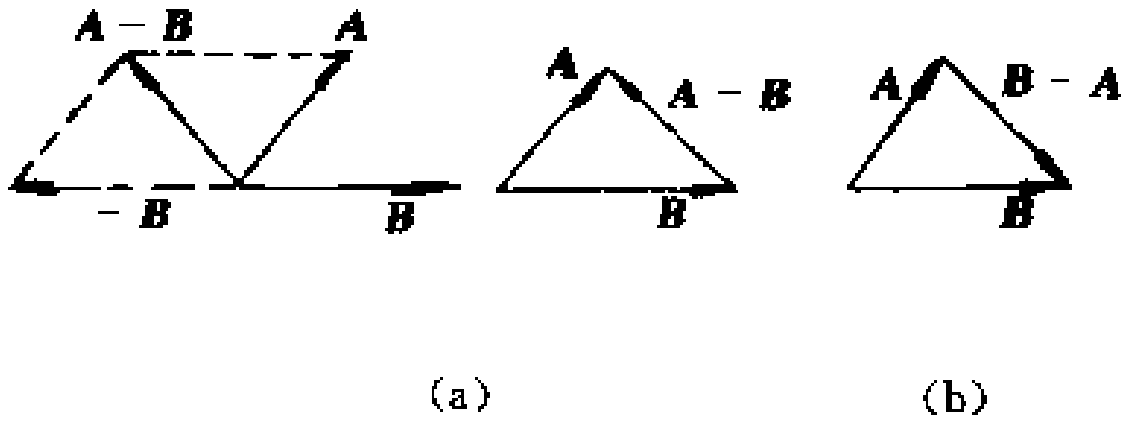


图 1-8 矢量的减法

4. 矢量合成的解析法

两个或两个以上的矢量可以合成为一个矢量,同样,一个矢量也可以分解为两个或两个以上的分矢量.但是,一个矢量分解为两个分矢量时,则有无

限多组解答(图 1-9), 如果先限定了两个分矢量的方向, 则解答是唯一的. 我们常将一矢量沿直角坐标轴分解. 由于坐标轴的方向已确定, 所以任一矢量分解在各轴上的分矢量只需用带有正号或负号的数值表示即可, 这些分矢量的量值都是标量, 一般叫做分量. 如图 1-10 所示, 矢量 A 在 x 轴和 y 轴上的分量分别为

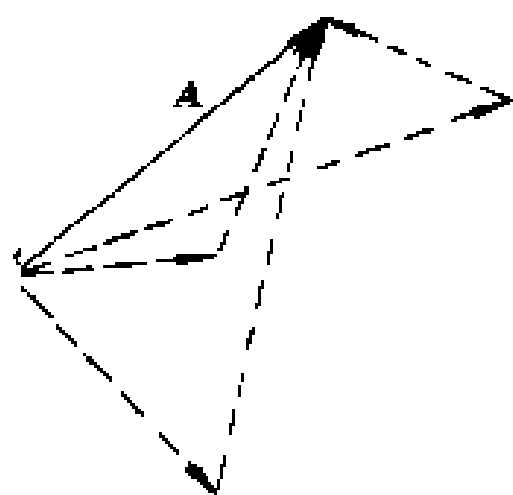


图 1-9 矢量的分解

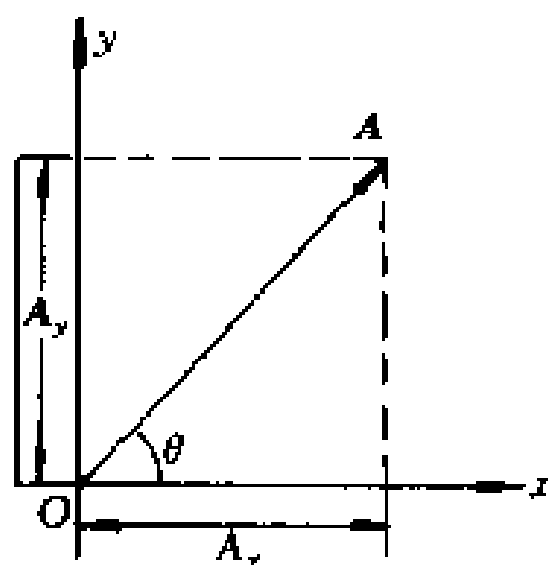


图 1-10 矢量的正交分解

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

显然, 矢量 A 的模与分量 A_x 、 A_y 之间的关系为

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

矢量 A 的方向可用与 x 轴的夹角 θ 来表示, 即

$$\theta = \arctg \frac{A_y}{A_x}$$

运用矢量的分量表示法, 可以使矢量的加减运算得到简化. 如图 1-11 所示, 设有两矢量 A 和 B , 其合矢量 C 可由平行四边形求出. 如矢量 A 和 B 在坐标轴上的分量分别为 A_x 、 A_y 和 B_x 、 B_y , 由图中很容易得出, 合矢量 C 在坐标轴上的分量满足关系式

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

就是说, 合矢量在任一直角坐标轴上的分量等于分矢量在同一坐标轴上各分量的代数和. 这样, 通过分矢量在坐标轴上的分量就可以求得合矢量的大小和方向.

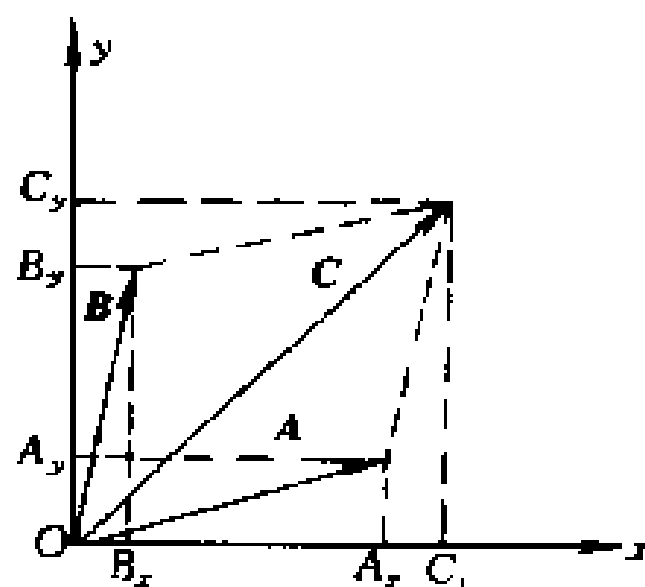


图 1-11 矢量合成的解析法

5. 矢量的数乘

一个数 m 和矢量 A 相乘, 那么得到另一个矢量 mA , 其大小是 mA , 如果 $m > 0$, 其方向与 A 相同; 如果 $m < 0$, 其方向与 A 相反.

6. 矢量的坐标表示

矢量的合成与分解是密切相连的. 在空间直角坐标系中, 任一矢量 A 都

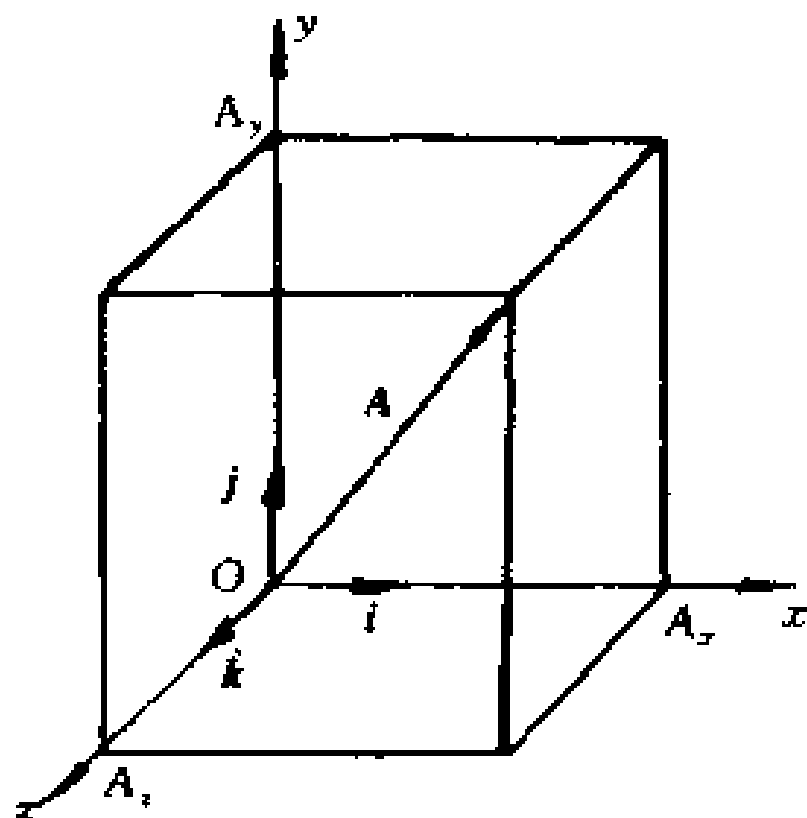


图 1-12 矢量的坐标表示

可沿坐标轴方向分解为三个分矢量(图 1-12), 即

$$\vec{OA} = A_x \vec{i} \quad \vec{OB} = A_y \vec{j} \quad \vec{OC} = A_z \vec{k}$$

由矢量合成的三角形法则不难得到

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

其中 A_x, A_y, A_z 为矢量 A 在坐标轴上的分量, 上式即为矢量的坐标表示. 于是矢量 A 的模为

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

而矢量 A 的方向则由这矢量与坐标轴的夹角 α, β, γ 来确定:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

由此, 又可得到矢量加减法的坐标表示式. 设 A 和 B 两矢量的坐标表达式为

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

于是 $\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x) \vec{i} + (A_y \pm B_y) \vec{j} + (A_z \pm B_z) \vec{k}$

7. 矢量的标积和矢积

在物理学中,我们常常遇到两个矢量相乘的情形,例如,功 A 与力 F 和位移 s 的关系为

$$A = F s \cos \theta$$

其中 θ 是力与位移之间的夹角,力 F 和位移 s 都是矢量,而功 A 是只有大小与正负、没有方向的量,即标量.又如力矩 M 的大小为

$$M = Fd = Fr \sin \theta$$

其中 d 是力臂, r 是力的作用点的位置矢量, θ 是 r 和 f 之间的夹角; r 和 f 也都是矢量,而力矩 M 也是矢量.由此可知,两矢量相乘有两种结果:两矢量相乘得到一个标量的叫做标积(或称点积);两矢量相乘得到一个矢量的叫做矢积(或称叉积).

设 A 、 B 为任意两个矢量,它们的夹角为 θ ,则它们的标积通常用 $A \cdot B$ 来表示,定义为

$$A \cdot B = AB \cos \theta$$

上式说明:标积 $A \cdot B$ 等于矢量 A 在 B 矢量方向上的投影 $A \cos \theta$ 与矢量 B 的模的乘积[图 1-13(a)],也等于矢量 B 在 A 矢量方向上的投影 $B \cos \theta$ 与矢量 A 的模的乘积[图 1-13(b)].

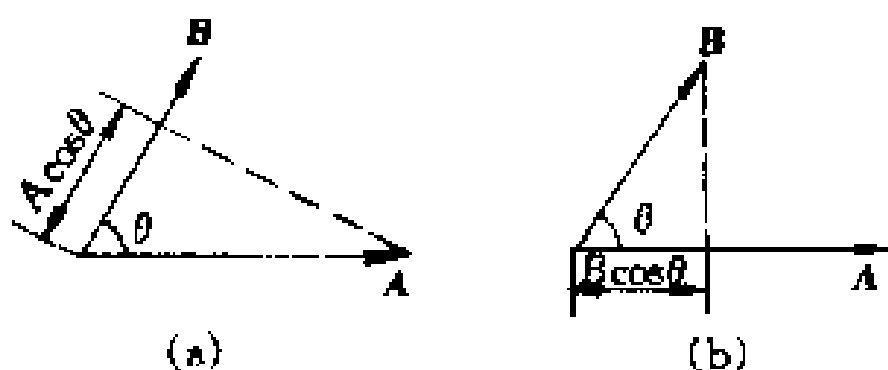


图 1-13 矢量的标积

引进了矢量的标积以后,功就可以用力和位移的标积来表示,即

$$A = F \cdot s$$

根据标积的定义,可以得出下列结论:

(1) 当 $\theta = 0$, 即 A 、 B 两矢量平行时, $\cos \theta = 1$, 所以 $A \cdot B = AB$. 当 A 和 B 相等时, $A \cdot A = A^2$.

(2) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 A 、 B 两矢量垂直时, $\cos \theta = 0$, 所以 $A \cdot B = 0$.

(3) 根据以上两点结论可知,直角坐标系的单位矢量 i 、 j 、 k 具有正交性,

即

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

利用上述性质,对 A 、 B 两矢量求标积有

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

矢量 A 和 B 的矢积 $A \times B$ 是另一矢量 C ,

$$C = A \times B$$

其定义如下:矢量 C 的大小为

$$C = AB \sin \theta$$

其中 θ 为 A 、 B 两矢量间的夹角, C 矢量的方向则垂直于 A 、 B 两矢量所组成的平面,指向由右手法则,即从 A 经由小于 180° 的角转向 B 时大拇指伸直时所指的方向决定(图 I-14).

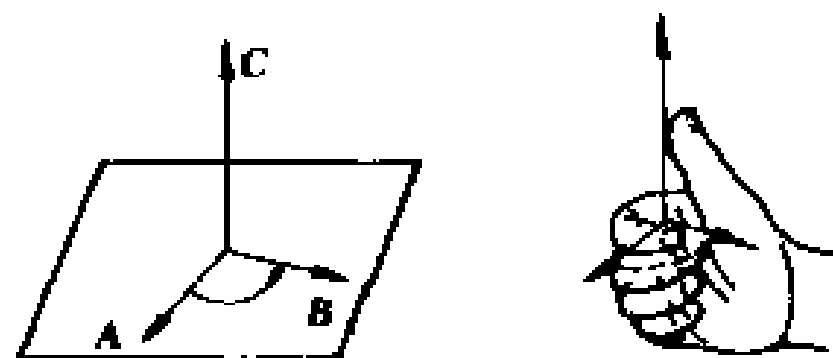


图 I-14 矢量的矢积

引进了矢量的矢积以后,力矩就可以用力作用点的位置矢量 r 与力 F 的矢积来表示,即

$$M = r \times F$$

根据矢量矢积的定义,可以得出下列结论:

(1) 当 $\theta = 0$, 即 A 、 B 两矢量平行时, $\sin \theta = 0$, 所以 $A \times B = 0$.

(2) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 A 、 B 两矢量垂直时, $\sin \theta = 1$, 矢积 $A \times B$ 具有最大值, 它的大小为 AB .

(3) 矢积 $A \times B$ 的方向与 A 、 B 两矢量的次序有关, $A \times B$ 与 $B \times A$ 所表示的两矢量的方向正好相反, 即

$$A \times B = -(B \times A)$$

(4) 在直角坐标系中,单位矢量之间的矢积为

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

利用上述性质,对 A, B 两矢量求矢积有

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k \end{aligned}$$

利用行列式的表达式,上式可写成

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

矢量计算中,有时会遇到三个矢量所构成的乘积,如 $A \cdot (B \times C)$ 和 $A \times (B \times C)$. 前者是求两矢量 A 和 $B \times C$ 的标积,结果是一标量,后者是求两矢量 A 和 $B \times C$ 的矢积,结果是一矢量. 不难证明:

$$\begin{aligned} (1) \quad A \cdot (B \times C) &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

此式在数值上恰好等于以 A, B, C 三矢量为棱边的平行六面体的体积.

$$\begin{aligned} (2) \quad A \cdot (B \times C) &= B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \\ &\therefore -A \cdot (C \times B) = -B \cdot (A \times C) = -C \cdot (B \times A) \end{aligned}$$

$$(3) \quad A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$(4) \quad A \times (B \times C) = -A \times (C \times B) = (C \times B) \times A = -(B \times C) \times A$$

8. 矢量函数的导数

在物理上遇见的矢量常常是参量 t (时间) 的函数,因而写作 $A(t), B(t)$ 等等,这是一元函数的情况. 下面只介绍一元函数的求导. 一般地说,如果某一矢量是标量变量 (例如空间坐标 x, y, z 和时间 t) 的函数,则是多元函数的情况. 多元函数的求导比较复杂一些,可由一元函数的求导作推广,这里不作介绍.

矢量函数 $A(t)$ 可表示为

$$A(t) = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k$$

这里要注意: i, j, k 是常矢量,而 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 是 t 的函数. 现假定这三个函数都是可导的,当自变量 t 改变为 $t + \Delta t$ 时, A 和 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 便相应地有增量:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

$$\Delta A_x = A_x(t + \Delta t) - A_x(t); \quad \Delta A_y = A_y(t + \Delta t) - A_y(t)$$

$$\Delta A_z = A_z(t + \Delta t) - A_z(t)$$

于是

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta A_x \mathbf{i} + \Delta A_y \mathbf{j} + \Delta A_z \mathbf{k}$$

以 Δt 相除, 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 求极限, 便得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} \mathbf{k}$$

即

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}$$

高阶导数的概念也可应用到矢量函数上, 例如 $\mathbf{A}(t)$ 的二阶导数可写作

$$\frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d^2 A_x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 A_y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 A_z}{dt^2} \mathbf{k}$$

下面列出一些有关矢量函数的导数的简单公式:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$(2) \quad \text{当 } C \text{ 是常量, 则 } \frac{d}{dt}(C\mathbf{A}) = C \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

(3) 当 $f(t)$ 是 t 的可微函数, 则

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{A}(t)] = f(t) \frac{d\mathbf{A}}{dt} + f'(t)\mathbf{A}$$

$$(4) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B}$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

这些公式的证明是很简单的, 不再一一加以证明, 例如公式(4)可证明如下:

令

$$u(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)$$

这里 $u(t)$ 是两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的标积, 是 t 的标量函数; 令

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta u(t)$$

$$\mathbf{A}(t + \Delta t) = \mathbf{A}(t) + \Delta \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{B}(t + \Delta t) = \mathbf{B}(t) + \Delta \mathbf{B}(t)$$

于是

$$\Delta u = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$= \Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{B}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} + \Delta \mathbf{A} \cdot \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{A} \rightarrow 0$, 所以得到

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

矢量函数的导数在物理上有很多应用. 首先是用于计算质点运动的瞬时速度和瞬时加速度. 如图 1-15 所示, 一质点在一曲线上运动, 其位置 M 可用位置矢量 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ 来表示,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

当质点沿曲线移动时, 其坐标 x, y, z 将是时间 t 的函数,

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

因而

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

此式是质点运动的运动方程. 将上式对时间 t 求导, 得

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

从导数的定义和图 1-15 可以看到, 在 M 点处,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \text{质点在 } M \text{ 点的瞬时速度} \end{aligned}$$

用 $\mathbf{v}$ 表示瞬时速度, 于是

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

一般地说, 对矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 而言, $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 表示该矢量在各瞬时的时间变化率, 它包含三个分矢量: $\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i}, \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j}, \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}$. 以上述质点的位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ 来说, 位置矢量 $\mathbf{r}$ 对时间变化率 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, 等于质点的瞬时速度 $\mathbf{v}$, 而瞬时速度 $\mathbf{v}$ 的时间变化率 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, 按定义等于质点的瞬时加速度 $\mathbf{a}$.

9. 矢量函数的积分

这里, 先说明上述求导数的逆问题. 这就是, 当某矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 的导数 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 已知时, 如何求得这个原函数 $\mathbf{A}(t)$. 我们把 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 记作矢量函数 $\mathbf{B}(t)$, 即已知

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{B}(t) = B_x(t)\mathbf{i} + B_y(t)\mathbf{j} + B_z(t)\mathbf{k}$$

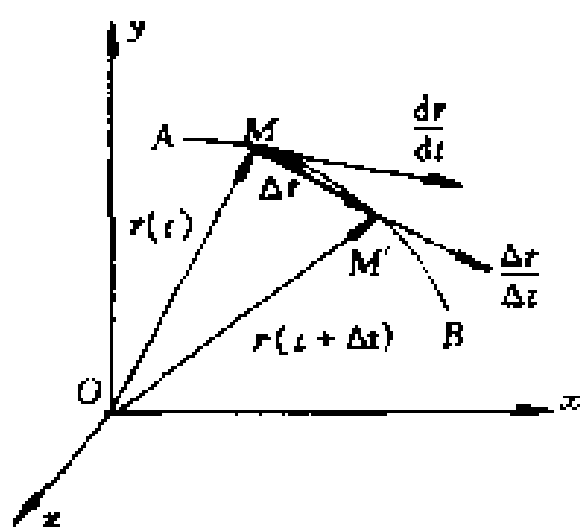


图 1-15 位置矢量的导数

这里三个标量函数 $B_x(t)$ 、 $B_y(t)$ 、 $B_z(t)$ 分别代表 $\frac{dA_x}{dt}$ 、 $\frac{dA_y}{dt}$ 、 $\frac{dA_z}{dt}$. 所以, 将 $B(t)$ 对时间 t 求积分, 可改变为将 $B_x(t)$ 、 $B_y(t)$ 、 $B_z(t)$ 分别对时间 t 求积分, 即

$$A = \int B dt = A_x i + A_y j + A_z k$$

上式中的 A_x 、 A_y 、 A_z 分别是下面的三个积分,

$$A_x = \int B_x(t) dt, \quad A_y = \int B_y(t) dt, \quad A_z = \int B_z(t) dt$$

例如, 质点在空间运动时的速度设为

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)i + v_y(t)j + v_z(t)k$$

我们将速度函数 $\mathbf{v}(t)$ 对时间 t 求定积分, 便可求得质点在空间的位移和位置, 其位移 (从 0 时刻到 t 时刻) 是

$$\int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \left(\int_0^t v_x(t) dt \right) i + \left(\int_0^t v_y(t) dt \right) j + \left(\int_0^t v_z(t) dt \right) k$$

其位置矢量 $\mathbf{r}$ 是

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{r}_0$$

式中 $\mathbf{r}_0$ 是一个由初始条件决定的常矢量, 即 $t=0$ 时刻质点的位置矢量. 又如, 质点所受的变力 $\mathbf{F}(t)$ 设为

$$\mathbf{F}(t) = F_x(t)i + F_y(t)j + F_z(t)k$$

将 $\mathbf{F}(t)$ 对时间 t 求定积分, 便可求得质点所受到的冲量为

$$\mathbf{I} = \int_0^t \mathbf{F}(t) dt = \left(\int_0^t F_x(t) dt \right) i + \left(\int_0^t F_y(t) dt \right) j + \left(\int_0^t F_z(t) dt \right) k$$

上式中三个标量积分分别是冲量 $\mathbf{I}$ 的三个分量, 即 I_x 、 I_y 和 I_z .

关于矢量函数的积分, 尤其是当这个函数是空间坐标 x 、 y 、 z 的多元函数时, 还有如线积分、面积分、体积分等其他较复杂的积分计算 (要按不同的定义式进行). 例如, 功的计算就是对一个矢量函数求线积分的问题. 我们知道, 当力 $\mathbf{F}$ 作用在一个物体上, 力的作用点移动一个微小位移 $d\mathbf{s}$ 时 (图 1-16), 该力 $\mathbf{F}$ 所作的微功 $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, 所以, 当力的作用点移动一段路程 ab 时, 该力 $\mathbf{F}$ 所作的总功应为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b F \cos \theta ds = \int_a^b F_{\parallel} ds$$

式中 θ 是力 $\mathbf{F}$ 和位移 $d\mathbf{s}$ 之间的夹角, $F_{\parallel}$ 是 $\mathbf{F}$ 沿 $d\mathbf{s}$ 方向的分量. 这种形式的积分叫做 $\mathbf{F}$ 沿曲线 ab 的线积分. 如果这积分沿着封闭曲线进行 (即从 a 点出

发仍旧回到 a 点), 则这积分可写为 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.



图 1-16 矢量函数的线积分

一般地说, 对一矢量函数 $\mathbf{B}(x, y, z)$ 沿某一曲线 C (起点 a , 终点 b) 求线积分, 可写作:

$$\int_{C_{ab}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

由于 $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$, $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_x dx + B_y dy + B_z dz$$

所以

$$\int_{C_{ab}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_{ab}} B_x dx + \int_{C_{ab}} B_y dy + \int_{C_{ab}} B_z dz$$

即化为计算三个标量函数的积分的总和. 对于力 $\mathbf{F}$ 而言, 这样三个积分式

$\int_{C_{ab}} F_x dx$, $\int_{C_{ab}} F_y dy$ 和 $\int_{C_{ab}} F_z dz$ 就是分力 F_x , F_y 和 F_z 所作的功.

附录 I 国际单位制(SI)

鉴于国际上使用的单位制种类繁多,换算十分复杂,对科学与技术交流带来许多困难,根据 1954 年国际度量衡会议的决定,自 1978 年 1 月 1 日起实行国际单位制,简称国际制,国际代号为 SI.我国国务院于 1977 年 5 月 27 日颁发《中华人民共和国计量管理条例(试行)》,其中第三条规定:“我国的基本计量制度是米制(即“公制”),逐步采用国际单位制.”这样做不仅有利于加强同世界各国人民的经济文化交流,而且可以使我国的计量制度进一步统一。

国际单位制是在国际公制和米千克秒制基础上发展起来的.在国际单位制中,规定了七个基本单位,即米(长度单位)、千克(质量单位)、秒(时间单位)、安培(电流单位)、开尔文(热力学温度单位)、摩尔(物质的量单位)、坎德拉(发光强度单位).还规定了两个辅助单位,即弧度(平面角单位)、球面度(立体角单位).其它单位均由这些基本单位和辅助单位导出.现将国际单位制的基本单位及辅助单位的名称、符号及其定义列表如下:

表 1 国际单位制的基本单位

量的名称	单位名称	单位符号	定 义
长度	米	m	“米是光在真空中 $1/299\,792\,458\,\text{s}$ 的时间间隔内所经路程的长度”. (第 17 届国际计量大会,1983 年)
质量	千克 (公斤)	kg	“千克是质量单位,等于国际千克原器的质量”. (第 1 和第 3 届国际计量大会,1889 年,1901 年)
时间	秒	s	“秒是铯 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 $9\,192\,631\,770$ 个周期的持续时间”. (第 13 届国际计量大会,1967 年,决议 1)

续表

量的名称	单位名称	单位符号	定 义
电 流	安培	A	“安培是一恒定电流,若保持在处于真空中相距1 m的两无限长而圆截面可忽略的平行直导线内,则此两导线之间产生的力在每米长度上等于 2×10^{-7} N”。 (国际计量委员会,1946年,决议2; 1948年第9届国际计量大会批准)
热力学温 度	开尔文	K	“热力学温度单位开尔文是水三相点热力学温度的 $1/273.16$ ”。(第13届国际计量大会,1967年,决议4)
物质的量	摩尔	mol	“(1)摩尔是一系统的物质的量,该系统中所包含的基本单元数与0.012 kg 碳-12的原子数目相等,(2)在使用摩尔时,基本单元应予指明,可以是原子、分子、离子、电子及其它粒子,或是这些粒子的特定组合”。 (国际计量委员会1969年提出, 1971年第14届国际计量大会通过,决议3)
发光强度	坎德拉	cd	“坎德拉是一光源在给定方向上的发光强度,该光源发出频率为 540×10^{12} Hz的单色辐射,且在此方向上的辐射强度为 $(1/683)$ W/sr.” (第16届国际计量大会,1979年决议3)

表 2 国际单位制的辅助单位

量的名称	单位名称	单位符号	定 义
平面角	弧 度	rad	“弧度是一个圆内两条半径之间的平面角,这两条半径在圆周上截取的弧长与半径相等”。 (国际标准化组织建议书 R31 第1部分, 1965年12月第二版)
立体角	球面度	sr	“球面度是一个立体角,其顶点位于球心,而它在球面上所截取的面积等于以球半径为边长的正方形面积”。 (同上)

表 3 国际单位制词头

因数	词头名称	符号	因数	词头名称	符号
10^{18}	艾可萨(exa)	E	10^{-1}	分(déci)	d
10^{15}	拍它(peta)	P	10^{-2}	厘(centi)	c
10^{12}	太拉(téra)	T	10^{-3}	毫(milli)	m
10^9	吉咖(giga)	G	10^{-6}	微(micro)	μ
10^6	兆(méga)	M	10^{-9}	纳诺(nano)	n
10^3	千(kilo)	k	10^{-12}	皮可(pico)	p
10^2	百(hecto)	h	10^{-15}	飞母托(femto)	f
10^1	十(déca)	da	10^{-18}	阿托(atto)	a

附录Ⅱ 力学的单位制和量纲

在采用国际单位制以前,常用的力学单位制有绝对单位制和重力单位制两类.在绝对单位制中,先规定质量的单位,然后根据牛顿运动方程规定力的单位.常用的绝对单位制又有两种:一种称为米千克秒制(MKS制),另一种称为厘米克秒制(CGS制).在米千克秒制中,质量的单位规定为千克,力的单位称为牛顿.1牛顿的力定义为:在1牛顿的力的作用下,质量为1千克的物体得到1米/秒²的加速度.在厘米克秒制中,质量的单位规定为克,力的单位称为达因.1达因的力使质量1克的物体得到1厘米/秒²的加速度.很容易证明

$$1 \text{ 牛顿} = 10^5 \text{ 达因}$$

国际单位制中的力学单位,就是采用米千克秒制的力学单位.

在重力单位制中,先规定力的单位,然后根据牛顿运动方程,规定质量的单位.工程单位制是常用的重力单位制的一种.在工程制中,力的单位是千克力(也称公斤力).1千克力相当于在纬度45°的海平面上千克原器所受的重力.后来又经国际度量衡委员会规定:

$$1 \text{ 千克力} = 9.80665 \text{ 牛顿} \approx 9.81 \text{ 牛顿}$$

有了力的单位,就可规定质量的单位.在工程制中,质量的单位是这样规定的:一物体在1千克力的力作用下,得到1米/秒²的加速度,这一物体的质量为1质量工程单位,即

$$1 \text{ 千克力} = 1 \text{ 质量工程单位} \times 1 \text{ 米/秒}^2$$

从上列各式,很容易求得各质量单位的换算式如下:

$$1 \text{ 质量工程单位} = 9.81 \text{ 千克} = 9.81 \times 10^3 \text{ 克}$$

根据各力学单位制中所规定的力、质量和加速度的单位,我们可以将牛顿运动方程中各物理量连同它们的单位写作:

$$\text{米千克秒制: } F(\text{牛顿}) = m(\text{千克}) \times a(\text{米/秒}^2)$$

$$\text{厘米克秒制: } F(\text{达因}) = m(\text{克}) \times a(\text{厘米/秒}^2)$$

$$\text{工程制: } F(\text{千克力}) = m(\text{质量工程单位}) \times a(\text{米/秒}^2)$$

在运动学中我们看到,在选定长度和时间两个物理量的单位以后,速度

和加速度的单位就可分别按照它们的定义从长度和时间单位导出,例如米/秒,米/秒².在动力学中,在选定质量和加速度或选定力和加速度的单位以后,也就可以根据牛顿第二定律导出力或质量的单位.一般地讲,各个物理量之间,常有一定的联系,因此我们可以选定几个量作为基本量,相应的单位作为基本单位,通过定义或定律,导出其他各量和相应的单位.从基本量导出的量称为导出量,相应的单位称为导出单位.

在绝对单位制中,选定长度、质量和时间作为基本量,所以米千克秒制和厘米克秒制两种单位制就是按所采用的基本单位而命名的.在工程单位制中,选定长度、力和时间作为基本量,所以工程制的基本单位是米、千克力和秒.力学中除上述各基本量以外,其他各量都是导出量,所用的单位也都是导出单位.

导出量由基本量导出,也就是可以用基本量的某种组合来表示.表示一个物理量如何由基本量(包括这些量的幂数)组合的式子,称为物理量的量纲.例如在绝对单位制中,我们常用字母 L、M 和 T 分别表示长度、质量和时间三个基本量的量纲.其他的各物理量的量纲就可用这三个字母的某种组合来表示,例如,速度的量纲是 LT^{-1} ,加速度是 LT^{-2} ,力是 MLT^{-2} .工程制中的量纲,本书不用,故从略.但应注意,在不同的单位制中,如果选用了不同的基本量,显然同一物理量的量纲也就不同.这一点,在电学中是特别重要的.

用量纲可以定出同一物理量不同单位之间的换算因素.例如力的量纲为 MLT^{-2} ,力的单位从米千克秒制换算为厘米克秒制时,可以写成:

$$\begin{aligned} 1 \text{ 牛顿} &= 1 \text{ 千克} \cdot \text{米} / \text{秒}^2 = 1000 \text{ 克} \times 100 \text{ 厘米} / \text{秒}^2 \\ &= 10^5 \text{ 克} \cdot \text{厘米} / \text{秒}^2 = 10^5 \text{ 达因} \end{aligned}$$

由此可得换算式

$$1 \text{ 牛顿} = 10^5 \text{ 达因}$$

量纲也可用来校核等式.在较复杂的方程中,常包括若干项,每一项必然具有相同的量纲,因此校核各项的量纲,就可以明确等式是否正确.例如,匀变速直线运动的方程是

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

我们很容易看出,上式中每一项应具有长度的量纲 L,所以按照量纲的校核,可知这方程是正确的(式中数字系数正确与否,不能用量纲检验出来).根据同一理由,有时从量纲的分析,可以明确方程中某一比例系数(实际上系一物

理量)的量纲,从而定出这比例系数的单位.例如在万有引力定律的表达式

$$F = G_0 \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

中, G_0 表示万有引力恒量, F 、 m 和 r 分别表示力、质量和距离.从 F 、 m 、 r 的量纲,可知 G_0 的量纲为 $M^{-1}L^3T^{-2}$;相应地,在米千克秒单位制中, G_0 的单位为米³/(千克·秒²).

习 题 答 案

第 一 章

1-1 (2) 0.285 m/s; (3) 2.71 m

1-2 (1) -4 m/s , -20 m/s ; (2) -44 m , -22 m/s ; (3) -24 m/s^2 ;
(4) -36 m/s^2

1-3 (2) 200 m, 0, 0

1-4 (1) $-\frac{2t}{\sqrt{25b^2 - 4t^2}}$; (2) 0.8 m/s^2 ; (3) $b \text{ s}$

1-5 (1) $\frac{k}{k-l}v_0$; (2) $\frac{l}{h-l}v_0$

1-6 (1) $x = \sqrt{9 + 16t - 4t^2}$, $2\frac{y}{x} \text{ m/s}$; (2) $-\frac{4}{\sqrt{21}} \text{ m/s}$

1-7 $-\frac{v_0 \sqrt{s^2 + h^2}}{s}$, $-\frac{v_0^2 h^2}{s^3}$

1-8 ak^2e^{kt} , bk^2e^{-kt} , $xy = ab$

1-9 (1) $(8tj + k) \text{ m/s}$, $8j \text{ m/s}^2$; (2) $x = 1$, $y = 4x^2$

1-10 (1) $r = (3t + 5)i + \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right)j$; (3) 7.6 m/s 与 x 轴成 66.8° 角

1-11 (0.5, 1.0)

1-13 (1) $htg\omega t$; (2) $\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}$, $2h\omega^2 \sec^2\omega t \operatorname{tg}\omega t$

1-14 269 m

1-15 12.3 m

1-18 (1) $x'/\text{m} = -5t/\text{s}$, $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$; (2) $y' = -\frac{v_0}{5\text{m/s}}x' - \frac{g}{50\text{m/s}^2}x'^2$; (3) $a_x = 0$, $a_y = a_y = -g$

1-19 11.2 km/h, 东偏北 26.6° ; 南偏西 63.4°

1-20 (1) 2564 s, 1.41 km; (2) 667 s, 1.33 km; (3) $41^\circ 30'$, 0.88 km, 1.006 s

第 二 章

$$2-1 \quad \sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}}$$

$$2-2 \quad (2) 0.12 \text{ m/s}^2; (3) 502 \text{ N}$$

$$2-3 \quad 14.2 \text{ m}$$

$$2-4 \quad (1) 613 \text{ N}; (2) 625 \text{ N}; (3) 863 \text{ N}$$

$$2-5 \quad (1) 0, 0, 0; (2) 0, 0, 0; (3) 0, 9.8 \text{ m/s}^2, 196 \text{ N}; (4) 9.8 \text{ m/s}^2, 29.4 \text{ m/s}^2, 392 \text{ N}$$

$$2-6 \quad (1) 1.96 \text{ m/s}^2, 3.92 \text{ m/s}^2, 5.88 \text{ m/s}^2; (2) 1.57 \text{ N}, 0.785 \text{ N}$$

$$2-7 \quad (1) 68.4 \text{ N}, 77.3 \text{ N}; (2) 17.0 \text{ m/s}^2$$

$$2-8 \quad (1) \frac{v_0}{1+v_0k't}; (2) \frac{1}{k} \ln(1+v_0k't); (4) \frac{1}{300} \text{ m}^{-1}$$

$$2-9 \quad \approx g \frac{x}{l}$$

$$2-10 \quad 85 \text{ m/s}, 155.1 \text{ m}$$

$$2-14 \quad (1) \sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{m_2l}}; (2) \sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{m_1l}};$$

$$(3) \sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{|m_2l-(m_1+m_2)x|}}$$

$$2-15 \quad 2.45 \text{ s}$$

$$2-16 \quad R\left(1 - \frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

$$2-17 \quad m(g - 4\pi^2 n^2 h^2), \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$2-18 \quad (1) \sqrt{\frac{2g}{a}}; (2) 2mg$$

$$2-19 \quad \text{该点与顶点的角距离为 } \theta, \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$2-21 \quad (1) \sqrt{2}mv_0; (2) -2mv_0; (3) \sqrt{2}mv_0; (4) 0$$

$$2-22 \quad (2) 3 \times 10^{-3} \text{ s}; (3) 6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}; (4) 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$2-23 \quad (2) 6 \text{ N} \cdot \text{s}, 15 \text{ N}; (3) 3 \text{ m/s}$$

$$2-24 \quad 2.22 \times 10^3 \text{ N}$$

$$2-25 \quad 215.6 \text{ N}$$

$$2-26 \quad 1.5 \times 10^4 \text{ N}$$

$$2-27 \quad (1) 4.9 \times 10^4 \text{ J}; (2) 4.9 \times 10^5 \text{ J}; (3) P_2 = 2P_1; (4) 5.025 \text{ J}, 251.3 \text{ W}, 0, 502.5 \text{ W}$$

$$2-28 \quad 4.23 \times 10^6 \text{ J}, 151 \text{ s}$$

$$2-29 \quad \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - a^2)}$$

$$2-30 \quad 0.41 \text{ cm}$$

$$2-31 \quad m g a \sin \theta + \frac{1}{2} k a^2 \theta^2$$

$$2-32 \quad (1) 3.13 \text{ m/s}, 4.43 \text{ m/s}, 4.12 \text{ m/s}; (2) 13.8 \text{ m/s}^2, \text{与切向夹角为 } 49^\circ 6'; 19.6 \text{ m/s}^2, \text{沿法向}; 17.7 \text{ m/s}^2, \text{与切向夹角为 } 16^\circ 6'; (3) 8.82 \times 10^{-2} \text{ N}, 0.176 \text{ N}, 0.153 \text{ N}$$

$$2-33 \quad 2.45 \times 10^3 \text{ J}$$

$$2-34 \quad -9 \text{ J}$$

$$2-35 \quad 5 \text{ m/s}, 8.70 \text{ m/s}, 10.1 \text{ m/s}$$

第 三 章

$$3-1 \quad (1) \frac{A}{2} x^2 - \frac{B}{3} x^3; (2) \frac{5}{2} A - \frac{19}{3} B$$

$$3-2 \quad (1) \left(\frac{x}{a} \right)' + \left(\frac{y}{b} \right)' = 1; (2) \frac{1}{2} m b^2 \omega^2, \frac{1}{2} m a^2 \omega^2; (3) -m \omega^2 r, \frac{1}{2} m \omega^2 a^2, -\frac{1}{2} m \omega^2 b^2$$

$$3-3 \quad (1) 5.88 \text{ m/s}^2, 0.20 mg \text{ N}; (2) 7.84 \text{ m/s}^2, 0.80 mg \text{ N}$$

$$3-4 \quad (1) 31 \text{ J}; (2) 5.34 \text{ m/s}$$

$$3-7 \quad (1) H \geq \frac{5}{2} R$$

$$3-8 \quad (1) \frac{mg}{k}, mg; (2) \frac{2mg}{k}, 2mg, g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$3-9 \quad 1.2 \text{ m}$$

$$3-10 \quad t_1 \text{ 移 } 0.267 \text{ m}$$

$$3-11 \quad \frac{3(v_0 - g t)}{2 \sin \alpha}$$

$$3-12 \quad (1) 4.69 \times 10^4 \text{ m/s}, 54^\circ 4'; (2) 22^\circ 20'$$

$$3-16 \quad 2.3 \text{ m}$$

$$3-17 \quad 319 \text{ m/s}$$

$$3-18 \quad m \cos \alpha \sqrt{\frac{2gh}{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}$$

$$3-19 \quad (1) 31^\circ 46'; (2) 0.80$$

$$3-20 \quad (1) \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0; (2) 0; (3) (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{gh}{2m_1 k}}$$

$$3-21 \quad \frac{E_A}{E_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

$$3-22 \quad \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}, m \sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}$$

$$3-23 \quad (1) 8.89 \text{ m}; (2) 20 \text{ cm}$$

$$3-24 \quad 36 \text{ m/s}^2$$

$$3-25 \quad 4.13 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$$

$$3-27 \quad (1) 3.03 \times 10^4 \text{ m/s}; (2) 1.93 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}, 2.06 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

$$3-29 \quad \text{以 } v_0 \text{ 方向为 } x \text{ 轴, } v_x = \frac{v_0}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right), v_y = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$3-30 \quad E_k = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2}, E_p = -\frac{I^2}{mr^2}, E = -\frac{L^2}{2mr^2}$$

第 四 章

$$4-1 \quad (1) 1.26 \times 10^2 \text{ s}^{-2}, 2.5 \text{ 转}; (2) 47.1 \text{ N}, 111 \text{ J}; (3) 1.26 \times 10^3 \text{ s}^{-1}, 1.88 \times 10^2 \text{ m/s}, 2.37 \times 10^6 \text{ m/s}^2, 18.8 \text{ m/s}^2$$

$$4-2 \quad 314 \text{ N}$$

$$4-3 \quad (1) \frac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}, \frac{m_1 \left(m_2 + \mu m_2 - \frac{J}{r^2} \right) g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}.$$

$$\frac{m_2 \left(m_1 + \mu m_1 + \mu \frac{J}{r^2} \right) g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}};$$

$$(2) \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}, \frac{m_1 \left(m_2 + \frac{J}{r^2} \right) g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}, \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

$$4-4 \quad 1.26 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4-5 $2.60 \times 10^2 \text{ J}$

4-6 $1.96 \times 10^4 \text{ J}, 1.70 \times 10^4 \text{ J}$

4-7 (2) 4.52 m/s^2 ; (3) $5.28 \times 10^4 \text{ N}$; (4) $\mu \geq 0.54$; (5) $\leq 66^\circ 25'$

4-8 $(1) T = (m_A + m_B + m_C)g \begin{cases} > 0 & \text{向下加速} \\ = 0 & \text{静止} \\ < 0 & \text{向上加速} \end{cases}$

4-9 (1) $\frac{1}{6} \sqrt{\frac{10}{7} gh}, \sqrt{\frac{10}{7} gh}$

4-10 (1) $1.33 \text{ s}^{-2}, 1.00 \text{ m/s}^2$; (2) $1.00 \times 10^4 \text{ N}$; (3) $1.00 \times 10^4 \text{ J}, 1.00 \times 10^4 \text{ J}$

4-11 (1) $v_C = \frac{l}{2} \sin \theta \cdot \omega$, 方向竖直向下; (2) $\omega = \sqrt{\frac{12g(1 - \cos \theta)}{(1 + 3\sin^2 \theta)l}}$

4-12 (1) $\frac{2}{3}g$; (2) $\frac{1}{6}mg$

4-13 $\frac{J + mR^2}{J} \omega, \frac{1}{2} \frac{J + mR^2}{J} mR^2 \omega^2$

4-14 $\frac{-2R_2}{R_1^2 + 2R_2^2} v$

4-15 5 s

4-16 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3h}{a}} \text{ 转}$

4-17 $\frac{2m'}{m + 2m'} \times 2\pi$

4-18 $73.2 \times 10^{19} \text{ J/s}, 1.05 \times 10^{16} \text{ s}$

4-19 $\frac{J\dot{\omega}_0}{MR + \frac{J}{R}}$

4-20 0.212 s^{-1}

4-21 (1) $6.30 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$; (2) 8.67 s^{-1} ; (3) $2.73 \times 10^3 \text{ J}, 2.73 \times 10^4 \text{ J}$, 守恒

4-22 0.88 m/s

4-23 1.18 m

4-24 0.68 m/s

4-25 (1) 8.88 s^{-1} ; (2) $94^\circ 12'$

4-26 (1) $3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$; (2) $9.8 \text{ N} \cdot \text{m}$; (3) 2.61 s^{-1} , 逆时针

4-27 (1) $1.21 \times 10^3 \text{ s}$; (2) $3.30 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$

4-28 (1) 1.76 N ; (2) $4.16 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$

第 五 章

5-2 $2.6 \times 10^6 \text{ m/s}$

5-3 $3.7 \text{ m} \times 5 \text{ m}$

5-4 $\frac{5}{3}$ 昼夜

5-5 $1.27 \text{ s}, 3.68 \times 10^8 \text{ m}, 4.45 \text{ s}$

5-6 $0.577 \times 10^{-8} \text{ s}$

5-7 $6.71 \times 10^8 \text{ m}$

5-8 (1) $4.3 \times 10^{-8} \text{ s}$; (2) 10.3 m

5-9 $--1.125 \times 10^6 \text{ m/s}, 1.125 \times 10^8 \text{ m/s}$

5-11 $0.93c, c$

5-12 $\text{tg}\theta = \frac{c \sin \theta'}{c \cos \theta' + u} \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2}$

5-13 $0.866c$

5-14 $1 - \frac{\rho}{v^2/c^2}, --\frac{\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

5-15 $\frac{9Ect}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2}}, \frac{qE}{m_0}$

5-16 $4.92 \times 10^{-15} \text{ J}, 4.55 \times 10^{-15} \text{ J}, 27.9 \times 10^{-15} \text{ J}, 18.2 \times 10^{-15} \text{ J}$

5-17 23.7 MeV

5-18 $3.6 \times 10^{26} \text{ W}$

5-19 $2.60 \times 10^8 \text{ m/s}, 2.60 \times 10^8 \text{ m/s}$

5-20 $2.57 \text{ keV}, 2.46 \times 10^3 \text{ keV}$

5-21 $\frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}, \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2) c^2}{2m_\pi}$

第 六 章

6-1 $1.92 \times 10^{-6} \text{ kg}$

6-2 $5.04 \times 10^4 \text{ Pa}$

6-3 $\frac{7}{34}$

- 6-4 (1) $3.65v_0$; (2) $3.99v_0$; (3) $3v_0$
- 6-5 $1.93 \times 10^3 \text{ m/s}$, 484 m/s , 193 m/s , $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$
- 6-6 0.85%
- 6-7 (1) $0.705v_p$; (2) $1.4v_p$
- 6-8 $\frac{1}{2}kT \neq \frac{1}{2}mv_p^2 = kT$
- 6-9 (2) $K = \frac{1}{N\bar{V}}$; (3) $\frac{V}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}V$
- 6-10 0.78
- 6-11 1.05%
- 6-12 $\frac{4}{\pi} - \frac{1}{\bar{v}}$
- 6-13 $3.74 \times 10^3 \text{ J}$, $2.49 \times 10^3 \text{ J}$
- 6-14 2.3 km
- 6-15 $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$
- 6-16 5
- 6-17 (1) $A = \frac{3N}{4\pi v_f^3}$
- 6-18 $3.22 \times 10^{17} \text{ 个/m}^3$, 7.84 m
- 6-19 (1) $2.65 \times 10^{-7} \text{ m}$; (2) $0.89 \times 10^{-10} \text{ m}$
- 6-20 (1) $5.42 \times 10^8 \text{ 次/s}$; (2) 0.71 次/s
- 6-21 $1.27 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- 6-22 $1.34 \times 10^{-7} \text{ m}$, $2.52 \times 10^{-10} \text{ m}$
- 6-23 $\frac{RT_k}{p_k V_k} = \frac{8}{3}$
- 6-24 $1.28 \times 10^{-4} \text{ m}^3$
- 6-25 -0.19 J
- 6-26 $a = 8.26 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2$, $b = 3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$

第 七 章

- 7-1 (1) 623 J , 623 J , 0 ; (2) 623 J , 416 J , 1.039 J
- 7-2 升高 0.19 K
- 7-3 (1) 692 J ; (2) 970 J
- 7-4 $3.15 \times 10^3 \text{ J}$

$$7-5 \quad 3.25 \times 10^4 \text{ J}$$

$$7-6 \quad (1) 12^\circ \text{C}; (2) 91.255.5 \text{ Pa}, 0.05 \text{ m}^3; (3) 8.6^\circ \text{C}, 0.046 \text{ m}^3$$

$$7-7 \quad \frac{c}{V_1} = \frac{c}{V_2}, T_2 < T_1$$

$$7-8 \quad (1) 1.246 \text{ J}, 2.033 \text{ J}, 3.279 \text{ J}; (2) 1.687 \text{ J}, 1.246 \text{ J}, 2.933 \text{ J}$$

$$7-9 \quad (2) 932 \text{ J}$$

$$7-10 \quad \sqrt{\frac{2Q}{k} + h^2} - \frac{2h^2}{RT} C_v (T_1 - T)$$

$$7-11 \quad 1.26; 1.15$$

$$7-12 \quad \text{双原子气体氮}$$

$$7-13 \quad (1) 2.09 \times 10^3 \text{ J}; (2) 3.34 \times 10^2 \text{ J}$$

$$7-14 \quad (1) 1.2; (2) -63 \text{ J}; (3) 63 \text{ J}; (4) 126 \text{ J}$$

$$7-15 \quad VT^{\frac{C_v}{R}} e^{-\frac{a}{R^2}} = \text{常量}$$

$$7-17 \quad 1.40$$

$$7-20 \quad 1.34 \times 10^3 \text{ J}, 5.35 \times 10^3 \text{ J}, 4.01 \times 10^3 \text{ J}$$

$$7-21 \quad (1) 3.7\%; (2) 10\%$$

$$7-22 \quad (1) 1.04 \times 10^4 \text{ J}, 6.23 \times 10^3 \text{ J}, 4.15 \times 10^3 \text{ J}, 0, -6.23 \times 10^3 \text{ J}, 0, -3.37 \times 10^4 \text{ J}; (2) 7.7\%$$

$$7-23 \quad (1) 533 \text{ K}; (2) 500 \text{ K}$$

$$7-24 \quad (1) 0.72; (2) 1.67 \times 10^4 \text{ J}$$

$$7-25 \quad 2.5 \text{ J/K}$$

$$7-26 \quad -1548 \text{ J/K}$$

$$7-27 \quad m \ln \frac{T_m}{T_0} + \frac{mL}{T_m}$$

$$7-28 \quad 2 \frac{M_1}{M_{m1}} R \ln 2$$

$$7-29 \quad (1) k \left[\ln \sqrt{\frac{2}{N\pi}} - 2 \left(n - \frac{N}{2} \right)^2 / N \right]; (2) \frac{N}{2} k; (3) 3.84 \times 10^{14} \text{ J/K}$$

$$7-30 \quad 153 \text{ J/K}$$

$$7-31 \quad \nu C_p \ln 3$$

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名= 普通物理学 1 第五版

作者=

页数= 4 2 3

S S 号= 1 0 1 0 1 6 3 6

出版日期=

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
绪论
第一篇

力学

第一章

质点的运动
1 - 1 质点 参考系 运动方程
1 - 2 位移 速度 加速度
1 - 3 圆周运动及其描述
1 - 4 曲线运动方程的矢量形式
1 - 5 运动描述的相对性 伽利略坐标变换
思考题
习题

第二章

牛顿运动定律
2 - 1 牛顿第一定律和第三定律
2 - 2 常见力和基本力
2 - 3 牛顿第二定律及其微分形式
2 - 4 牛顿运动定律应用举例
2 - 5 牛顿第二定律积分形式之一：动量定理
2 - 6 牛顿第二定律积分形式之二：动能定理
2 - 7 非惯性系 惯性力
思考题
习题

第三章

阅读材料A 混沌和自组织现象
运动的守恒定律
3 - 1 保守力 成对力作功 势能
3 - 2 功能原理
3 - 3 机械能守恒定律 能量守恒定律
3 - 4 质心 质心运动定理 动量守恒定律 火箭飞行
3 - 5 碰撞
3 - 6 质点的角动量和角动量守恒定律
3 - 7 质点在有心力场中的运动
3 - 8 对称性和守恒定律
思考题
习题

第四章

阅读材料B 宇宙的膨胀
刚体的转动
4 - 1 刚体的平动、转动和定轴转动
4 - 2 刚体的角动量 转动动能 转动惯量
4 - 3 力矩 刚体定轴转动定律
4 - 4 定轴转动的动能定理
4 - 5 刚体的自由度 ？刚体的平面平行运动
4 - 6 定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律
4 - 7 进动
思考题
习题

第五章

相对论基础
5 - 1 伽利略相对性原理 经典力学的时空观
5 - 2 狭义相对论基本原理 洛伦兹坐标变换式
5 - 3 相对论速度变换公式
5 - 4 狭义相对论时空观
5 - 5 狭义相对论动力学基础
5 - 6 广义相对论简介
思考题
习题

阅读材料C 宋超新星爆发和光速不变性

第二篇

热学

第六章

气体动理论
6 - 1 状态 过程 理想气体
6 - 2 分子热运动和统计规律
6 - 3 气体动理论的压强公式
6 - 4 理想气体的温度公式
6 - 5 能量均分定理 理想气体的内能
6 - 6 麦克斯韦速率分布律
6 - 7 玻尔兹曼分布律 重力场中粒子按高度的分布
6 - 8 分子的平均碰撞次数及平均自由程

6 - 9 气体内的迁移现象
6 - 1 0 真实气体 范德瓦耳斯方程
6 - 1 1 物态和相变

思考题

习题

阅读材料D 非常温和非常压

第七章 热力学基础

7 - 1 热力学第一定律
7 - 2 热力学第一定律对于理想气体等值过程的应用
7 - 3 绝热过程 ？多方过程
7 - 4 焦耳 - 汤姆孙实验 真实气体的内能
7 - 5 循环过程 卡诺循环
7 - 6 热力学第二定律
7 - 7 可逆过程与不可逆过程 卡诺定理
7 - 8 熵
7 - 9 熵增加原理 热力学第二定律的统计意义

思考题

习题

阅读材料E 熵与能源

附录 I 矢量（第一部分）
附录 II 国际单位制（ S I ）
附录 III 力学的单位制和量纲
习题答案
附录页